Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

О.М. Полещук, С.В. Тумор

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва 2023

УДК 519.21
ББК 22.171

Издание доступно в электронном виде по адресу
https://ebooks.bmstu.press/catalog/

Факультет «Космический»
Кафедра «Высшая математика и физика» (К-6 МФ)

Рекомендовано Научно-методическим советом МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия

Рецензент:
профессор А.В. Корольков

Полещук, О.М.

Элементы теории вероятностей. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов / О.М. Полещук, С.В. Тумор – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023. – 50 с.

Представлены учебно-методические материалы для освоения модуля «Основные понятия теории вероятностей» дисциплины «Математика». Изложены необходимые теоретические материалы, приведены типовые задачи с подробным описанием способов их решения.

Для студентов бакалавриата направления подготовки 35.03.01 «Лесное дело».

УДК 519.21
ББК 22.171

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Учебно-методическое пособие подготовлено в соответствии с учебной программой модуля «Основные понятия теории вероятностей» дисциплины «Математика».

Для удобства ориентирования в пособии составлено оглавление. В начале приводятся базовые теоретические сведения о событиях и операциях над событиями, а также приводится формула классической вероятности. Далее рассматриваются основные формулы комбинаторики – перестановки, размещения и сочетания. Затем идет формула условной вероятности. После приводится формула полной вероятности, а за ней формула Байеса. Далее рассматриваются дискретные и непрерывные случайные величины, а также их числовые характеристики – математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение. Все главы снабжены большим количеством примеров. После основных теоретических сведений приведен пример решения типового варианта контрольной работы по модулю «Основные понятия теории вероятностей» и варианты заданий контрольной работы. Завершают издание вопросы для самоконтроля и список рекомендуемой литературы.

Ключевые слова: событие, классическая вероятность, перестановки, размещения, сочетания, условная вероятность, формула полной вероятности, формула Байеса, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина, математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров направления подготовки:

35.03.01 Лесное дело.

Цель издания – оказание помощи студентам в освоении теоретических и практических основ модуля «Основные понятия теории вероятностей» дисциплины «Математика».

Проработав учебно-методическое пособие, студенты смогут:

- применять знания о классической вероятности на практике, в том числе при решении задач профессионального поля деятельности;
- применять комбинаторные формулы и методы для решения задач профессионального поля деятельности;
- применять формулу полной вероятности для оценки возможности наступления реального события, зависящего от многих условий;
- применять формулу Байеса для переоценки изначальных гипотез после наступления события;
- моделировать реальные процессы с помощью дискретных и непрерывных случайных величин.

Для изучения модуля «Основные понятия теории вероятностей» дисциплины «Математика» необходимы знания, полученные при изучении «школьного» курса математики, а также модулей «Линейная алгебра», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» и «Интегральное исчисление функций одной переменной» дисциплины «Математика».

Теоретические и практические задания, изложенные в данном пособии, будут способствовать овладению студентами компетенциями, предусмотренными образовательной программой. Проработка учебно-методического пособия позволит студентам:

ЗНАТЬ

- основные понятия, законы и методы математических и естественных наук, необходимые для решения типовых профессиональных задач.

УМЕТЬ

- использовать основные математические и естественнонаучные приемы решения типовых профессиональных задач.

События. Классическая вероятность события

Обозначим все возможные исходы некоторого эксперимента как $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Будем считать, что количество исходов конечно и они **несовместны,** то есть появление одного исхода исключает появление других. Также условимся, что исходы $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ образуют **полную группу исходов**, то есть обязательно наступит один из исходов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Назовем такие исходы $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ **элементарными событиями** и обозначим их совокупность как Ω (омега), то есть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Назовем Ω **пространством элементарных событий** или пространством исходов.

Пример. Эксперимент состоит в однократном подбрасывании монеты. Задание: определить пространство элементарных исходов.

Поскольку на одной стороне монеты изображен Орел (О), а на другой Решка (Р), то пространство элементарных событий $\Omega = \{O, P\}$.

Теперь дадим определение понятия случайного события или просто события.

Событием (случайным событием) называется любое подмножество пространства элементарных событий.

Пример. Шестигранный кубик бросают один раз. При этом может выпасть 1, 2, 3, 4, 5, 6. Результат броска определяется многими условиями (сила броска, материал кубика и т.д.), поэтому, например, событие «выпало 6» является случайным.

Будем обозначать события заглавными латинскими буквами $(A, B, C, ...)$.Чтобы из имеющихся событий получать новые события, введем операции над событиями. Для этого будем использовать логические связки «или», «и», и «не», что на языке теории множеств соответствует следующим операциям: «объединение $(\cup)$», «пересечение $(\cap)$» и «дополнение $(\bar{A})$».

Объединением событий A и B называют событие, состоящие в том, что произошло или событие A, или событие B.

Объединение пересекающихся событий A и B изображено на рисунке 1.

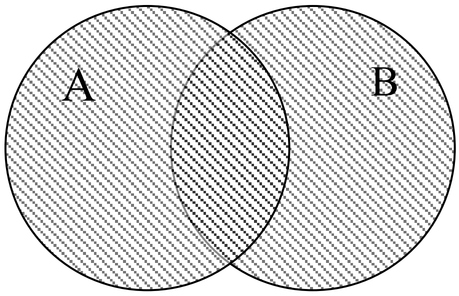

Рис. 1. Объединение пересекающихся событий A и B

Пример. Изделия имеют два вида брака – кривая строчка горловины и разная длина рукавов. Событие A состоит в том, что случайным образом выбранное изделие имеет кривую строчку горловины, событие B состоит в том, что случайным образом выбранное изделие имеет разную длину рукавов. Найти событие, состоящее в том, что выбранное изделие является бракованным.

Обозначим за C событие, состоящее в том, что выбранное изделие является бракованным, то есть при этом происходит или A или B, значит событие C является объединением событий A и B.

Если события A и B не пересекаются, то их объединение называют суммой событий.

Пересечением событий A и B называют событие, состоящие в том, что произошло и событие A, и событие B.

Пересечение событий A и B изображено на рисунке 2.

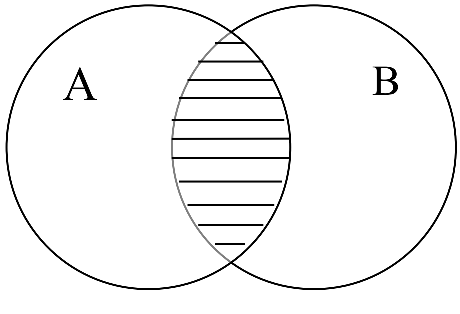

Рис. 2. Пересечение событий A и B

Пример. Событие A состоит в том, что студент Иванов сдаст экзамен, событие B состоит в том, что студент Петров сдаст экзамен. Найти событие, состоящее в том, что оба студента сдадут экзамен.

Обозначим за C событие, состоящее в том, что оба студента сдадут экзамен. Другими словами, «экзамен сдаст и Иванов, и Петров». Тогда C есть пересечение событий A и B: $C = A \cap B$. Обычно пишут $C = A \cdot B$.

События A и B называют **несовместными,** если они не пересекаются, то есть $A \cap B = \varnothing$, где $\varnothing$ – пустое множество. Несовместность событий говорит о том, что в результате одного опыта события не могут наступить одновременно.

Пустое множество $\varnothing$ в теории вероятностей отождествляют с событием, не содержащим ни одного элемента, и называют **невозможным** событием. Например, при броске шестигранного кубика событие «выпало 7» будет невозможным событием.

Дополнением события A называют событие, состоящие из элементов, не принадлежащих событию A.

Дополнение события A изображено на рисунке 3.

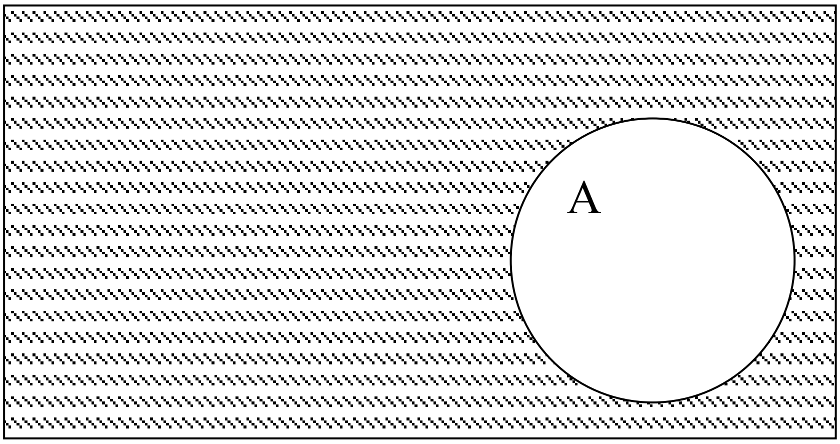

Рис. 3. Дополнение события A

Пример. Событие A состоит в том, что студент Иванов сдаст экзамен, событие B состоит в том, что студент Петров сдаст экзамен. Найти событие, состоящее в том, что только Иванов сдаст экзамен.

Обозначим за C событие, состоящее в том, что только Иванов сдаст экзамен. Другими словами, «Иванов сдаст экзамен, и Петров не сдаст экзамен». Тогда C есть следующее событие: $C = A \cap \overline{B}$. Обычно пишут $C = A \cdot \overline{B}$.

Разностью событий A и B называют событие, состоящие в том, что произошло событие A, но не произошло событие B.

Разность событий A и B изображена на рисунке 4.

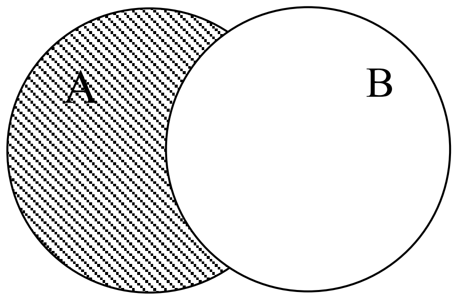

Рис. 4. Разность событий A и B

Пример. Шестигранный кубик бросают один раз. Событие A состоит в том, что выпало четное число очков $A = \{2, 4, 6\}$, событие B состоит в том, что выпало больше четырех очков $B = \{5, 6\}$. Найти событие, состоящее в том, что выпало четное число очков, не превышающее четырех.

Обозначим за C событие, состоящее в том, что выпало четное число очков, не превышающее четырех. Другими словами, $C = \{2, 4\}$. Тогда C есть разность событий A и B: $C = A \setminus B$.

Пример. Событие A состоит в том, что студент Иванов сдаст экзамен, событие B состоит в том, что студент Петров сдаст экзамен. Найти событие, состоящее в том, что хотя бы один студент сдаст экзамен.

Обозначим за C событие, состоящее в том, что хотя бы один студент сдаст экзамен. Другими словами, «экзамен сдаст или Иванов, или Петров, или оба студента». Тогда C есть объединение следующих событий: $C = A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB.$ Обычно пишут $C = A\bar{B} + \bar{A}B + AB.$

Как было сказано выше, $\varnothing$ есть невозможное событие. **Достоверным** событием будем называть все пространство элементарных исходов, обозначим его как Ω. Например, при броске двух шестигранных кубиков событие «в сумме выпало больше 1 и меньше 13» является достоверным событием.

Будем считать, что все элементарные исходы имеют одинаковые вероятности.

Тогда согласно **классическому определению вероятности события**

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $P(A)$ - вероятность наступления события A; m - число элементарных событий, благоприятствующих наступлению события A; n - общее число всех возможных элементарных событий.

Свойства вероятности события:

1. $0 \le P(A) \le 1.$
2. $P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$ - теорема сложения.
5. $P\left(\bar{A}\right) = 1 - P(A)$.
6. Если $A \subset B$ (A является подмножеством B), то $P(A) \le P(B)$.

Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. При вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее распространенные из них.

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов, которые отличаются только порядком их расположения. Число перестановок можно найти по формуле

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Читается «эн факториал».

Отметим, что $0! = 1$ по определению.

Пример. Сколькими способами можно рассадить 5 гостей по 5 стульям?

$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их расположения. Число размещений из n по k можно найти по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример. В группе из 20 человек нужно выбрать старосту и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380.$$

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, отличающиеся хотя бы одним элементом. Другими словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из k элементов, в которой не важен порядок расположения этих элементов. Число сочетаний из n по k можно найти по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать 3 детали из ящика, содержащего 10 деталей?

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120.$$

Замечание. В рассмотренных выше случаях предполагалось, что все n элементов различны. Если же какие-то элементы повторяются, то нужно применять другие формулы для комбинаций с повторениями.

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного типа, n_2 элементов второго типа и так далее n_k элементов k-го типа, то число **перестановок с повторениями** можно найти по формуле

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!},$$

где $n_1 + n_2 + ... + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$

Пример. Ребенок играет с карточками, на которых написаны буквы К, О, Л, О, К, О, Л. Сколько различных буквосочетаний может получить ребенок?

Если бы все карточки были различны, то мы применили бы формулу для числа перестановок P_n. Но поскольку некоторые буквы на карточках повторяются, то перестановка таких карточек буквосочетание не изменит. Всего у нас 7 букв. Посчитаем, сколько раз повторяется каждая буква.

К – повторяется 2 раза, значит $n_1 = 2;$

О – повторяется 3 раза, значит $n_2 = 3;$

Л – повторяется 2 раза, значит $n_3 = 2.$

Проверяем $n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 3 + 2 = 7$ - получили общее число букв.

Теперь воспользуемся формулой числа перестановок с повторениями:

$$P_7(2,3,2) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 210.$$

Рассмотрим комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо порядком их расположения. Причем каждый из n элементов может повторяться до k раз. Получим число **размещений с повторениями**, которое можно найти по формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Пример. Согласно государственному стандарту, автомобильный номерной знак состоит из 3 цифр и 3 букв. При этом недопустим номер с тремя нулями, а буквы выбираются из набора А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х *(используются только те буквы кириллицы, написание которых совпадает с латинскими буквами)*. Сколько различных номерных знаков можно составить для региона?

$\bar{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$ – количество способов составить цифровую комбинацию автомобильного номера. При этом недопустим вариант с тремя нулями, поэтому 1000 – 1 = 999 – количество цифровых комбинаций, удовлетворяющих условию задачи.

$\bar{A}_{12}^3 = 12^3 = 1728$ – количество способов составить буквенную комбинацию автомобильного номера.

Нам необходимо иметь в автомобильном номере и цифровые комбинации, и буквенные, поэтому умножаем $999 \cdot 1728 = 1\,726\,272$ – количество автомобильных номерных знаков для региона.

Рассмотрим комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, отличающиеся хотя бы одним элементом. Причем каждый из n элементов может повторяться до k раз. Получим число **сочетаний с повторениями**, которое можно найти по формуле:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}.$$

Пример. В кондитерском магазине в большом количестве продаются пирожные четырех видов: корзиночки, наполеоны, безе и эклеры. Сколькими способами можно выбрать 7 пирожных?

$$C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{(10-7)!\;7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 120.$$

Условная вероятность

Прежде чем давать строгое определение условной вероятности, отметим, что, если при вычислении вероятности события не налагается никаких особых условий, то такую вероятность называют **безусловной.** Если же особые условия налагаются, то вероятность называют **условной.** Например, часто вычисляют вероятность события, при условии, что до него произошло некоторое другое событие. Теперь дадим определение условной вероятности.

Условной вероятностью $P(A|B)$ называется вероятность наступления события A, вычисленная в предположении, что событие B уже наступило.

Формула для вычисления условной вероятности имеет вид:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Пример. В колоде 36 карт. Последовательно извлекают 2 карты. Найти вероятность, что вторая извлеченная карта дама, при условии, что первая извлеченная карта валет.

Событие A – извлечена дама, событие B – извлечен валет. $P(A \cdot B)$ – вероятность извлечь и даму, и валета. $P(B)$ – вероятность извлечь валета. Тогда по формуле условной вероятности имеем:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{36} \cdot \frac{4}{35}}{\frac{4}{36}} = \frac{4}{35}.$$

Также задачу можно решить, рассуждая следующим образом. После извлечения валета в колоде осталось 35 карт, из которых 4 дамы. Поэтому искомая условная вероятность $P(A|B) = \frac{4}{35}$.

Если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, то события A и B называются **независимыми.**

Если $P\left(A_1A_2...A_n\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_1\right)\cdot ...\cdot P\left(A_n\right),$ то события $A_1,A_2,...,A_n$ называются **независимыми.**

Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить только при появлении одного из несовместных событий $B_1,B_2,...,B_n,$ которые образуют полную группу (полной группой событий называется система событий, из которой при проведении случайного эксперимента, происходит одно и только одно событие), то есть обязательно произойдет одно из событий $B_1,B_2,...,B_n.$ Пусть известны вероятности этих событий $P\left(B_1\right),P\left(B_2\right),...,P\left(B_n\right),$ а также условные вероятности $P\left(A|B_1\right),P\left(A|B_2\right),...,P\left(A|B_n\right).$ Тогда имеет место **формула полной вероятности:**

$$P\left(A\right)=\sum_{i=1}^{n}P\left(A|B_i\right)\cdot P\left(B_i\right).$$

Пример. Имеется две коробки с деталями. Вероятность того, что деталь из первой коробки окрашена равна 0.7, вероятность того, что деталь из второй коробки окрашена равна 0.8. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь из наудачу выбранной коробки окрашена.

Событие A – взятая деталь окрашена, событие B_1 – деталь взята из первой коробки, событие B_2 – деталь взята из второй коробки.

Тогда формула полной вероятности примет вид:

$P\left(A\right)=P\left(A|B_1\right)\cdot P\left(B_1\right)+P\left(A|B_2\right)\cdot P\left(B_2\right).$

$P\left(A|B_1\right)$ – вероятность того, что взятая деталь окрашена, при условии, что она взята из первой коробки, значит $P\left(A|B_1\right)=0.7.$

$P\left(A|B_2\right)$ – вероятность того, что взятая деталь окрашена, при условии, что она взята из второй коробки, значит $P\left(A|B_2\right)=0.8.$

Поскольку вероятность выбрать, что первую коробку, что вторую одинакова, то $P(B_1)=P(B_2)=0.5.$

Подставим найденные значения в формулу полной вероятности:

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)=0.7\cdot 0.5+0.8\cdot 0.5=0.75.$$

Пример. В первой коробке 2 красных и 4 синих карандаша, во второй коробке 4 красных и 2 синих карандаша, а в третьей коробке 3 красных и 4 синих карандаша. Из первой коробки взяли 1 карандаш и переложили во вторую коробку, после этого из второй коробки взяли 1 карандаш и переложили в третью коробку. Из третьей коробки взяли 1 карандаш. Найти вероятность, что этот карандаш синий.

Событие A – взятый карандаш синий;

Событие B_1 – из первой коробки во вторую переложили красный карандаш, из второй коробки в третью переложили красный карандаш;

Событие B_2 – из первой коробки во вторую переложили красный карандаш, из второй коробки в третью переложили синий карандаш;

Событие B_3 – из первой коробки во вторую переложили синий карандаш, из второй коробки в третью переложили синий карандаш;

Событие B_4 – из первой коробки во вторую переложили синий карандаш, из второй коробки в третью переложили красный карандаш.

Тогда формула полной вероятности примет вид:

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+P(A|B_3)\cdot P(B_3)+P(A|B_4)\cdot P(B_4).$$

$P(A|B_1)$ – вероятность того, что взятый карандаш синий, при условии, что наступило событие B_1, то есть в третьей коробке стало на 1 красный карандаш больше. Тогда $P(A|B_1)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}.$

$P\left(A|B_2\right)$ – вероятность того, что взятый карандаш синий, при условии, что наступило событие B_2, то есть в третьей коробке стало на 1 синий карандаш больше. Тогда $P\left(A|B_2\right)=\dfrac{5}{8}$.

$P\left(A|B_3\right)$ – вероятность того, что взятый карандаш синий, при условии, что наступило событие B_3, то есть в третьей коробке стало на 1 синий карандаш больше. Тогда $P\left(A|B_3\right)=\dfrac{5}{8}$.

$P\left(A|B_4\right)$ – вероятность того, что взятый карандаш синий, при условии, что наступило событие B_4, то есть в третьей коробке стало на 1 красный карандаш больше. Тогда $P\left(A|B_4\right)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

$P\left(B_1\right)$ – вероятность того, что из первой коробки во вторую переложили красный карандаш, затем из второй коробки в третью переложили красный карандаш. Тогда $P\left(B_1\right)=\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{5}{7}=\dfrac{5}{21}$.

$P\left(B_2\right)$ – вероятность того, что из первой коробки во вторую переложили красный карандаш, затем из второй коробки в третью переложили синий карандаш. Тогда $P\left(B_2\right)=\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{21}$.

$P\left(B_3\right)$ – вероятность того, что из первой коробки во вторую переложили синий карандаш, затем из второй коробки в третью переложили синий карандаш. Тогда $P\left(B_3\right)=\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{2}{7}$.

$P\left(B_4\right)$ – вероятность того, что из первой коробки во вторую переложили синий карандаш, затем из второй коробки в третью переложили красный карандаш. Тогда $P\left(B_4\right)=\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{8}{21}$.

Подставим найденные значения в формулу полной вероятности:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{21}+\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{21}+\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{21}=\frac{1}{21}\left(\frac{5}{2}+\frac{10}{8}+\frac{30}{8}+\frac{8}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{21}\left(\frac{10+5+15+16}{4}\right)=\frac{23}{42}.$$

Формула Байеса

Пусть событие A может наступить только при появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу. Эти события называют **гипотезами,** поскольку мы заранее не знаем, какое из них наступит. Пусть событие A произошло, и при этом сработала некоторая гипотеза B_i. Какова при этом будет апостериорная (послеопытная) вероятность гипотезы B_i при условии, что событие A произошло? Ответ на этот вопрос дает **формула Байеса:**

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)\cdot P(B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|B_i)\cdot P(B_i)}.$$

Формула Байеса позволяет «переоценить» исходные вероятности гипотез после наступления события A.

Пример. На склад поступило две партии изделий: первая – 2000 штук, вторая – 3000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно из первой партии.

Событие A – взятое изделие стандартно;

Событие B_1 – взятое изделие из первой партии;

Событие B_2 – взятое изделие из второй партии.

Тогда формула Байеса примет вид:

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(A|B_i)\cdot P(B_i)}=\frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)}.$$

$P(A|B_1)$ – вероятность того, что изделие стандартно при условии, что оно из первой партии. Тогда $P(A|B_1)=1-0.2=0.8.$

$P(A|B_2)$ – вероятность того, что изделие стандартно при условии, что оно из второй партии. Тогда $P(A|B_2)=1-0.1=0.9.$

$P(B_1)$ – вероятность того, что наудачу взятое изделие из первой партии. Тогда $P(B_1)=\frac{2000}{2000+3000}=0.4.$

$P(B_2)$ – вероятность того, что наудачу взятое изделие из второй партии. Тогда $P(B_2)=\frac{3000}{2000+3000}=0.6.$

Подставим найденные значения в формулу Байеса:

$$P(B_1|A)=\frac{0.8\cdot 0.4}{0.8\cdot 0.4+0.9\cdot 0.6}=\frac{8\cdot 4}{8\cdot 4+9\cdot 6}=\frac{32}{86}=\frac{16}{43}\approx 0.37.$$

Мы видим, что вероятность гипотезы B_1 до того как событие A произошло, была равна 0.4, а после стала равна 0.37. Уменьшение вероятности связано с тем, что количество изделий в первой партии меньше, чем количество изделий во второй партии и к тому же в первой партии выше процент брака. То есть мы скорее подумаем, что извлеченное стандартное изделие принадлежит ко второй партии, поскольку та больше и детали в ней качественней. Эту особенность с математической точки зрения и позволяет учесть формула Байеса.

Дискретная и непрерывная случайные величины

Случайная величина – это числовая величина, которая в результате испытания может принять одно и только одно значение, заранее неизвестное и зависящее от многих случайных причин, которые не могут быть учтены.

Например, при однократном броске игрального кубика могут появиться значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Мы заранее не знаем, какое именно значение появится, поскольку оно зависит от множества случайных причин, которые не могут быть учтены все вместе. Поэтому число выпавших очков есть случайная величина, а 1, 2, 3, 4, 5, 6 – значения этой случайной величины.

Поскольку все исходы испытания можно пронумеровать, то случайную величину можно определить через числовую функцию исхода испытания.

Случайной величиной назовем числовую функцию на пространстве элементарных событий.

Обозначать случайные величины будем большими латинскими буквами X, Y, Z и т.д. А значения, принимаемые этими случайными величинами, будем обозначать малыми латинскими буквами x, y, z и т.д.

Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины. Дискретная случайная величина принимает конечный или счетный набор значений. Значения непрерывной случайной величины не могут быть заранее перечислены и заполняют некоторый промежуток числовой оси (прямую, луч, отрезок).

Примеры дискретных случайных величин:

- число выпавших на кубике очков;
- число попаданий в мишень при нескольких выстрелах.

Примеры непрерывных случайных величин:

- время работы до отказа некоторого устройства;
- время прибытия автобуса.

Задать случайную величину можно с помощью закона распределения вероятностей.

Для дискретной случайной величины X закон распределения можно задать в виде таблицы, первая строка которой состоит из значений случайной величины X, а вторая из соответствующих этим значениям вероятностей.

Пример. Составить закон распределения вероятностей очков, выпавших на шестигранном кубике.

Пусть X – случайная величина «число очков, выпавших на кубике». Тогда значениями X будут $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$; $x_6 = 6$. Все эти значения на кубике могут выпасть с одинаковыми вероятностями, поэтому $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$. Составим таблицу, задающую закон распределения случайной величины X:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Функцией распределения вероятностей случайной величины X называется

$$F(x) = P\left(X \le x\right).$$

Функция распределения вероятностей существует для дискретных и непрерывных случайных величин.

Свойства функции распределения:

1. $P\left(x_1 < X \le x_2\right) = F(x_2) - F(x_1)$.

2. Для $x_2 \ge x_1$ $F(x_2) \ge F(x_1)$, то есть функция распределения вероятностей неубывающая.

3. $0 \le F(x) \le 1$.

4. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

5. $F(x)$ непрерывна справа.

Вернемся к предыдущему примеру и построим функцию распределения для случайной величины X – «число очков, выпавших на кубике».

$F(x)=0,$ если $x<1.$

$F(1)=P\left(X\le 1\right)=P\left(X=1\right)=\dfrac{1}{6},$ то есть, если $1\le x<2,$ то $F(x)=\dfrac{1}{6}.$

$F(2)=P\left(X\le 2\right)=P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3},$ то есть, если $2\le x<3,$ то $F(x)=\dfrac{2}{3}.$

$F(3)=P\left(X\le 3\right)=P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)+P\left(X=3\right)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2},$ то есть, если $3\le x<4,$ то $F(x)=\dfrac{1}{2}.$

$F(4)=P\left(X\le 4\right)=P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)+P\left(X=3\right)+P\left(X=4\right)=4\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3},$ то есть, если $4\le x<5,$ то $F(x)=\dfrac{2}{3}.$

$F(5)=P\left(X\le 5\right)=P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)+\ldots+P\left(X=5\right)=5\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6},$ то есть, если $5\le x<6,$ то $F(x)=\dfrac{5}{6}.$

$F(x)=1,$ если $x\ge 6.$

Значит функция распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X «число очков, выпавших на кубике» имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x<1 \\ \frac{1}{6}, \text{ при } 1\le x<2 \\ \frac{1}{3}, \text{ при } 2\le x<3 \\ \frac{1}{2}, \text{ при } 3\le x<4 \\ \frac{2}{3}, \text{ при } 4\le x<5 \\ \frac{5}{6}, \text{ при } 5\le x<6 \\ 1, \text{ при } x\ge 6 \end{cases}$$

Построим график для $F(x)$.

По горизонтальной оси откладываем значения случайной величины x_i, а по вертикальной оси – соответствующие им значения функции $F(x)$ (рис.5).

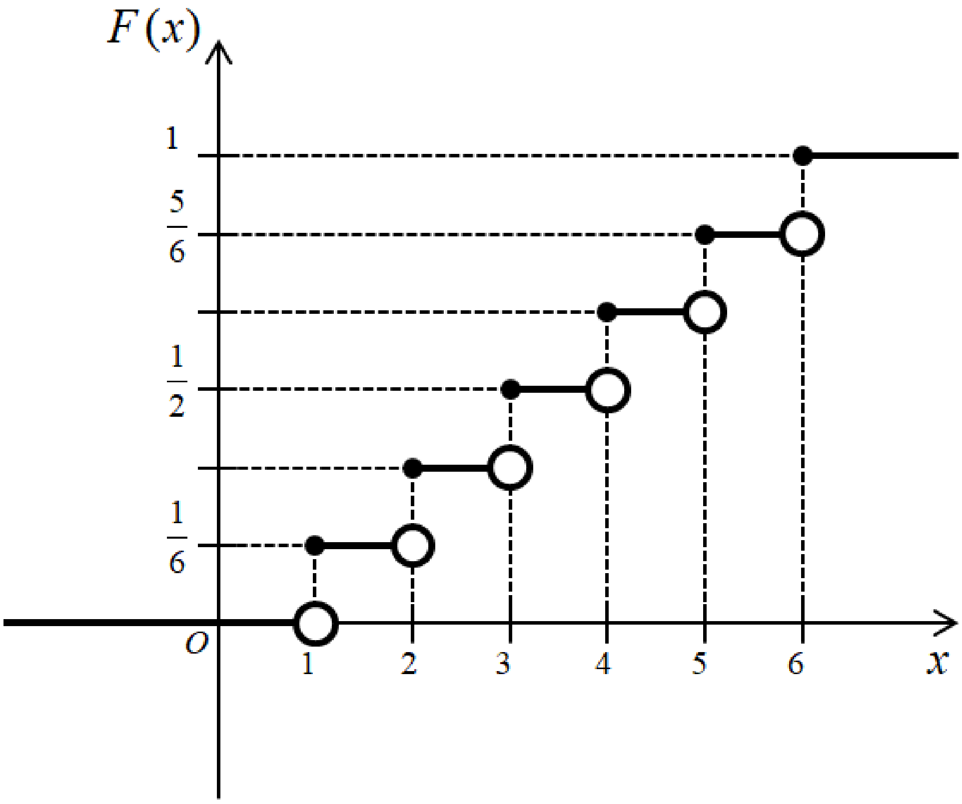

Рис. 5. График функции распределения числа очков, выпавших на кубике

Непрерывную случайную величину можно задать не только с помощью функции распределения вероятностей $F(x)$, но и с помощью плотности распределения вероятностей $f(x)$ (если $F(x)$ дифференцируема):

$$f(x) = F'(x).$$

Свойства плотности распределения вероятностей:

1. $f(x) \geq 0$;

2. $P\left(x_1 < X \leq x_2\right) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$;

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Для дискретных случайных величин плотность распределения вероятностей не существует.

Числовые характеристики случайных величин

Знание закона распределения случайной величины дает о ней полную информацию. Но этот закон не всегда удается составить, да и в некоторых случаях он не нужен. Бывает достаточно охарактеризовать случайную величину некоторыми числами. Такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины. Основные числовые характеристики – это математическое ожидание случайной величины X – $M\left(X\right)$ и дисперсия $D\left(X\right)$.

Дискретная случайная величина

Математическое ожидание дискретной случайной величины X определяется по формуле:

$$M\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Дисперсия дискретной случайной величины X определяется по формуле:

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2.$$

На практике часто используют преобразованную формулу для дисперсии:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ – среднеквадратическое (стандартное) отклонение.

Пример.

Вычислим $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$ для случайной величины X – «число очков, выпавших на кубике».

Поскольку закон распределения случайной величины X имеет вид

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

то $M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=3.5;$

Чтобы вычислить $D(X)$, найдем $M\left(X^2\right)$.

$M\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{6}x_i^2 p_i=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}\approx 15.2;$

Тогда $D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=\frac{91}{6}-\frac{21}{6}=\frac{70}{6}\approx 11.7.$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{70}{6}}\approx 3.4.$

Математическое ожидание случайной величины является аналогом среднего (среднего арифметического), то есть такого значения, которое теоретически должно ожидаться у данной случайной величины. Например: если X – контролируемый параметр выпускаемых изделий, то $M(X)$ – ГОСТ.

Поскольку у случайных величин могут быть одинаковые математические ожидания, то для их сравнения вводится еще одна числовая характеристика, называемая дисперсией. Дисперсия показывает разброс значений случайной величины вокруг ее среднего (математического ожидания). Чем больше дисперсия, тем больше разброс, и тем менее информативно математическое ожидание. Чем меньше дисперсия, тем разброс меньше, и тем более прогнозируемы возможные значения случайной величины.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Если $X \geq 0$, то $M(X) \geq 0$;

2. $M(aX + bY) = aM(X) + bM(Y),\ a,b - const$;

3. Если $X \geq Y$, то $M(X) \geq M(Y)$;

4. $|M(X)| \leq M(|X|)$;

5. Если X, Y независимы, то $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. $D(X) \geq 0$;

2. $D(a) = 0,\ a - const$;

3. $D(aX) = a^2 D(X)$;

4. Если X, Y независимы, то $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Свойства математического ожидания и дисперсии распространяются и на дискретную, и на непрерывную случайные величины.

Непрерывная случайная величина

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx.$$

На практике часто используют преобразованную формулу для дисперсии:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\right)^2.$$

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ – среднеквадратическое (стандартное) отклонение.

Пример.

Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ \dfrac{x}{2}, \text{ при } 0\le x<2\\ 1, \text{ при } x\ge 2\end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$.

Плотность распределения вероятностей $f(x)$ найдем по формуле $f(x)=F'(x)$.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}(0)', \text{ при } x<0\\ \left(\dfrac{x}{2}\right)', \text{ при } 0\le x<2\\ (1)', \text{ при } x\ge 2\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ \dfrac{1}{2}, \text{ при } 0\le x<2\\ 0, \text{ при } x\ge 2\end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)$ найдем по формуле $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx.$

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2=1.$$

Дисперсию $D(X)$ найдем по формуле $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right)^2$.

$$D(X)=\int\limits_0^2 x^2\frac{1}{2}dx-(1)^2=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}.$$

Стандартное отклонение $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Из колоды 36 карт вынимаются три карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт два короля и шестерка.

Решение:

Воспользуемся формулой классической вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m - число исходов, благоприятствующих искомому событию A, а n - общее число возможных исходов.

В условиях нашей задачи общее число исходов равняется количеству способов вынуть какие-то 3 карты из 36, то есть общее число исходов — это количество сочетаний из 36 элементов по 3:

$$n = C_{36}^3 = \frac{36!}{3!\cdot(36-3)!} = \frac{36!}{3!\cdot 33!}.$$

Выбрать 2 короля из 4, имеющихся в колоде, можно C_4^2 способами. Выбрать 1 шестерку из 4, имеющихся в колоде, можно C_4^1 способами. Тогда число исходов, благоприятствующих событию A «среди вынутых карт два короля и шестерка», есть:

$$m = C_4^2 \cdot C_4^1 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{4!}{1!\cdot 3!}.$$

То есть, искомая вероятность будет равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2 \cdot C_4^1}{C_{36}^3} = \frac{4!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 33!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 3!\cdot 36!} = \frac{2}{595} \approx 0{,}003.$$

Примечание: $k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k,$ где $k \in \mathbb{N};\ 0! = 1.$

Ответ: $P(A) = 0{,}003.$

Задание 2. В ящике 10 деталей, из которых 3 окрашены. Сборщик наудачу взял 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

Решение:

Воспользуемся формулой классической вероятности:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m - число исходов, благоприятствующих искомому событию A, а n - общее число возможных исходов.

В условиях нашей задачи общее число исходов равняется количеству способов взять какие-то 2 детали из 10 деталей, то есть общее число исходов — это количество сочетаний из 10 элементов по 2:

$$n=C_{10}^{2}=\frac{10!}{2!\cdot(10-2)!}=\frac{10!}{2!\cdot 8!}.$$

Событие A «хотя бы одна из взятых деталей окрашена» образует полную группу с событием $\bar{A}$ «ни одна из взятых деталей не окрашена». Поэтому, чтобы найти вероятность взять хотя бы одну окрашенную деталь, нужно из единицы вычесть вероятность того, что все взятые детали не окрашены:

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{m_{\bar{A}}}{n}.$$

Количество способов взять 2 неокрашенные детали из 7 имеющихся неокрашенных (7=10-3) равно C_7^2.

Тогда число исходов, благоприятствующих событию $\bar{A}$ «ни одна из взятых деталей не окрашена», есть:

$$m_{\bar{A}}=C_7^2=\frac{7!}{2!\cdot 5!}.$$

Таким образом, искомая вероятность будет равна:

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{m_{\bar{A}}}{n}=1-\frac{7!\cdot 2!\cdot 8!}{2!\cdot 5!\cdot 10!}=1-\frac{42}{90}=\frac{8}{15}\approx 0{,}53.$$

Примечание: $k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k,$ где $k\in\mathbb{N};\ 0!=1.$

Ответ: $P(A)=0,53.$

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 6 белых и 5 черных шаров, во второй – 7 белых и 4 черных шара, в третьей – 8 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

Решение:

Воспользуемся формулой полной вероятности:

$$P(A)=\sum_i P\left(A\middle|B_i\right)\cdot P(B_i).$$

В условиях нашей задачи формула примет вид:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3} P\left(A\middle|B_i\right)\cdot P(B_i)=P\left(A\middle|B_1\right)\cdot P(B_1)+P\left(A\middle|B_2\right)\cdot P(B_2)+P\left(A\middle|B_3\right)\cdot P(B_3),$$

где $P\left(A\middle|B_1\right)=\dfrac{6}{11}$ – вероятность вынуть белый шар при условии, что извлечение происходит из первой урны;

$P\left(A\middle|B_2\right)=\dfrac{7}{11}$ – вероятность вынуть белый шар при условии, что извлечение происходит из второй урны;

$P\left(A\middle|B_3\right)=\dfrac{8}{8}=1$ – вероятность вынуть белый шар при условии, что извлечение происходит из третьей урны;

$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\dfrac{1}{3}$ – вероятность выбрать соответственно первую, вторую или третью урну с шарами.

Таким образом, искомая вероятность будет равна:

$$P(A)=P\left(A\middle|B_1\right)\cdot P(B_1)+P\left(A\middle|B_2\right)\cdot P(B_2)+P\left(A\middle|B_3\right)\cdot P(B_3)=$$

$$=\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{11}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{11}.$$

Ответ: $P(A)=\dfrac{8}{11}$.

Задание 4. Одна из двух станций передает сообщение. Вероятность выбора первой станции для передачи сообщения равна 0.3, вероятность выбора второй станции для передачи сообщения равна 0.7. Вероятность передачи сообщения без помех первой станцией равна 0.6, вероятность передачи сообщения без помех второй станцией равна 0.9. Сообщение было передано без помех. Найти вероятность, что сообщение было передано второй станцией.

Решение:

Воспользуемся формулой Байеса:

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P\left(A|B_i\right)\cdot P(B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P\left(A|B_i\right)\cdot P(B_i)}.$$

В условиях нашей задачи формула примет вид:

$$P(B_2|A)=\frac{P\left(A|B_2\right)\cdot P(B_2)}{\sum\limits_{i=1}^{2}P\left(A|B_i\right)\cdot P(B_i)}=\frac{P\left(A|B_2\right)\cdot P(B_2)}{P\left(A|B_1\right)\cdot P(B_1)+P\left(A|B_2\right)\cdot P(B_2)},$$

где $P(B_2|A)$ – вероятность того, что сообщение передала вторая станция, при условии, что сообщение было передано без помех;

$P\left(A|B_1\right)=0.6$ – вероятность того, что сообщение было передано без помех, при условии, что сообщение передала первая станция;

$P\left(A|B_2\right)=0.9$ – вероятность того, что сообщение было передано без помех, при условии, что сообщение передала вторая станция;

$P\left(B_1\right)=0.3$ – вероятность того, что для передачи сообщения была выбрана первая станция;

$P\left(B_2\right)=0.7$ – вероятность того, что для передачи сообщения была выбрана вторая станция.

Таким образом, искомая вероятность будет равна:

$$P(B_2|A)=\frac{P\left(A|B_2\right)\cdot P(B_2)}{P\left(A|B_1\right)\cdot P(B_1)+P\left(A|B_2\right)\cdot P(B_2)}=\frac{0.9\cdot 0.7}{0.6\cdot 0.3+0.9\cdot 0.7}=\frac{63}{81}=\frac{7}{9}\approx 0.78.$$

Ответ: $P(B_2|A)=\frac{7}{9}$.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	-1	0	1	2
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P\left(-1\le X<2\right)$.

Решение:

Найдем функцию распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<-1\\ 0.1, \text{ при } -1\le x<0\\ 0.1+0.2=0.3, \text{ при } 0\le x<1\\ 0.3+0.3=0.6, \text{ при } 1\le x<2\\ 0.6+0.4=1, \text{ при } x\ge 2\end{cases}$$

То есть функция распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<-1\\ 0.1, \text{ при } -1\le x<0\\ 0.3, \text{ при } 0\le x<1\\ 0.6, \text{ при } 1\le x<2\\ 1, \text{ при } x\ge 2\end{cases}$$

Построим график $F(x)$ (рис.6):

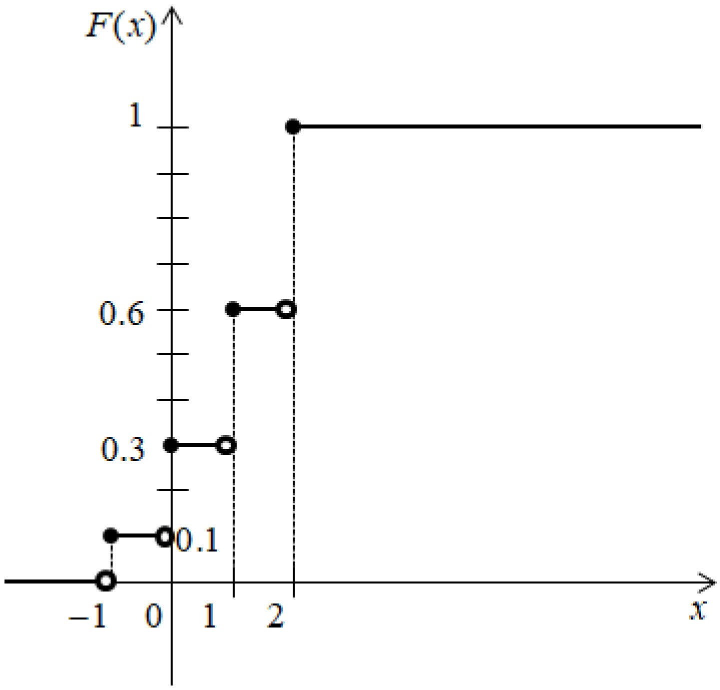

Рис. 6. График функции распределения случайной величины X

Вычислим математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot p_i=-1\cdot 0.1+0\cdot 0.2+1\cdot 0.3+2\cdot 0.4=1.$$

Вычислим дисперсию $D(X)$.

Формула: $D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2$.

$$M\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2\cdot p_i=(-1)^2\cdot 0.1+0^2\cdot 0.2+1^2\cdot 0.3+2^2\cdot 0.4=2.$$

$$\left(M(X)\right)^2=1^2=1.$$

Значит, $D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=2-1=1.$

Вычислим стандартное отклонение $\sigma(X)$:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1}=1.$$

Вычислим вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал:

$$P\left(-1\le X<2\right)=P\left(X=-1\right)+P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=0.6.$$

Ответ: $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<-1\\ 0.1, \text{ при } -1\le x<0\\ 0.1+0.2=0.3, \text{ при } 0\le x<1\\ 0.3+0.3=0.6, \text{ при } 1\le x<2\\ 0.6+0.4=1, \text{ при } x\ge 2\end{cases}$, $M(X)=1$, $D(X)=1$, $\sigma(X)=1$, $P(-1\le X<2)=0.6$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ x^2, \text{ при } 0\le x<1\\ 1, \text{ при } x\ge 1\end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$. Найти $P\left(\frac{1}{2}<X<1\right)$.

Решение:

Плотность распределения вероятностей $f(x)$ найдем по формуле $f(x)=F'(x)$.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}(0)', \text{ при } x<0\\ \left(x^2\right)', \text{ при } 0\le x<1\\ (1)', \text{ при } x\ge 1\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ 2x, \text{ при } 0\le x<1\\ 0, \text{ при } x\ge 1\end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)$ найдем по формуле $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

$$M(X)=\int\limits_0^1 x\cdot 2xdx=2\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}.$$

Дисперсию $D\left(X\right)$ найдем по формуле $D\left(X\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\right)^2$.

$$D\left(X\right)=\int\limits_{0}^{1}x^2\cdot 2xdx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

Стандартное отклонение $\sigma\left(X\right)=\sqrt{D\left(X\right)}=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{18}}{18}$.

Вычислим вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал:

$$P\left(\frac{1}{2}<X<1\right)=\int\limits_{1/2}^{1}f(x)dx=\int\limits_{1/2}^{1}2xdx=\frac{3}{4}.$$

<u>Ответ:</u> $f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ 2x, \text{ при } 0\le x<1,\\ 0, \text{ при } x\ge 1\end{cases}$ $M(X)=\frac{2}{3}$, $D(X)=\frac{1}{18}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{18}}{18}$,

$P\left(\frac{1}{2}<X<1\right)\frac{3}{4}$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

Задание 1. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Наудачу вынимаются четыре карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт два туза, валет и шестерка.

Задание 2. Имеется пачка из 30 лотерейных билетов, среди которых 5 выигрышных. Наудачу берут 3 билета. Найти вероятность того, что хотя бы один из них выигрышный.

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 5 белых и 5 черных шаров, во второй – 8 белых и 4 черных шара, в третьей – 9 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

Задание 4. Одна из двух станций связи передает сообщение. Вероятность выбрать первую станцию для передачи сообщения равна 0.6, вероятность выбрать вторую станцию для передачи сообщения равна 0.4. Для первой станции вероятность передать сообщение без помех равна 0.8, для второй станции вероятность передать сообщение без помех равна 0.9. Сообщение было передано без помех. Найти вероятность, что сообщение передала первая станция.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	3	5	7	9
p_i	0.2	0.3	0.2	0.3

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P(3 < X \le 7)$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ \dfrac{x^2}{4}, \text{ при } 0\le x<2\\ 1, \text{ при } x\ge 2\end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$. Найти $P(1<X<2)$.

ВАРИАНТ 2

Задание 1. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт две десятки и валет.

Задание 2. В ящике 20 деталей, из которых 5 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 6 черных шаров, во второй – 3 белых и 5 черных шара, в третьей – 9 черных шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется черным.

Задание 4. Три дальнобойных орудия произвели залп по цели, в результате которого два снаряда попали в цель. Вероятности попасть в цель для каждого из трех орудий соответственно равны 0.7, 0.9, 0.8. Найти вероятность, что третье орудие поразило цель.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P(2\le X<9)$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ \dfrac{x^2}{9}, \text{ при } 0\le x<3\\ 1, \text{ при } x\ge 3\end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$. Найти $P\left(\frac{3}{2}<X<3\right)$.

ВАРИАНТ 3

Задание 1. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт хотя бы один валет.

Задание 2. Среди 100 лотерейных билетов есть 3 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 5 черных, во второй – 5 белых и 4 черных, в третьей – 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

Задание 4. Имеются четыре работающих независимо друг от друга устройства. Вероятности отказа каждого устройства в единицу времени соответственно равны 0.1, 0.4, 0.3, 0.2. Два устройства отказали. Найти вероятность, что отказали первое и второе устройства.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	2	4	6	8
p_i	0.3	0.25	0.2	0.25

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P\left(6 \le X \le 8\right)$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{16}, \text{ при } 0 \le x < 4 \\ 1, \text{ при } x \ge 4 \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M\left(X\right)$, дисперсию $D\left(X\right)$ и стандартное отклонение $\sigma\left(X\right)$. Найти $P\left(2 < X < 4\right)$.

ВАРИАНТ 4

Задание 1. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт два туза и дама.

Задание 2. В урне находится 10 деталей из них 7 стандартных. Наудачу берут 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна деталь окажется стандартной.

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 5 черных, во второй – 5 белых и 4 черных, в третьей – 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется черным.

Задание 4. В нестандартных условиях проводится эксперимент. Для его проведения необходимо выбрать одну из двух инструкций. Вероятность выбрать любую из двух инструкций равна 0.5. Вероятность успешно завершить эксперимент, выбрав первую инструкцию, равна 0.9, вероятность успешно завершить эксперимент, выбрав вторую инструкцию, равна 0.8. Эксперимент завершился успешно. Найти вероятность, что для проведения эксперимента была выбрана вторая инструкция.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	1	4	6	7
p_i	0.2	0.3	0.4	0.1

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P(1 < X < 7)$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{25}, \text{ при } 0 \le x < 5 \\ 1, \text{ при } x \ge 5 \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$. Найти $P\left(\dfrac{5}{2} < X < 5\right)$.

ВАРИАНТ 5

Задание 1. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Наудачу вынимаются пять карт. Найти вероятность, что среди вынутых карт три семерки, валет и дама.

Задание 2. В ящике 10 деталей, из которых 3 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров, во второй – 5 белых и 5 черных шаров, в третьей – 8 черных шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется черным.

Задание 4. Одна из двух станций связи передает сообщение. Вероятность выбрать первую станцию для передачи сообщения равна 0.4, вероятность выбрать вторую станцию для передачи сообщения равна 0.6. Для первой станции вероятность передать сообщение без помех равна 0.7, для второй станции вероятность передать сообщение без помех равна 0.8. Сообщение было передано без помех. Найти вероятность, что сообщение передала первая станция.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	6	7	8	9
p_i	0.15	0.4	0.15	0.3

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P(6 \le X < 8)$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{36}, \text{ при } 0 \le x < 6 \\ 1, \text{ при } x \ge 6 \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$. Найти $P(3 < X < 6)$.

ВАРИАНТ 6

Задание 1. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Наудачу вынимаются четыре карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт три семерки и валет.

Задание 2. В урне находится 10 деталей из них 5 стандартных. Наудачу берут 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна деталь окажется стандартной.

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 8 белых и 2 черных шара, во второй – 6 белых и 2 черных шара, в третьей – 9 черных шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

Задание 4. Три дальнобойных орудия произвели залп по цели, в результате которого два снаряда попали в цель. Вероятности попасть в цель для каждого из трех орудий соответственно равны 0.5, 0.7, 0.6. Найти вероятность, что первое орудие поразило цель.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	3	4	6	8
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P(3 < X \le 6)$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ \frac{x^2}{49}, \text{ при } 0 \le x < 7 \\ 1, \text{ при } x \ge 7 \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$. Найти $P\left(\frac{7}{2} < X < 7\right)$.

ВАРИАНТ 7

Задание 1. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт окажется хотя бы один туз.

Задание 2. В конверте среди 100 фотографий находится 1 разыскиваемая. Из конверта наудачу извлекают 10 фотографий. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 5 белых и 7 черных, во второй – 3 белых и 4 черных, в третьей – 6 черных шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется черным.

Задание 4. Имеются четыре работающих независимо друг от друга устройства. Вероятности отказа каждого устройства в единицу времени соответственно равны 0.2, 0.1, 0.5, 0.3. Два устройства отказали. Найти вероятность, что отказали третье и четвертое устройства.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	-3	-2	-1	1
p_i	0.1	0.4	0.15	0.35

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P(-3 \le X < 1)$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{64}, \text{ при } 0 \le x < 8 \\ 1, \text{ при } x \ge 8 \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$. Найти $P(4 < X < 8)$.

ВАРИАНТ 8

Задание 1. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт три туза.

Задание 2. В урне находится 20 деталей из них 9 стандартных. Наудачу берут 5 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна деталь окажется стандартной.

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 8 черных, во второй – 5 белых и 4 черных, в третьей – 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

Задание 4. В нестандартных условиях проводится эксперимент. Для его проведения необходимо выбрать одну из двух инструкций. Вероятность выбрать первую инструкцию равна 0.4, вероятность выбрать вторую инструкцию равна 0.6. Вероятность успешно завершить эксперимент, выбрав первую инструкцию, равна 0.9, вероятность успешно завершить эксперимент, выбрав вторую инструкцию, равна 0.8. Эксперимент завершился успешно. Найти вероятность, что для проведения эксперимента была выбрана первая инструкция.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	1	2	3	5
p_i	0.25	0.25	0.3	0.2

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P(1 < X < 3)$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ \dfrac{x^2}{81}, \text{ при } 0\le x<9\\ 1, \text{ при } x\ge 9\end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$. Найти $P\left(\frac{9}{2}<X<9\right)$.

ВАРИАНТ 9

Задание 1. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Наудачу вынимаются четыре карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт туз, две дамы и шестерка.

Задание 2. В урне содержится 10 черных и 8 белых шаров. Случайным образом вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один белый шар.

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 5 белых и 9 черных, во второй – 2 белых и 1 черный, в третьей – 4 белых шара. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым.

Задание 4. Одна из двух станций связи передает сообщение. Вероятность выбрать любую из двух станций равна 0.5. Для первой станции вероятность передать сообщение без помех равна 0.95, для второй станции вероятность передать сообщение без помех равна 0.8. Сообщение было передано без помех. Найти вероятность, что сообщение передала первая станция.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	-2	-1	1	2
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P(-2 < X < 2)$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x<0\\ \dfrac{x^2}{100}, \text{ при } 0\le x<10\\ 1, \text{ при } x\ge 10\end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$. Найти $P(5 < X < 10)$.

ВАРИАНТ 10

Задание 1. Имеется колода, состоящая из 36 карт. Наудачу вынимаются три карты. Найти вероятность, что среди вынутых карт валет, дама и король.

Задание 2. В ящике 20 деталей, из которых 7 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

Задание 3. Имеются три урны с шарами. В первой урне 5 белых и 5 черных, во второй – 5 белых и 8 черных, в третьей – 4 белых шара. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется черным.

Задание 4. В нестандартных условиях проводится эксперимент. Для его проведения необходимо выбрать одну из двух инструкций. Вероятность выбрать любую из двух инструкций равна 0.5. Вероятность успешно завершить эксперимент, выбрав первую инструкцию, равна 0.95, вероятность успешно завершить эксперимент, выбрав вторую инструкцию, равна 0.85. Эксперимент завершился успешно. Найти вероятность, что для проведения эксперимента была выбрана вторая инструкция.

Задание 5. Случайная величина X задана рядом распределения

x_i	6	7	8	9
p_i	0.4	0.3	0.2	0.1

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X и построить ее график. Вычислить для X математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. Найти $P(6 < X \leq 8)$.

Задание 6. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{121}, \text{ при } 0 \leq x < 11 \\ 1, \text{ при } x \geq 11 \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и стандартное отклонение $\sigma(X)$. Найти $P\left(\dfrac{11}{2} < X < 11\right)$.

Задания для самоконтроля

1. Дайте определение события. Назовите основные операции над событиями.
2. Сформулируйте классическое определение вероятности события.
3. Перечислите свойства вероятности события.
4. Сформулируйте теорему сложения.
5. Приведите формулы для числа перестановок, размещений и сочетаний без повторений.
6. Приведите формулы для числа перестановок, размещений и сочетаний с повторениями.
7. Приведите формулу для вычисления условной вероятности.
8. Приведите формулу полной вероятности.
9. Приведите формулу Байеса.
10. Приведите формулы для вычисления $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$ дискретной случайной величины.
11. Приведите формулы для вычисления $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины.
12. Перечислите основные свойства математического ожидания $M(X)$.
13. Перечислите основные свойства дисперсии $D(X)$.

Литература

Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для вузов / В.Е. Гмурман. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 406 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08389-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/468330. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В.Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 479 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00211-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/468331. Режим доступа: для авториз. пользователей.

Полещук О.М., Комаров Е.Г. Типовые задачи по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов: практикум. — М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2014. – 192 с.

Полещук О.М. Основные понятия теории вероятностей: учебно-методическое пособие / О.М. Полещук. — Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020. — 44 с. — ISBN 978-5-7038-5436-5. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/205379. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Полещук О.М. Основы теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов: учеб. пособие. М: ГОУ ВПО МГУЛ, 2012. 256 с.

Полещук О.М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-метод. пособие. М: ГОУ ВПО МГУЛ, 2015. 102 с.

Ширяев А.Н. Вероятность: учеб. пособие / Ширяев А.Н. - М.: Наука, 1980. - 574 с. - Библиогр.: с. 566-568.