Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

О.М. Полещук, С.В. Тумор

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва 2023

УДК 517.2

ББК 22.161.1

Издание доступно в электронном виде по адресу

https://ebooks.bmstu.press/catalog/

Факультет «Космический»

Кафедра «Высшая математика и физика» (К-6 МФ)

Рекомендовано Научно-методическим советом МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия

Рецензент:

профессор А.В. Корольков

Полещук, О.М.

Основные понятия дифференциального исчисления. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов / О.М. Полещук, С.В. Тумор – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023. –52 с.

В учебном издании представлены учебно-методические и справочные материалы для подготовки к контрольной работе по модулю «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» дисциплины «Математика». Приведены типовые варианты контрольной работы с подробным указанием способов решения всех задач.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров направления подготовки 35.03.01 «Лесное дело».

УДК 517.2

ББК 22.161.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Учебно-методическое пособие является учебным изданием, содержащим учебно-методические и справочные материалы для подготовки к контрольной работе по модулю «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» дисциплины «Математика».

В пособии приведены базовые теоретические сведения о функциях, их графиках, способах задания функций, а также основные характеристики функций. Рассмотрены обратные и сложные функции. Приведены базовые теоретические сведения о пределе функции, а также основные теоремы о пределах. Сформулированы определения бесконечно малой функции (б.м.ф.) и эквивалентной бесконечно малой функции, даны основные теоремы о б.м.ф. Сформулированы понятия непрерывной функции, точек разрыва функции и дана классификация точек разрыва. Рассмотрены производные функций одной переменной. Приведены правила дифференцирования с примерами и таблица основных производных. Сформулировано правило Лопиталя. Приведены необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции, а также необходимые и достаточные условия существования экстремумов функции. Даны определения выпуклости и вогнутости графика функции, сформулировано достаточное условие существования точек перегиба графика функции. Сформулировано понятие асимптоты графика функции. После основных теоретических сведений приведены пример решения типового варианта контрольной работы по модулю «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» и варианты заданий контрольной работы. Завершают пособие вопросы и задания для самоконтроля и список рекомендуемой литературы.

Ключевые слова: функция, предел функции, эквивалентная бесконечно малая функция, производная, правило Лопиталя, таблица производных, уравнение касательной, уравнение нормали, экстремум, точка перегиба, асимптота, исследование функции.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров направления подготовки:

35.03.01 Лесное дело.

Цель издания – оказание помощи студентам при подготовке к контрольной работе по модулю «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» дисциплины «Математика».

Проработав учебно-методическое пособие, студенты смогут:

- выполнять основные арифметические операции над пределами, в том числе при решении задач профессионального поля деятельности;
- опираясь на теоретические положения и суть решаемой задачи, находить пределы функций различными способами;
- применять приобретенные навыки работы с функциями для моделирования профессиональных задач;
- опираясь на теоретические положения и суть решаемой задачи, находить производные функций различными способами;
- применять приобретенные навыки работы с производными функций для моделирования профессиональных задач;
- проводить полное исследование функции для выявления всех ее существенных характеристик.

Для изучения модуля «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» дисциплины «Математика» необходимы знания, полученные при изучении «школьного» курса математики.

Теоретические и практические задания, изложенные в данном пособии, будут способствовать овладению студентами компетенциями, предусмотренными образовательной программой. Проработка учебно-методического пособия позволит студентам:

ЗНАТЬ

- основные понятия, законы и методы математических и естественных наук, необходимые для решения типовых профессиональных задач.

УМЕТЬ

- использовать основные математические и естественнонаучные приемы решения типовых профессиональных задач.

Функция. Понятие функции

Одним из основных понятий математики является понятие функции. Оно связано с установлением взаимосвязи между элементами двух множеств. *Множеством* называется совокупность некоторых объектов, объединенных общим признаком.

Пусть заданы два непустых множества X и Y. Соответствие f, отображающее элементы множества X на элементы множества Y, называется *функцией*. Если в соответствие каждому элементу $x \in X$ ставится один и только один элемент $y \in Y$, то *функция называется однозначной* и записывается как $y = f(x), x \in X$ или $f: X \to Y$. Также говорят, что функция f *отображает* множество X на множество Y. Если допустить, что каждому элементу $x \in X$ соответствует не один элемент $y \in Y$, а несколько, то функция $y = f(x), x \in X$ называется *многозначной функцией*.

Пусть задана функция $f: X \to Y$.

В общем случае функция f называется *числовой функцией*, если она принимает числовые значения. Будем считать, что элементами множеств X и Y являются действительные числа. В дальнейшем будем рассматривать только такие числовые функции и обозначать их $y = f(x)$.

При этом переменную x будем называть *аргументом* функции или независимой переменной, а y – *функцией* или зависимой переменной (значения y зависят от значений x). Про величины x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*. Иногда, чтобы показать функциональную зависимость y от x, вместо $y = f(x)$ пишут $y = y(x)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy таких, что каждому значению аргумента x соответствует некоторое значение функции y.

Например, функциями являются следующие выражения $f(x)=x^2$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x^2+y^2=1$ (рис.1, 2).

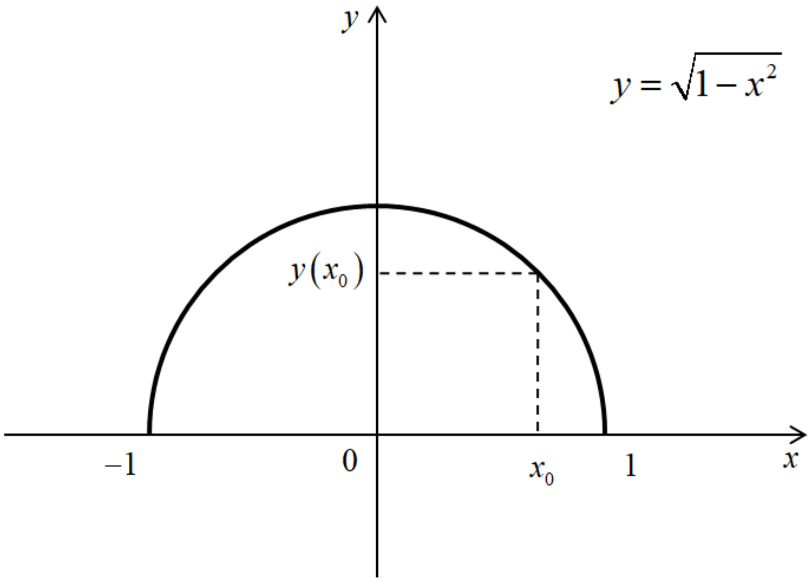

Рис.1. График функции $y=\sqrt{1-x^2}$

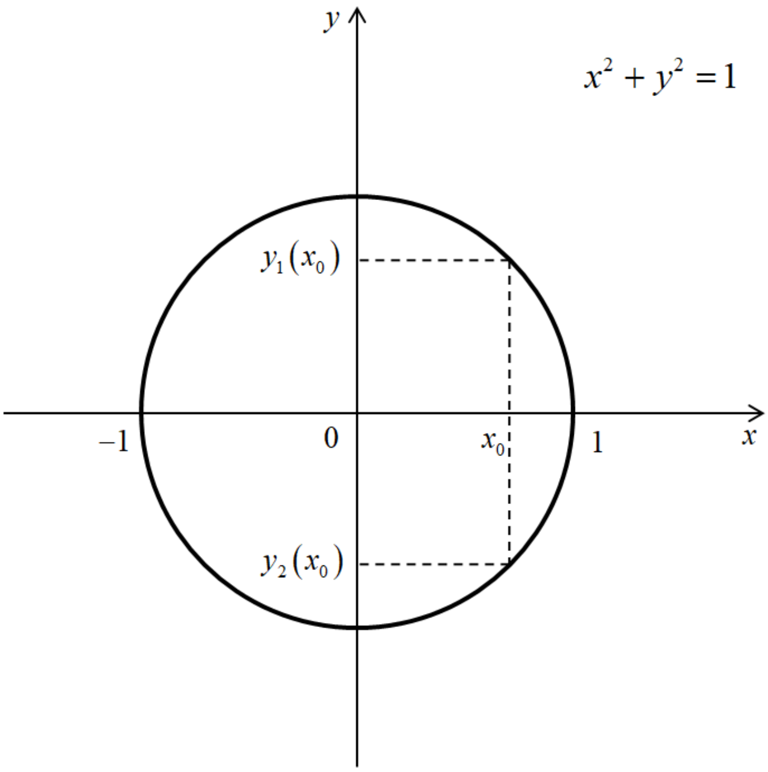

Рис.2. График многозначной функции $x^2+y^2=1$

Областью определения функции f называется множество X, обозначают область определения как $D(f)$ (или $D(y)$). *Областью значений* функции f называется множество всех $y \in Y$, обозначают область значений как $E(f)$ (или $E(y)$).

Например, для функции $y=\sqrt{1-x^2}$ $1-x^2 \geq 0$, значит областью определения будет являться промежуток $[-1;\ 1]$, то есть $D(y)=[-1;\ 1]$. По графику на рисунке 1 видно, что областью значений функции $y=\sqrt{1-x^2}$ является промежуток $[0;\ 1]$, то есть $E(y)=[0;\ 1]$.

Значение функции $f(x)$ при $x=a$ называется *частным значением* функции, записывают: $f(a)$.

Пример.

Если $f(x)=3x^2-x$ и $x=1$, то $f(1)=2$.

Способы задания функций

Для того, чтобы задать функцию $y=f(x)$, нужно указать правило, согласно которому, зная x, будет возможно найти соответствующее значение y.

Наиболее распространены три способа задания функции: аналитический, табличный и графический.

Аналитический способ: $f(x)$ задается в виде одной или нескольких формул.

Пример.

1. $f(x)=3x^2-x$;

2. $y=\begin{cases} x+2 \text{ при } x \leq 1, \\ x^3+1 \text{ при } x>1. \end{cases}$

Табличный способ: функция задается таблицей, в которой каждому значению аргумента x соответствует некоторое значение функции y.

Зачастую таблицы значений получают опытным путем или в результате наблюдений.

Графический способ: функция задается с помощью своего графика.

Если известен аналитический вид функции, то можно задать ее табличный и графический виды. Если известен табличный вид функции, то не всегда можно определить ее аналитический и графический виды, иногда это можно сделать только приближенно. Если известен графический вид функции, то не всегда можно задать ее аналитический вид.

Основные характеристики функции

Четной называется функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, такая что $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$.

Нечетной называется функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, такая что $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

Функцию, не являющуюся ни четной, ни нечетной, называют *функцией общего вида*.

У четной функции график симметричен относительно оси Oy, у нечетной – относительно начала координат.

Пример.

Определить четная функция, нечетная или общего вида.

$f(x) = x \cdot \sin x.$

Функция определена при любом x. Поскольку $f(-x) = -x \cdot \sin(-x) = x \cdot \sin x$, то есть $f(-x) = f(x)$, значит $f(x) = x \cdot \sin x$ – четная функция.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве D и пусть $D_1 \in D$. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на множестве D_1, если для любых значений аргументов $x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей* на множестве D_1, если для любых значений аргументов $x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на множестве D_1, если для любых значений аргументов $x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *невозрастающей* на множестве D_1, если для любых значений аргументов $x_1, x_2 \in D_1$ из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие на множестве D_1 функции называются *монотонными* на этом множестве, а возрастающие и убывающие – *строго монотонными*. Интервалы, на которых функция монотонна, называются *интервалами монотонности*.

Ограниченной называется функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, такая, что существует число $M > 0$, такое что $\forall x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$.

Периодической называется функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, такая, что существует число $T > 0$, такое что $\forall x \in D$ значение $(x+T) \in D$ и $f(x+T) = f(x)$. Число T называют *периодом* функции.

Обратная функция. Сложная функция

Пусть дана функция $y = f(x)$ с областью определения D и областью значений E. Функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве E, называется *обратной* к функции $y = f(x)$, если каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$. Записывают обратную функцию в виде $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$, называют взаимно обратными. Для того чтобы найти функцию $x = \varphi(y)$, нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x (если это возможно).

Пример.

Найти функцию, обратную к функции $y = 3x$.

Решая уравнение относительно x, получаем $x = \dfrac{1}{3}y$ – функция обратная к исходной.

Из определения обратной функции следует, что функция $y = f(x)$ имеет обратную только тогда, когда функция $f(x)$ задает взаимно однозначное соответствие между множествами D и E. Поэтому любая *строго монотонная функция имеет обратную*. При этом из возрастания (убывания) исходной функции следует возрастание (убывание) функции обратной к ней.

Если у функции $x = \varphi(y)$ переобозначить переменную x как y, а y переобозначить как x, то функция обратная к функции $y = f(x)$ запишется в виде $y = \varphi(x)$.

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ *и* $y = \varphi(x)$ *симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов* (рис.3).

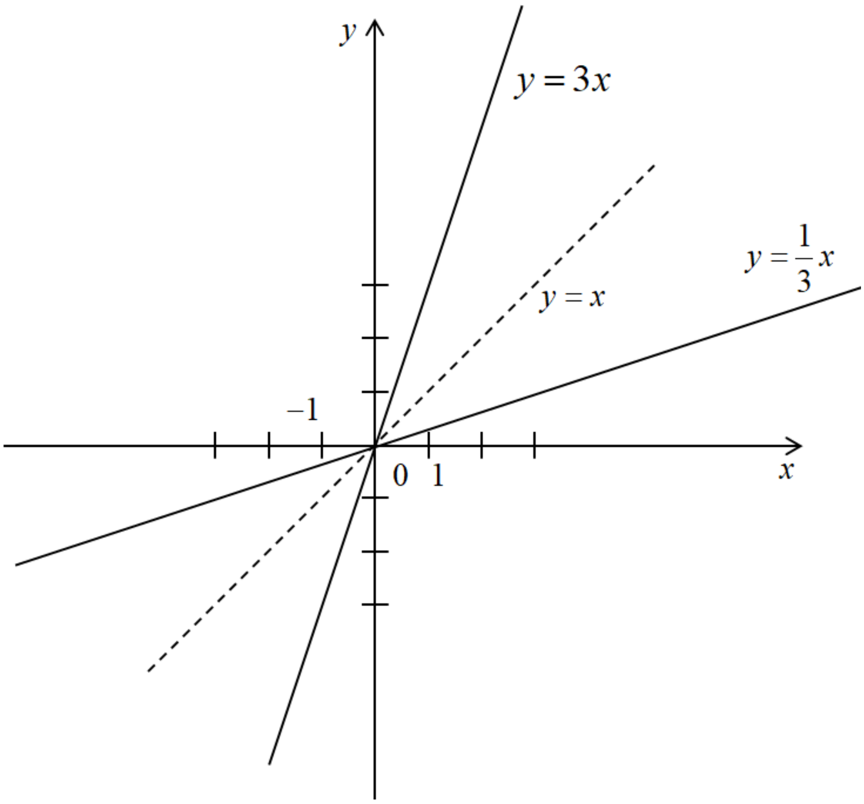

Рис.3. Графики взаимно обратных функций $y = 3x$ и $y = \frac{1}{3}x$

Пусть дана функция $y = f(u)$, определенная на множестве D, и функция $u = \varphi(x)$, определенная на множестве D_1, причем для $\forall x \in D_1$ соответствующее значение $u = \varphi(x) \in D$. Тогда функцию $y = f\left(\varphi(x)\right)$, определенную на множестве D_1, называют *сложной функцией* от x (или *суперпозицией* заданных функций, или *функцией от функции*).

Переменная $u = \varphi(x)$ называется промежуточным аргументов сложной функции.

Например, $y = \cos 5x$ есть сложная функция, в которой $y = \cos u$ и $u = 5x$. Сложная функция может иметь более одного промежуточного аргумента.

Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Дадим два эквивалентных определения предела функции в точке.

Определение 1 (на «языке последовательностей» или по Гейне). Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности допустимых значений $x_n,\ n \in \mathbb{N}\ (x_n \neq x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n),\ n \in \mathbb{N}$, сходится к числу A.

В таком случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Определение 2 (на «языке ε-δ» или по Коши). Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x_n \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В этом случае также пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Определение 2 коротко можно записать так:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Так как величина числа δ зависит от выбора числа ε, то пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Односторонние пределы

Определяя предел функции как $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, считают, что x стремится к точке x_0 любым из трех способов: слева от x_0 (оставаясь меньшим, чем x_0), справа от x_0 (оставаясь большим, чем x_0) или колеблясь около x_0.

Но для некоторых функций значение предела зависит от того, каким именно способом x приближается к x_0. В связи с этим вводят понятия *односторонних пределов*.

Пределом функции $y = f(x)$ *слева* в точке x_0 называется такое число A_1, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $x \in (x_0 - \delta;\, x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Записывают предел слева как $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ (читается как x стремится к x_0 слева).

Определение предела слева коротко можно записать так:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in (x_0 - \delta;\, x_0) \Rightarrow |f(x) - A_1| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1.$$

Пределом функции $y = f(x)$ *справа* в точке x_0 называется такое число A_2, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $x \in (x_0;\, x_0 + \delta)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$. Записывают предел справа как $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$ (читается как x стремится к x_0 справа).

Определение предела справа коротко можно записать так:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in (x_0;\, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A_2| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

Пределы слева и справа называют *односторонними* пределами функции.

Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют и односторонние пределы, причем $A = A_1 = A_2$. Также справедливо и обратное утверждение: если существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и они равны между собой $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, то существует и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если односторонние пределы не равны $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Основные теоремы о пределах

Во всех теоремах считаем, что пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ существуют.

Теорема. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\pm\phi(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\phi(x).$$

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\phi(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\phi(x).$$

Теорема справедлива для произведения любого конечного числа функций.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right)=c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Следствие. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Теорема. Предел дроби есть предел числителя, деленный на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)}\ \left(\lim_{x\to x_0}\phi(x)\neq 0\right).$$

Данные теоремы и следствия из них облегчают нахождение пределов функции.

Бесконечно малые функции (б.м.ф.)

Бесконечно малой при $x \to x_0$ называется такая функция $y = f(x)$, для которой $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Бесконечно малые функции (б.м.ф.) еще называют просто бесконечно малыми или бесконечно малыми величинами. Обозначают б.м.ф. обычно греческими буквами α, β и т.д.

Примеры б.м.ф.: $y = x^3$ при $x \to 0$, $y = x + 1$ при $x \to -1$.

Бесконечно малыми могут быть и последовательности, например, $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Теорема. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

Следствие 1. Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Следствие 2. Произведение бесконечно малой функции на число есть бесконечно малая функция.

Следствие 3. Частное от деления б.м.ф. на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть бесконечно малая функция.

Сумма, разность и произведение двух бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией. Отношение же двух б.м.ф. может вести себя по-разному: быть бесконечно малой функцией, бесконечно большой, конечным числом или вообще не стремиться ни к какому конкретному пределу.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ – две б.м.ф. при $x \to x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0\ \left(A\in\mathbb{R}\right)$, то α и β называют бесконечно малыми одного порядка.

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то α называют бесконечно малой более высокого порядка, чем β.

3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$, то α называют бесконечно малой более низкого порядка, чем β.

4. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β называют несравнимыми бесконечно малыми функциями.

Эквивалентные б.м.ф.

Эквивалентные бесконечно малые функции играют особую роль среди бесконечно малых функций одного порядка.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то α и β называются *эквивалентными бесконечно малыми функциями*. Обозначается эта эквивалентность как $\alpha\sim\beta$.

Например, $\sin x\sim x$ при $x\to 0$.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или какую-либо одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией.

Теорема. Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция более высокого порядка, чем каждая из них.

Теорема. Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Это слагаемое называется *главной частью этой суммы* бесконечно малых.

При вычислении пределов нередко возникает неопределенность вида $\frac{0}{0}$ (обычно ее обозначают $\left|\frac{0}{0}\right|$), чтобы раскрыть эту неопределенность зачастую бывает полезно воспользоваться эквивалентными бесконечно малыми функциями.

Таблица основных эквивалентных б.м.ф.:

1) $\sin\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$;

2) $\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$;

3) $\arcsin\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$;

4) $\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$;

5) $1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$ при $\alpha \to 0$;

6) $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$;

7) $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \cdot \ln a$ при $\alpha \to 0$;

8) $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$;

9) $\log_a(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln a}$ при $\alpha \to 0$;

10) $(1+\alpha)^k - 1 \sim k \cdot \alpha,\ k>0$ при $\alpha \to 0$.

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\arcsin^2 x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\arcsin^2 x} = \left|\frac{0}{0}\right|$. Используем эквивалентные б.м.ф.:

$$1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2} \text{ при } \alpha \to 0,\ \arcsin\alpha \sim \alpha \text{ при } \alpha \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\cos 3x \sim \frac{(3x)^2}{2} = \frac{9x^2}{2},\ \arcsin^2 x \sim x^2 \text{ при } x \to 0.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\arcsin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{9x^2}{2}}{x^2} = \frac{9}{2}.$$

Отметим, что приведенные выше эквивалентности используются в ряде приближенных вычислений.

Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

Пусть дана функция $y = f(x),$ определенная в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. *Непрерывной в точке* x_0 называется такая функция $y = f(x),$ у которой существует предел в этой точке, и он равен значению самой функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Другими словами, чтобы функция была непрерывна в точке x_0, должны выполняться три условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x);$

3) значение предела функции в точке x_0 равно значению функции в точке $x_0: \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$

Стоит отметить, что при нахождении предела непрерывной функции $f(x)$ можно в функцию $f(x)$ вместо аргумента x подставить его предельное значение x_0.

Пример.

Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\sin 2x}{x}}$.

Так как функция e^x непрерывна, то

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{\sin 2x}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}} = e^2.$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $\left[x_0; x_0 + \delta\right)$ (на промежутке $\left(x_0 - \delta; x_0\right]$), $\delta > 0.$

Непрерывной в x_0 *справа (слева)* называется такая функция $y = f(x),$ для которой справедливо равенство $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)\right).$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она непрерывна в x_0 справа и слева.

Непрерывной на интервале (a,b) называется такая функция $y = f(x)$, которая непрерывна в каждой точке этого интервала.

Непрерывной на отрезке $[a,b]$ называется такая функция $y = f(x)$, которая непрерывна на интервале (a,b) и в точке $x = a$ непрерывна справа, а в точке $x = b$ непрерывна слева.

Точками разрыва функции называются точки, в которых нарушается непрерывность функции.

Точки разрыва подразделяются на два вида: точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода.

Точкой разрыва первого рода функции $y = f(x)$ называется такая точка x_0, в которой существуют конечные пределы функции $y = f(x)$ слева и справа, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$. Отметим, что

а) если $A_1 = A_2$, то точку x_0 называют точкой устранимого разрыва;

б) если $A_1 \neq A_2$, то точку x_0 называют точкой конечного разрыва. Скачком функции в точке разрыва первого рода называют величину $|A_1 - A_2|$ (рис.4).

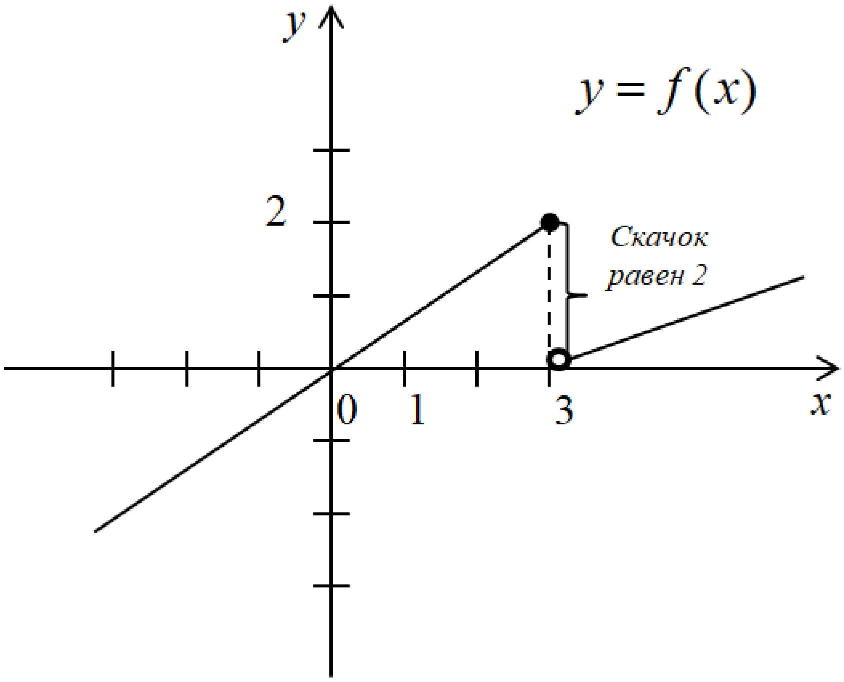

Рис.4. Функция $y = f(x)$, имеющая разрыв первого рода в точке $x_0 = 3$

Точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$ называется такая точка x_0, в которой не существует или равен бесконечности, по крайней мере, один из односторонних пределов (рис.5).

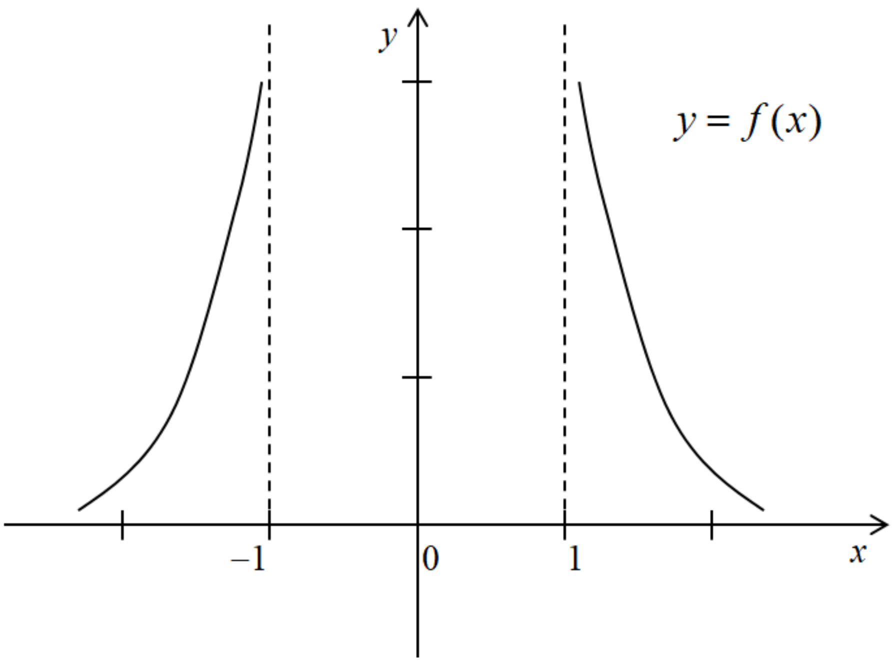

Рис.5. Функция $y = f(x)$, имеющая разрыв второго рода в точках $x_{1,2} = \pm 1$

Производная функции

Одним из основных понятий математики является понятие производной. Производная широко используется не только в математике и физике, но и в ряде других наук, особенно при изучении скорости протекания различных процессов.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на некотором интервале (a,b).

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* $x_0 \in (a,b)$ называется предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю. Обозначают производную одним из способов: f'_x; $f'(x)$; y'; $\dfrac{dy}{dx}$; y'_x.

Определение производной на языке математики:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* на интервале (a,b), если она имеет производную в каждой точке этого интервала. Операцию нахождения производной называют *дифференцированием.*

Значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначают одним из способов: $f'(x_0)$; $y'\big|_{x=x_0}$; $y'(x_0)$.

Физический смысл производной – если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то ее производная y' есть скорость протекания этого процесса.

Геометрический смысл производной – производная $f'(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Уравнение касательной: $y_{кас} - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$, где $y_0 = y(x_0)$.

Чтобы составить данное уравнение, нужно воспользоваться уравнением прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом: $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью к графику функции* $y = f(x)$ в этой точке.

Уравнение нормали: $y_{норм} - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (если $y'(x_0) \neq 0$).

Чтобы составить данное уравнение, нужно воспользоваться свойством перпендикулярных прямых: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2} \Rightarrow k_{норм} = -\dfrac{1}{k_{кас}} = -\dfrac{1}{y'(x_0)}$ (рис.6).

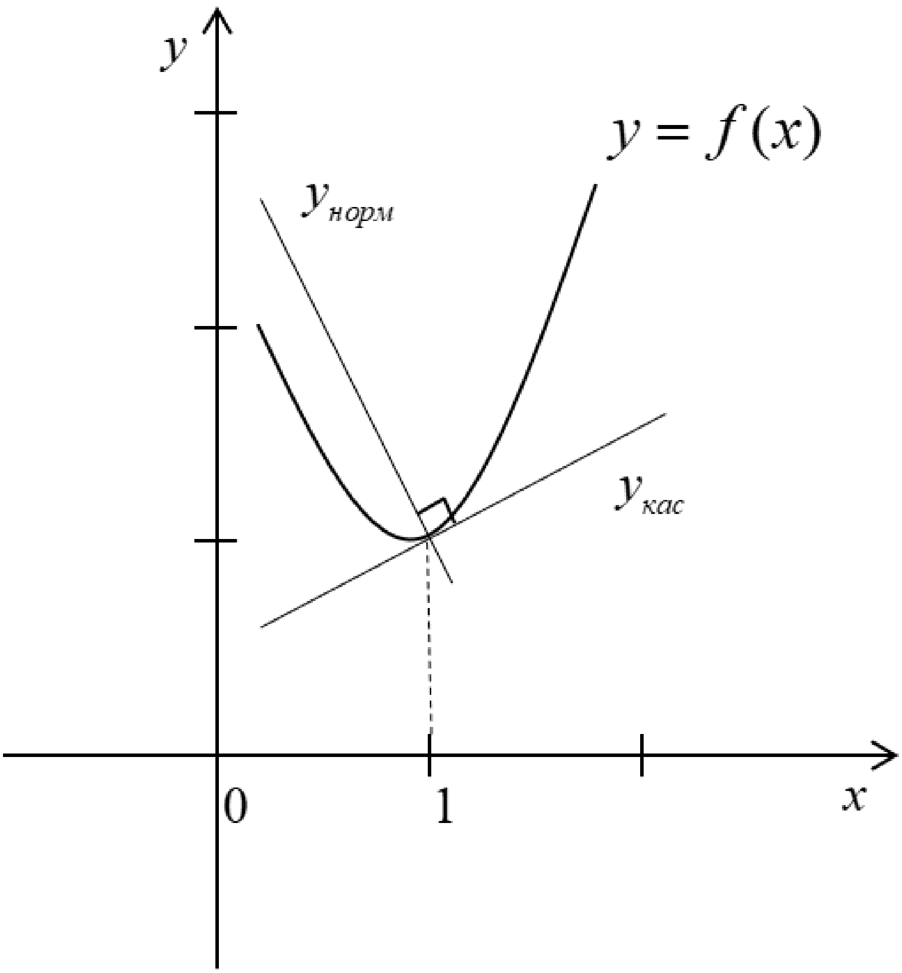

Рис.6. Касательная и нормаль, проведенные к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 1$

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней.

Правила дифференцирования и таблица производных

Приведем правила дифференцирования и таблицу основных производных.

Правила дифференцирования

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – две дифференцируемые на интервале (a,b) функции. Тогда для них верны следующие правила:

Правило 1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ – правило дифференцирования суммы;

Пример.

$(\sin x + x)' = (\sin x)' + x' = \cos x + 1;$

Правило 2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ – правило дифференцирования произведения.

В частности, $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ (c – константа);

Пример.

$\left(e^x \cdot x^3\right)' = \left(e^x\right)' \cdot x^3 + e^x \cdot \left(x^3\right)' = e^x \cdot x^3 + e^x \cdot 3x^2 = e^x\left(x^3 + 3x^2\right);$

Пример.

$\left(5 \cdot x^3\right)' = 5 \cdot \left(x^3\right)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2;$

Правило 3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ – правило дифференцирования частного.

В частности, $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = \dfrac{-cv'}{v^2}$ (c – константа);

Пример.

$$\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot x - \cos x \cdot x'}{x^2} = \frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2} = -\frac{x \cdot \sin x + \cos x}{x^2};$$

Пример.

$$\left(\frac{4}{x^3}\right)' = \frac{-4 \cdot \left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2} = \frac{-12x^2}{x^6} = \frac{-12}{x^4};$$

Правило 4. $\left(u(v)\right)' = u'(v) \cdot v'$ – дифференцирование сложной функции;

Пример.

$$(\cos 5x)' = -\sin 5x \cdot (5x)' = -5\sin 5x;$$

Правило 5. $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ – дифференцирование обратной функции.

Таблица основных производных:

1) $C' = 0$, C – константа;

2) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;

3) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

5) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

6) $(e^x)' = e^x$;

7) $(\sin x)' = \cos x$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$;

9) $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

10) $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14) $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Для вычисления производных необходимо знать лишь таблицу основных производных и правила дифференцирования, а также строго соблюдать эти правила при решении задач.

Правило Лопиталя

Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, основанный на применении производных.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в ноль в самой этой точке: $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$. Пусть также $\varphi'(x_0)\neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=m$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=m.$

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=\left|\frac{0}{0}\right|$, воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x'}{\left(\ln(x+1)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)}=1.$$

Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то правило Лопиталя можно применить еще раз и так далее.

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}=\left|\dfrac{0}{0}\right|$, воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(2\sin 2x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x}{2}=2.$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=2.$$

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и в пределе равны бесконечности в самой этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty,\ \varphi'(x)\neq 0.$ Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=r,$ то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=r.$

Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то правило Лопиталя можно применить еще раз и так далее.

Пример.

Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^x}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{e^x}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$, воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x}=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x}=0.$$

Правило Лопиталя применяют для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$, которые называются *основными*. Отметим, что неопределенности вида

$0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} можно свести к двум основным видам путем тождественных преобразований исходного выражения.

Возрастание и убывание функции. Экстремумы

С помощью производной довольно удобно исследовать функцию на монотонность (возрастание и убывание). Приведем основные теоремы, содержащие необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

Теорема (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале, то $f'(x)\geq 0$ $\left(f'(x)\leq 0\right)$ для $\forall x\in(a,b)$.

Теорема (достаточные условия). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и ее производная $f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ для $\forall x\in(a,b)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a,b).

Точка x_0 называется *точкой локального максимума* функции $f(x)$, если существует такая $\delta-$окрестность точки x_0 (то есть интервал $(x_0-\delta;x_0+\delta)$), что для всех $x\neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой локального минимума* функции $f(x)$, если существует такая $\delta-$окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$.

Точку локального максимума или минимума называют точкой локального экстремума. Концевая точка не может быть точкой локального максимума или минимума функции, так как для этих точек функция определена в односторонней окрестности.

Пусть задана непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $y=f(x)$.

Точка $x_0 \in [a,b]$ называется *точкой глобального максимума (точкой наибольшего значения)* функции $f(x)$, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Точка $x_0 \in [a,b]$ называется *точкой глобального минимума (точкой наименьшего значения)* функции $f(x)$, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

Значение функции, посчитанное в точке максимума (минимума), называется *максимумом* (*минимумом*) функции. Точку максимума (минимума) называют *точкой экстремума*, а максимум (минимум) функции *экстремумом* функции.

Теперь рассмотрим условия существования экстремума функции.

Теорема (необходимое условие локального экстремума). Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Отметим, что непрерывная функция может иметь локальный экстремум лишь в тех точках, в которых производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называют *критическими точками*.

Теорема (достаточное условие локального экстремума). Если непрерывная функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой $\delta -$окрестности критической точки x_0 и при переходе через эту точку слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 является точкой локального максимума; если с минуса на плюс, то x_0 является точкой локального минимума.

На основании вышеизложенных теорем можно сформулировать следующий алгоритм исследования функции на возрастание, убывание и экстремумы:

1) Находим производную $f'(x)$ от функции $f(x)$;

2) Приравниваем производную к нулю и находим критические точки;

3) Наносим критические точки на числовую ось и определяем знаки производной $f'(x)$ на каждом из полученных интервалов. В интервалах, где $f'(x) > 0,$ функция возрастает, где $f'(x) < 0$ функция убывает;

4) Определяем точки экстремума: критические точки, в которых существует сама функция и при этом производная меняет знак с плюса на минус при переходе через каждую из этих точек, будут точками локального максимума, с минуса на плюс – точками локального минимума;

5) Вычисляем значения функции в точках экстремума.

Если требуется определить глобальный максимум (наибольшее значение) или глобальный минимум (наименьшее значение) функции на отрезке, то определяются критические точки, находятся локальные максимумы и минимумы (если они есть), а также значения функции на концах отрезка. Сравнительный анализ полученных значений выявляет максимум и минимум функции на отрезке**.**

Пример.

Найти экстремумы функции $f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

1) $f'\left(x\right) = \left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)' = \dfrac{2x\left(x+2\right) - x^2}{\left(x+2\right)^2} = \dfrac{x^2+4x}{\left(x+2\right)^2} = \dfrac{x\left(x+4\right)}{\left(x+2\right)^2}.$

2) $f'\left(x\right) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x\left(x+4\right)}{\left(x+2\right)^2} = 0.$

Получаем критические точки $x_1 = 0;$ $x_2 = -4;$ $x_3 = -2.$

3, 4) Чертим числовую ось (рис. 7). Заметим, что при $x_3 = -2$ функция $f\left(x\right) = \dfrac{x^2}{x+2}$ не существует, поэтому эту точку на числовой оси нужно выколоть.

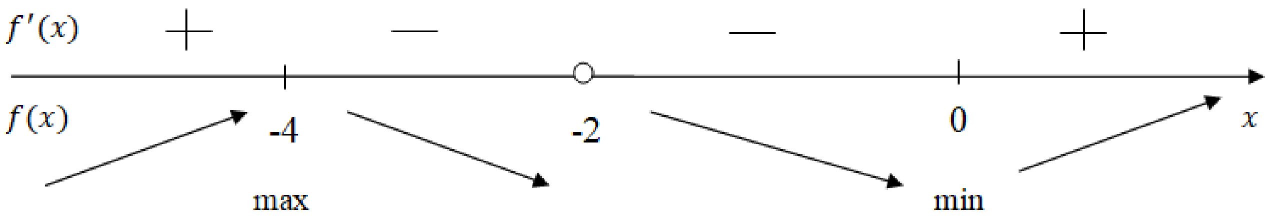

Рис.7. Точки экстремума функции $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$

Получаем, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$. Функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-4;-2)\cup(-2;0)$.

Точки экстремума: $x_{\max}=-4;\ x_{\min}=0.$

5) $y_{\max}=y(x_{\max})=y(-4)=\dfrac{(-4)^2}{-4+2}=\dfrac{16}{-2}=-8;$

$y_{\min}=y(x_{\min})=y(0)=\dfrac{0^2}{0+2}=0.$

Иногда бывает удобным использовать *второй достаточный признак существования экстремума*, который основан на определении знака второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции $f(x)$ равна нулю $(f'(x)=0)$, а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля $(f''(x)\neq 0)$, то при $f''(x)<0$ в точке x_0 функция имеет максимум, а при $f''(x)>0$ – минимум.

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

При построении графика функции помимо характера монотонности функции полезно иметь некоторые сведения о форме ее графика.

График дифференцируемой функции $f(x)$ называется *вогнутым (выпуклым вниз)* на интервале (a,b), если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале.

График дифференцируемой функции $f(x)$ называется *выпуклым (выпуклым вверх)* на интервале (a,b), если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка, при переходе через которую меняется характер выпуклости, называется *точкой перегиба* графика функции (рис.8).

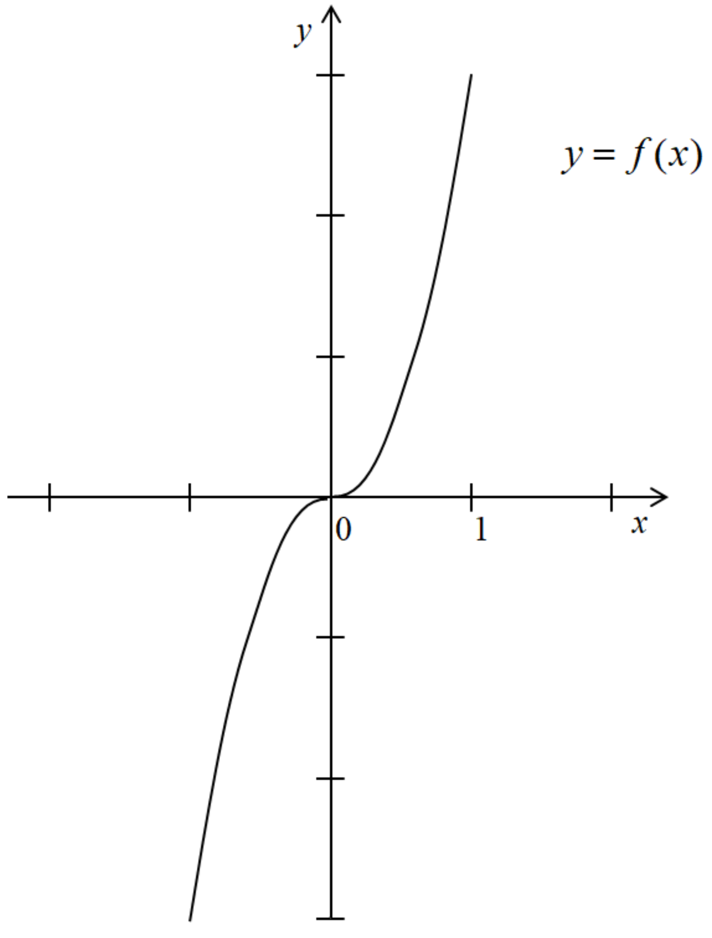

Рис.8. Перегиб функции $y = f(x)$ в точке $x_0 = 0$

Интервалы выпуклости и вогнутости функции находят с помощью следующей теоремы.

Теорема. Если вторая производная функции $f(x)$ во всех точках интервала (a,b) отрицательна, т.е. $f''(x)<0,$ то график функции на этом интервале выпуклый (выпуклый вверх). Если же $f''(x)>0,$ то график функции на интервале (a,b) вогнутый (выпуклый вниз).

Чтобы найти точки перегиба графика функции используют следующую теорему.

Теорема (достаточное условие существования точки перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ в некоторой точке x_0 равна нулю или не существует и при переходе через эту точку меняет свой знак, то x_0 является абсциссой точки перегиба графика функции.

Точки, в которых вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует, называют *критическими точками второго рода.*

На основании вышеизложенных теорем можно сформулировать следующий алгоритм исследования графика функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба:

1) Находим первую производную $f'(x),$ а затем вторую производную $f''(x)$ от функции $f(x)$;

2) Приравниваем вторую производную к нулю и находим критические точки второго рода;

3) Наносим критические точки на числовую ось и определяем знаки второй производной $f''(x)$ на каждом из полученных интервалов. В интервалах, где $f''(x)>0,$ график функции вогнутый, где $f''(x)<0$ – выпуклый;

4) Определяем точки перегиба: критические точки второго рода, в которых существует сама функция и при этом вторая производная меняет знак, будут точками перегиба графика функции;

5) Вычисляем значения функции в точках перегиба.

Пример.

Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба график функции $f(x)=x^5+3x-1$.

1) $f'(x)=\left(x^5+3x-1\right)'=5x^4+3 \Rightarrow f''(x)=\left(5x^4+3\right)'=20x^3$.

2) $f''(x)=0 \Rightarrow 20x^3=0$.

Получаем одну критическую точку второго рода $x_0=0$.

3, 4) Чертим числовую ось (рис.9).

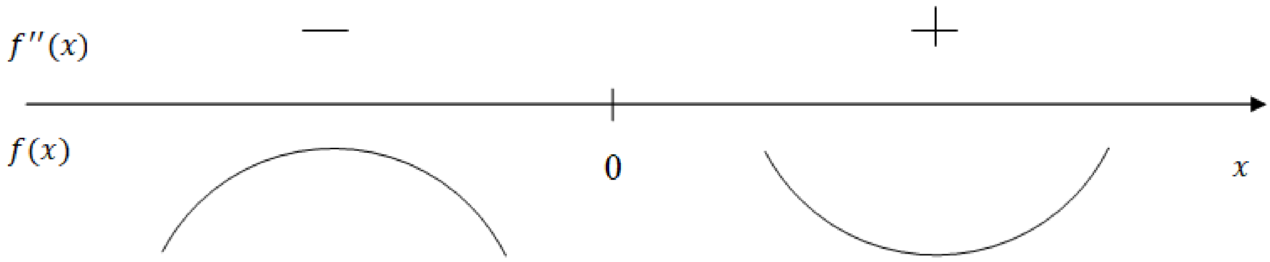

Рис.9. Точка перегиба графика функции $f(x)=x^5+3x-1$

Получаем, что график функции $f(x)$ выпуклый на промежутке $(-\infty;0)$ и вогнутый на промежутке $(0;+\infty)$.

Точка перегиба: $x_0=0$.

5) $y(x_0)=y(0)=-1$.

То есть у графика функции $f(x)=x^5+3x-1$ существует перегиб в точке с координатами $(0;-1)$.

Асимптоты графика функции

Знание уравнений асимптот графика функции значительно облегчает его построение.

Асимптотой графика функции $f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на этом графике, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по графику функции.

Асимптоты подразделяются на вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Например, график функции $f(x) = \dfrac{1-x}{x+2}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -2$, поскольку $\lim\limits_{x \to -2-0} \dfrac{1-x}{x+2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{1-x}{x+2} = +\infty$.

Поскольку асимптота — это некоторая прямая линия, то уравнение *наклонной асимптоты* для графика функции $f(x)$ будем искать в виде

$$y = kx + b,$$

где $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right)$.

В частности, если $k = 0$ и $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) \neq \infty$, то прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* к графику функции $f(x)$.

Замечание: наклонные асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разными. Поэтому при отыскании коэффициентов наклонной асимптоты нужно отдельно рассматривать случай, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.

Пример.

Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

Вертикальные асимптоты:

При $x = -2$ знаменатель функции обращается в ноль, и функция терпит бесконечный разрыв. Проверим, будет ли $x = -2$ вертикальной асимптотой, для этого вычислим односторонние пределы. Если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, то прямая $x=-2$ будет являться вертикальной асимптотой графика функции $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x+2}$.

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x^2}{x+2}=-\infty,\ \lim_{x\to-2+0}\frac{x^2}{x+2}=+\infty.$$

Значит, $x=-2$– вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты:

Проверим, есть ли у графика функции наклонные асимптоты $y=kx+b$. Для этого рассмотрим отдельно случай, когда $x\to+\infty$, и, когда $x\to-\infty$.

При $x\to+\infty$:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+2x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+2}=-2.$$

Значит, $y=x-2$ – наклонная асимптота.

При $x\to-\infty$:

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x+2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+2x}=1;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{2x}{x+2}=-2.$$

Поскольку мы получили тот же результат, что и при $x\to+\infty$, делаем вывод, что график функции $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x+2}$ имеет единственную наклонную асимптоту $y=x-2$.

Горизонтальные асимптоты:

Горизонтальных асимптот у графика функции нет, так как $k\neq0$.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{\sin x^2}.$$

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{\sin x^2}=\left|\dfrac{0}{0}\right|$. Преобразуем исходное выражение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^4 x)}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^2 x)\cdot(1+\cos^2 x)}{\sin x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\sin^2 x\cdot(1+\cos^2 x)}{\sin x^2}.$$

Для нахождения данного предела используем эквивалентные бесконечно малые функции: при $\alpha\to 0$ $\sin\alpha\sim\alpha \Rightarrow \sin^2 x\sim x^2,\ \sin x^2\sim x^2$.

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot x^2\cdot(1+\cos^2 x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot(1+\cos^2 x)=1\cdot(1+1)=2.$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{\sin x^2}=2.$

Задание 2. Найти производную:

$$y=\sqrt{3-4x+5x^2}+4x\cdot\ln\sin x.$$

Решение. Для вычисления производной воспользуемся таблицей производных и правилом дифференцирования произведения двух функций: $(u\cdot v)'=u'v+uv'$. Таким образом, находим:

$$y'=\frac{(3-4x+5x^2)'}{2\sqrt{3-4x+5x^2}}+4\ln\sin x+\frac{4x}{\sin x}\cdot(\sin x)'=$$
$$=\frac{10x-4}{2\sqrt{3-4x+5x^2}}+4\ln\sin x+4x\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{5x-2}{\sqrt{3-4x+5x^2}}+4\ln\sin x+4x\cdot\operatorname{ctg} x.$$

Ответ: $y' = \dfrac{5x-2}{\sqrt{3-4x+5x^2}} + 4\ln\sin x + 4x\cdot\operatorname{ctg} x.$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y = x^2 - \frac{4}{x} - 7x,\quad x_0 = 1.$$

Решение. Запишем уравнение касательной в общем виде:

$y_{кас} - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0).$

Запишем уравнение нормали в общем виде:

$y_{норм} - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}\cdot(x - x_0).$

Найдем значение $y_0 = y(x_0) = y(1) = 1^2 - \dfrac{4}{1} - 7\cdot 1 = -10.$

Вычислим производную $y'(x) = \left(x^2 - \dfrac{4}{x} - 7x\right)' = 2x + \dfrac{4}{x^2} - 7.$

Найдем значение $y'(x_0) = y'(1) = 2\cdot 1 + \dfrac{4}{1^2} - 7 = -1.$

Следовательно, уравнение искомой касательной примет вид:

$y_{кас} + 10 = (-1)\cdot(x-1)$ или $y_{кас} = -x - 9.$

Уравнение нормали примет вид:

$y_{норм} + 10 = -\dfrac{1}{(-1)}\cdot(x-1)$ или $y_{норм} = x - 11.$

Ответ: $y_{кас} = -x - 9$ – уравнение касательной;

$y_{норм} = x - 11$ – уравнение нормали.

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}.$$

Будем использовать следующую схему исследования функции:

1) Ищем область определения функции и точки разрыва (если они имеются).

2) Определяем четная функция, нечетная или общего вида.

3) Исследуем функцию на периодичность.

4) Находим точки пересечения графика функции с осями координат.

5) Находим асимптоты кривой.

6) Проводим исследование функции на возрастание, убывание и экстремумы, находим экстремальные значения функции.

7) Ищем точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой.

8) Полученные результаты наносим на чертеж и получаем график исследуемой функции (если необходимо, берем дополнительные точки на графике).

Решение

1) Область определения функции:

$D(y) = x \in (-\infty;-2) \cup (-2;+\infty)$, т.е. все действительные числа, кроме $x=-2$. При $x=-2$ функция терпит разрыв.

2) Определим четная функция, нечетная или общего вида:

$y(-x) = \dfrac{\sqrt[3]{(-x)^2}}{-x+2} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{2-x}$, $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, следовательно, имеем функцию общего вида.

3) Функция непериодическая.

4) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

С осью абсцисс: $y=0$, $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2} = 0 \Rightarrow x=0$. То есть график функции пересекает ось OX в точке (0;0).

С осью ординат: $x=0$, $y = \dfrac{\sqrt[3]{0^2}}{0+2} = 0$. То есть график функции пересекает ось OY в точке (0;0).

5) Найдем асимптоты графика нашей функции:

Вертикальные асимптоты ищем в точках разрыва. Если у графика функции существуют вертикальные асимптоты $x = a,$ то для них выполнено условие $\lim\limits_{x \to a} y(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} y(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} y(x) = \infty$.

В нашем случае единственная вертикальная асимптота задается уравнением $x = -2$, поскольку

$$\lim_{x \to -2-0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2} = -\infty \text{ и } \lim_{x \to -2+0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2} = +\infty.$$

Выясним, существуют ли у графика нашей функции наклонные и горизонтальные асимптоты.

Если у графика функции $f(x)$ существуют наклонные асимптоты $y = kx + b,$ то k и b можно найти по формулам: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}, \quad b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right).$ Отдельно рассмотрев случай, когда $x \to +\infty,$ и, когда $x \to -\infty.$

При $x \to +\infty$:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2 + 2x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

При $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2 + 2x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

Так как $k = 0$ и $b \neq \infty,$ то наклонная асимптота вырождается в горизонтальную асимптоту $y=b$. Значит, $y=0$ является горизонтальной асимптотой графика нашей функции.

6) Исследуем функцию на возрастание, убывание и экстремумы.

Вычислим производную:

$$y'=\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}\right)'=\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\left(x+2\right)-\sqrt[3]{x^2}}{\left(x+2\right)^2}=\frac{\frac{2\left(x+2\right)}{3x^{\frac{1}{3}}}-x^{\frac{2}{3}}}{\left(x+2\right)^2}=\frac{2\left(x+2\right)-3x}{3x^{\frac{1}{3}}\left(x+2\right)^2}=\frac{4-x}{3x^{\frac{1}{3}}\left(x+2\right)^2}.$$

$$y'=\frac{4-x}{3x^{\frac{1}{3}}\left(x+2\right)^2}.$$

Найдем критические точки, то есть те точки, в которых производная равна нулю или не существует.

$$y'=0\ \Rightarrow\ \frac{4-x}{3x^{\frac{1}{3}}\left(x+2\right)^2}=0\ \Rightarrow\ x_1=4,\ x_2=0,\ x_3=-2.$$

Рассмотрим числовую ось и определим на ней промежутки возрастания и убывания функции, а также точки минимума и точки максимума функции (экстремальные точки). Функция возрастает на промежутке, если производная на нем положительна, и убывает на промежутке, если производная на нем отрицательна. При переходе с возрастания на убывание имеем точку максимума функции. При переходе с убывания на возрастание имеем точку минимума функции. Также выкалываем точку $x_3=-2$, поскольку в этой точке функция не определена (рис.10).

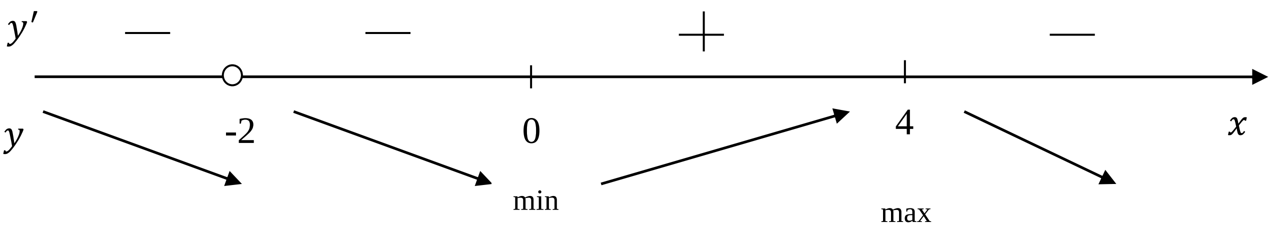

Рис.10. Точки экстремума функции $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$

Таким образом, функция возрастает на промежутке $(0;4)$.

Функция убывает на промежутке $(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(4;+\infty)$.

$x_{\max}=4;\, y_{\max}=y(4)=\dfrac{\sqrt[3]{4^2}}{4+2}=\dfrac{\sqrt[3]{16}}{6}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}\approx 0{,}42$ – следовательно, максимум функции достигается в точке $\left(4;\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)$.

$x_{\min}=0;\ y_{\min}=y(0)=\dfrac{\sqrt[3]{0^2}}{0+2}=0$ – следовательно, минимум функции достигается в точке $(0;0)$.

7) Найдем точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой.

Вычислим вторую производную:

$$y''=\left(\frac{4-x}{3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2}\right)'=\frac{-3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2-\left(3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2\right)'(4-x)}{\left(3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{-3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2-x^{-\frac{2}{3}}(x+2)^2(4-x)-6x^{\frac{1}{3}}(x+2)(4-x)}{\left(3x^{\frac{1}{3}}(x+2)^2\right)^2}=\frac{4x^2-32x-8}{9x^{\frac{4}{3}}(x+2)^3}.$$

$$y''=\frac{4x^2-32x-8}{9x^{\frac{4}{3}}(x+2)^3}.$$

Вычислим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует (критические точки второго рода):

$$y''=0\ \Rightarrow\ \frac{4x^2-32x-8}{9x^{\frac{4}{3}}(x+2)^3}=0,\ 4x^2-32x-8=0,\ x^2-8x-2=0,$$

$$x_1=4+3\sqrt{2}\approx 8{,}24,\quad x_2=4-3\sqrt{2}\approx -0{,}24,\quad x_3=0,\quad x_4=-2.$$

Рассмотрим числовую ось и определим на ней промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, а также точки перегиба. График функции является выпуклым на промежутке, если вторая производная на нем отрицательна. График функции является вогнутым на промежутке, если вторая производная на нем положительна. Если вторая производная меняет знак при переходе через точку, в которой она равна нулю или не существует, то эта точка является точкой перегиба графика функции. Также выкалываем точку $x_4=-2$, поскольку в этой точке функция не определена (рис.11).

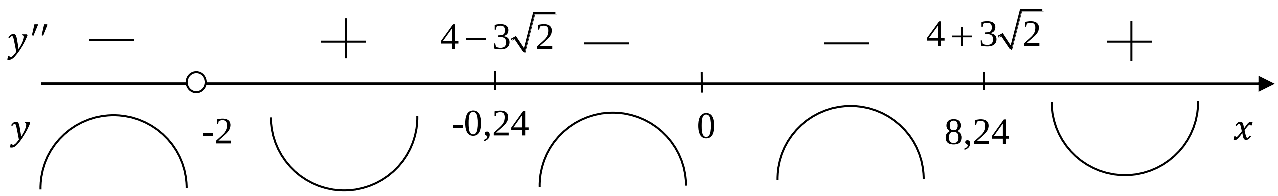

Рис.11. Точки перегиба графика функции $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$

Получаем, что график нашей функции выпуклый на промежутке $\left(-\infty;-2\right)\cup\left(4-3\sqrt{2};4+3\sqrt{2}\right)$ и вогнутый на промежутке $\left(-2;4-3\sqrt{2}\right)\cup\left(4+3\sqrt{2};+\infty\right)$.

В точках $x=4-3\sqrt{2};\ x=4+3\sqrt{2}$ вторая производная меняет знак, значит точками перегиба графика функции являются точки:

$$x=4+3\sqrt{2},\ y\left(4+3\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt[3]{\left(4+3\sqrt{2}\right)^2}}{4+3\sqrt{2}+2}\approx 0,4\ \Rightarrow\ \left(8,24;0,4\right);$$

$$x=4-3\sqrt{2},\ y\left(4-3\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt[3]{\left(4-3\sqrt{2}\right)^2}}{4-3\sqrt{2}+2}\approx 0,22\ \Rightarrow\ \left(-0,24;0,22\right).$$

В точке $x=-2$ вторая производная также меняет знак, но в этой точке не существует сама функция, поэтому перегиба у графика функции в данной точке не будет.

8) Строим график функции (рис.12).

При построении графика функции начинаем с вычерчивания его асимптот, точек пересечения с координатными осями, точек экстремума и точек перегиба. Знание промежутков возрастания и убывания функции, а также интервалов выпуклости и вогнутости ее графика позволит правильно построить график в соответствующих областях.

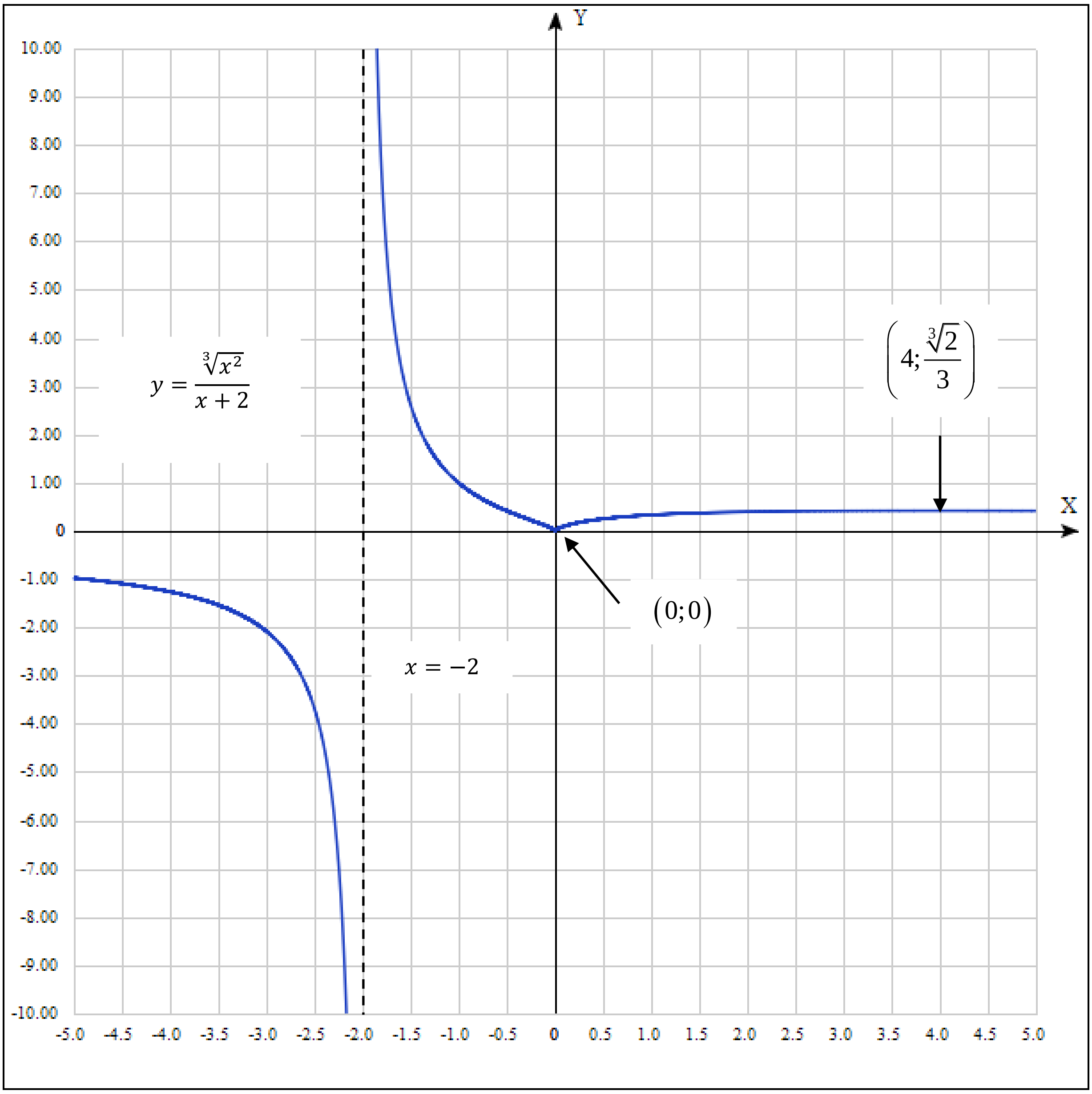

Рис.12. График функции $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{\sin^2 6x}.$$

Задание 2. Найти производную:

$$y=\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right).$$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y=x^2+4\sqrt{x}+3,\quad x_0=1.$$

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{x^2}{x^2-1}.$$

ВАРИАНТ 2

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\arcsin^2 2x}.$$

Задание 2. Найти производную:

$$y=\arcsin^2 5x-tg\frac{1}{x^2}+3.$$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y=\frac{x^3+2}{x^5+1},\quad x_0=1.$$

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=x^3+\frac{x^2}{2}.$$

ВАРИАНТ 3

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 8x}{\sin^2 2x}.$$

Задание 2. Найти производную:

$$y=e^{4x}\cdot(2x-1)+3\sqrt{x}.$$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y=\frac{1}{1+\sqrt{x}},\quad x_0=4.$$

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{1}{x^2-4}.$$

ВАРИАНТ 4

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln^2(1+3x)}.$$

Задание 2. Найти производную:

$$y=\sqrt[3]{5x}-\cos\frac{x-2}{x+1}.$$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y=x^2-3x+3,\quad x_0=5.$$

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{2x^2+3}{x}.$$

ВАРИАНТ 5

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x^3-x^2}{tg^2 2x}.$$

Задание 2. Найти производную:

$$y=\arccos^2 \ln x.$$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y=x+\frac{16}{x},\quad x_0=2.$$

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{1-2x^2}{x+2}.$$

ВАРИАНТ 6

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x\sin 6x}.$$

Задание 2. Найти производную:

$$y=3^{\arcsin x}-\frac{1}{\sqrt[5]{x}}.$$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y=\frac{x}{x^2-1},\quad x_0=-2.$$

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{x^4}{2}-x^3.$$

ВАРИАНТ 7

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{(e^{2x}-1)^2}.$$

Задание 2. Найти производную:

$$y = x^2 arctg\sqrt{x}.$$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y = x^3 + \frac{1}{x} - 20, \quad x_0 = 1.$$

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = 6x^2 - x^3.$$

ВАРИАНТ 8

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 4x}{1-\cos 6x}.$$

Задание 2. Найти производную:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x - 1} + x\cdot e^{-5x}.$$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4.$$

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

ВАРИАНТ 9

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{\sin^2 2x}.$$

Задание 2. Найти производную:

$$y=\ln\frac{x-3}{x+1}+\sin^3 4x.$$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y=\frac{1}{x+3},\quad x_0=3.$$

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1.$$

ВАРИАНТ 10

Задание 1. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{(e^{3x}-1)^2}.$$

Задание 2. Найти производную:

$$y=\ln x^2-5^{arctgx}.$$

Задание 3. Составить уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

$$y=\frac{1-x^2}{1+x^2},\quad x_0=1.$$

Задание 4. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y=\frac{x^2}{4-x^2}.$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение функции.
2. Какими способами можно задать функцию?
3. Дайте определение обратной и сложной функции.
4. Дайте определение предела функции.
5. Дайте определение бесконечно малой и эквивалентной бесконечно малой функции.
6. Приведите таблицу основных эквивалентных бесконечно малых функций.
7. Дайте определение непрерывной функции.
8. Перечислите виды точек разрыва функции.
9. Дайте определение производной функции. Каков геометрический смысл производной функции?
10. Приведите уравнение касательной и уравнение нормали к графику функции в точке.
11. Приведите таблицу основных производных.
12. Сформулируйте основные правила дифференцирования.
13. Сформулируйте правило Лопиталя.
14. Сформулируйте необходимое условие локального экстремума функции.
15. Сформулируйте достаточное условие локального экстремума функции.
16. Сформулируйте достаточное условие существования точки перегиба графика функции.
17. Дайте определение асимптоты графика функции.
18. Какие бывают асимптоты?
19. По каким формулам вычисляются коэффициенты k и b для наклонной асимптоты?
20. Приведите схему исследования функции.

Литература

Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие / Г.Н. Берман. — 9-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2020. — 492 с. — ISBN 978-5-8114-4862-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/126705. — Режим доступа: для авториз. пользователей (дата обращения 04.10.2022).

Бугров Я.С. Сборник задач по высшей математике: учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — 4-е изд. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 304 с. — ISBN 5-9221-0177-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/2124. — Режим доступа: для авториз. пользователей (дата обращения 04.10.2022).

Бугров Я.С. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 2: учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — 7-е изд., стер. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02150-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/452427. — Режим доступа: для авториз. пользователей (дата обращения 04.10.2022).

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Письменный Д.Т. - 4-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2006. - 602 с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-8112-1778-1.