Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

О.М. Полещук, С.В. Тумор

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-методическое пособие

Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. Баумана

Москва 2022

УДК 512.64
ББК 22.143

Издание доступно в электронном виде по адресу
https://bmstu.press/catalog/item/7823/

Факультет «Космический»
Кафедра «Высшая математика и физика» (К-6 МФ)

Рекомендовано Научно-методическим советом МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия

Рецензент:
профессор А.В. Корольков

Полещук, О.М.

Основные понятия линейной алгебры. Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов / О.М. Полещук, С.В. Тумор – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022. – 38 с.

В учебном издании представлены учебно-методические и справочные материалы для подготовки к контрольной работе по модулю «Линейная алгебра» дисциплины «Математика». Приведены типовые варианты контрольной работы с подробным указанием способов решения всех задач.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов бакалавриата направления подготовки 35.03.01 «Лесное дело».

УДК 512.64
ББК 22.143

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.. 4

Матрицы. Основные понятия.. 6

Действия над матрицами 8

Определители. Основные понятия 9

Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Свойства определителей.. 11

Невырожденные матрицы. Обратная матрица.. 13

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)............................... 15

Решение систем линейных алгебраических уравнений 17

1. Матричный метод.. 17

2. Метод Крамера 18

3. Метод Гаусса.. 19

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ... 21

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 32

Вопросы для самоконтроля 37

Литература... 38

Предисловие

Учебно-методическое пособие является учебным изданием, содержащим учебно-методические и справочные материалы для подготовки к контрольной работе по модулю «Линейная алгебра» дисциплины «Математика».

Для удобства ориентирования в пособии составлено оглавление. В начале приводятся базовые теоретические сведения о матрицах и их свойствах. Далее рассматриваются действия над матрицами. Затем приводятся базовые теоретические сведения об определителях. После формулируются определения минора и алгебраического дополнения элемента определителя, а также свойства определителей. Формулируются понятия невырожденной и обратной матрицы, приводится формула для вычисления обратной матрицы. Далее идут системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Приводятся три метода решения таких систем: матричный метод, метод Крамера, метод Гаусса. Каждый из вышеизложенных методов решения СЛАУ продемонстрирован на конкретных примерах. После основных теоретических сведений приведен пример решения типового варианта контрольной работы по модулю «Линейная алгебра» и варианты заданий контрольной работы. Завершают издание вопросы для самоконтроля и список рекомендуемой литературы.

Ключевые слова: матрица, определитель матрицы, обратная матрица, сложение матриц, умножение матриц, СЛАУ, метод Крамера, матричный метод, метод Гаусса.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров направления подготовки: 35.03.01 «Лесное дело».

Цель издания – оказание помощи студентам при подготовке к контрольной работе по модулю «Линейная алгебра» дисциплины «Математика».

Проработав учебно-методическое пособие, студенты смогут:

- выполнять основные арифметические операции над матрицами, в том числе при решении задач профессионального поля деятельности;

- опираясь на теоретические положения и суть решаемой задачи, находить определители матриц различными способами;
- применять приобретенные навыки работы с матрицами для моделирования профессиональных задач;
- применять приобретенные навыки работы с системами линейных алгебраических уравнений для моделирования профессиональных задач;
- применять полученные знания о системах линейных алгебраических уравнений для решения оптимизационных задач профессионального поля деятельности.

Для изучения модуля «Линейная алгебра» дисциплины «Математика» необходимы знания, полученные при изучении «школьного» курса математики.

Теоретические и практические задания, изложенные в данном учебно-методическом пособии, будут способствовать овладению студентами компетенциями, предусмотренными образовательной программой. Проработка учебно-методического пособия позволит студентам:

ЗНАТЬ

- основные понятия, законы и методы математических и естественных наук, необходимые для решения типовых профессиональных задач.

УМЕТЬ

- использовать основные математические и естественнонаучные приемы решения типовых профессиональных задач.

Матрицы. Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица некоторых элементов (чисел, символов и т.д.), содержащая m строк и n столбцов одинаковой длины. В общем виде матрица записывается как:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1,m}$ (т.е. $i = 1, 2, 3, \ldots, m$) – номер строки, $j = \overline{1,n}$ (т.е. $j = 1, 2, 3, \ldots, n$) – номер столбца. Например, элемент a_{21} расположен во второй строке, первом столбце матрицы.

Матрица A называется матрицей размерности $m \times n$ и записывается в виде $A_{m \times n}$. *Элементы* матрицы обозначаются как a_{ij}. Элементы, которые стоят на диагонали, идущей из верхнего левого угла матрицы, образуют *главную диагональ*. Элементы, которые стоят на диагонали, идущей из левого нижнего угла матрицы, образуют *побочную диагональ*.

Частными случаями матриц являются матрица-строка, матрица-столбец и матрица, состоящая из одного элемента.

$A_{1 \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ – матрица-строка.

$B_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

$C_{1 \times 1} = (c_{11})$ – матрица, состоящая из одного элемента.

Матрицы называют **равными**, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.

$$A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij}, \text{ где } i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Если у матрицы число строк равно числу столбцов, то такую матрицу называют **квадратной** $n-$го порядка.

Квадратная матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица называется **единичной**, если каждый элемент ее главной диагонали равен единице. Обозначается единичная матрица буквой E.

Например:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица 3-го порядка.

Если у матрицы все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, то такую матрицу называют **треугольной**. Различают верхнюю треугольную матрицу, когда нули расположены под главной диагональю, и нижнюю треугольную матрицу, когда нули расположены над главной диагональю.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ – верхняя треугольная матрица.

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$ – нижняя треугольная матрица.

Если у матрицы все элементы равны нулю, то такую матрицу называют **нулевой**. Обозначается нулевая матрица буквой O. Например:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – нулевая матрица 3-го порядка.

Матрицы O и E в матричном исчислении играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Транспонированной матрицей называется матрица, полученная из исходной матрицы заменой каждой ее строки соответствующим столбцом с тем же номером. Обозначается транспонированная матрица как A^T.

Например:

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix},\ \text{тогда}\ A^T=\begin{pmatrix}0&2\\1&3\end{pmatrix}.$$

Свойство транспонированной матрицы: $\left(A^T\right)^T=A.$

Действия над матрицами

Сложение

Например:

$$\begin{pmatrix}0&1&3\\-5&6&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&4&-8\\9&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3&1+4&3+(-8)\\-5+9&6+(-1)&12+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&-5\\4&5&12\end{pmatrix}.$$

Умножение на число

Например:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&3\\-5&6&12\end{pmatrix},\ \alpha=3\ \Rightarrow\ A\cdot\alpha=\begin{pmatrix}0\cdot3&1\cdot3&3\cdot3\\-5\cdot3&6\cdot3&12\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&9\\-15&18&36\end{pmatrix}.$$

Свойства операций сложения матриц и умножения матрицы на число:

1. $A+B=B+A$ – коммутативность;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ – ассоциативность;
3. $A+O=A,$ где O – нулевая матрица;
4. $A-A=O;$
5. $1\cdot A=A;$
6. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B;$
7. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A;$
8. $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A,$

где A,B,C – матрицы, α и β – числа.

Произведение матриц

Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-3)+2\cdot 5+3\cdot 7 & 1\cdot 4+2\cdot 6+3\cdot 8 \\ 4\cdot(-3)+5\cdot 5+6\cdot 7 & 4\cdot 4+5\cdot 6+6\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 40 \\ 55 & 94 \end{pmatrix}.$$

Свойства произведения матриц (если написанные суммы и произведения имеют смысл):

1. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ – ассоциативность;

2. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ – дистрибутивность относительно сложения;

3. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;

4. $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B$,

Операция транспонирования обладает следующими свойствами:

1. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$;

2. $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Определители. Основные понятия

Определителем (или *детерминантом*) квадратной матрицы A называют некоторое число, вычисленное по определенным правилам. Обозначают определитель матрицы как $\det A$ (или $|A|$, или Δ).

Например:

1. При $n=1$. $A=\left(a_1\right)$; $|A|=a_1$.

2. При $n=2$. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$.

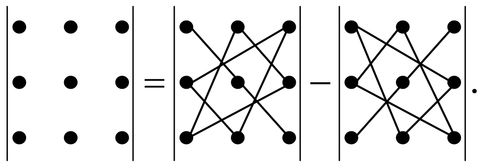
3. При $n=3$. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}.$$

Вычисление определителя матрицы A выше 3-го порядка является довольно трудоемким и сложным для восприятия процессом. Но существуют методы, позволяющие вычислять определители высших порядков на основе определителей более низких порядков. Один из таких методов основан на разложении определителя по элементам некоторого ряда (строки или столбца).

Для вычисления определителя 3-го порядка удобно применять следующие два способа:

1. *Правило треугольников*



(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали) (основания равнобедренных треугольников параллельны побочной диагонали)

Пример. Вычислить определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 5 - (-1)\cdot 3\cdot 1 - 3\cdot 4\cdot 1 = -20.$$

2. *Метод Саррюса*

Пусть необходимо вычислить определитель $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Допишем справа от определителя матрицы его первые два столбца.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} -$$

$$-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}.$$

То есть элементы, стоящие на главной диагонали и параллельных ей линиях (зеленый цвет), входят в выражение со знаком плюс, а элементы, стоящие на побочной диагонали и параллельных ей линиях (красный цвет), входят в выражение со знаком минус.

Пример. Вычислить определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 1\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 4\cdot 1 + 5\cdot(-1)\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 5 - 3\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 3 =$$

$$= -20.$$

Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Свойства определителей

Определитель $n-1$-го порядка, получаемый путем вычеркивания из определителя n-го порядка i-ой строки и j-го столбца называется **минором** элемента a_{ij}. Обозначают минор как M_{ij}.

Например:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 12 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}, \text{ тогда } M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \ M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}.$$

Минор, взятый со знаком «плюс», если значение $i+j$ – четное число, и со знаком «минус», если значение $i+j$ – нечетное число, называется **алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} определителя n-го порядка. Обозначают алгебраическое дополнение как $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Например:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 12 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}, \ M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \ M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix},$$

тогда $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = M_{11}$,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -M_{23}.$$

Свойства определителей:

Свойство 1. («Равноправность строк и столбцов»). Определитель матрицы не изменится, если его строки заменить столбцами, или наоборот столбцы заменить строками. То есть определитель не меняется при транспонировании.

Примечание: далее будем называть строки и столбцы *рядами определителя*.

Свойство 2. Определитель меняет знак при перестановке двух параллельных рядов.

Свойство 3. За знак определителя можно вынести общий множитель элементов какого-либо ряда.

Свойство 4. Определитель можно разложить на сумму двух соответствующих определителей, если элементы какого-либо его ряда представляют собой суммы двух слагаемых.

Свойство 5. Определитель равен нулю, если:

- все элементы какого-либо ряда равны нулю;
- определитель содержит две одинаковые строки (столбца);
- в определителе все элементы каких-либо двух строк (столбцов) пропорциональны;
- В определителе какая-либо строка (какой-либо столбец) является линейной комбинацией других строк (столбцов).

Свойство 6. («Элементарные преобразования определителя»). Если к элементам какого-либо ряда определителя прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число, то определитель не изменится.

Свойство 7. («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Примечание: свойство 7 иллюстрирует способ вычисления определителей высоких порядков (3 и выше).

Свойство 8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Свойство 9. Если A, B – квадратные матрицы одного порядка, то для них верно выражение $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Невырожденные матрицы. Обратная матрица

Пусть задана квадратная матрица A $n-$го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратную матрицу A называют **невырожденной**, если определитель A не равен нулю: $|A| \neq 0.$ Если $|A| = 0,$ то матрицу A называют **вырожденной**.

Матрицей **алгебраических дополнений** для матрицы A называют матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицей, **союзной** (**присоединенной**) к матрице $A,$ называют матрицу

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} для матрицы $A,$ которое определяется так же, как алгебраическое дополнение элемента определителя.

Матрицей, **обратной** к матрице $A,$ называется матрица A^{-1} такая, что выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A. Размерность матрицы A^{-1} такая же как и размерность матрицы A.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную матрицу.

Формула для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Свойства обратной матрицы:

1. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$;

2. $\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Пример.

Вычислить A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

Матрица A имеет обратную только в том случае, когда ее определитель не равен нулю, то есть $|A| \neq 0$.

Вычислим $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = -3 \neq 0.$$

Чтобы найти матрицу A^{-1} – матрицу, обратную к матрице A, воспользуемся формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} и составим матрицу $\tilde{A}$:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) = -1;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 0 = 0;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3.$

Тогда $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Подставив найденную матрицу в формулу для A^{-1}, получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} & 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 2 \cdot \frac{1}{3} + (-1) \cdot \frac{2}{3} & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называют систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ называют **коэффициентами системы**, а числа b_i, $i = \overline{1,m}$ – **свободными членами**. Задача состоит в нахождении чисел x_j, $j = \overline{1,n}$.

Исходную систему удобно переписать в **матричной форме**

$$A \cdot X = B.$$

Где A – матрица коэффициентов системы, которую еще называют **основной** матрицей системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, составленная из неизвестных $x_j,\ j = \overline{1,n},$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матрица-столбец, составленная из свободных членов $b_i,\ i = \overline{1,m}.$

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как количество столбцов в матрице A равно числу строк в матрице X: $A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$.

Расширенной матрицей системы называют матрицу $A|B,$ дополненную столбцом свободных членов

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Решением СЛАУ называют n значений неизвестных $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \cdots,\ x_n = \alpha_n,$ которые при подстановке в уравнения системы, обращают их в верные равенства.

Решение систем линейных алгебраических уравнений

1. Матричный метод

Пример.

Решить СЛАУ матричным методом. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8, \\ -x_1 + 11x_2 = 21. \end{cases}$$

Переходим от системы линейных алгебраических уравнений к матричному уравнению:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Найдем $|A|$ – определитель матрицы A.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = 22 + 3 = 25.$

Так как $|A| \neq 0,$ то система уравнений имеет единственное решение, которое ищется по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Чтобы найти матрицу A^{-1} – матрицу, обратную к матрице A, воспользуемся формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} и составим матрицу $\tilde{A}$:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 11 = 11;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3;$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$

Тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Подставив найденную матрицу в формулу для A^{-1}, получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{25} & \frac{-3}{25} \\ \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \end{pmatrix}.$$

Подставим A^{-1} в формулу для X :

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{11}{25} & \frac{-3}{25} \\ \frac{1}{25} & \frac{2}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{25} \cdot 8 + \left(-\frac{3}{25}\right) \cdot 21 \\ \frac{1}{25} \cdot 8 + \frac{2}{25} \cdot 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ или $x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

Проверка: $\begin{cases} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8 - \text{верно}, \\ -1 + 11 \cdot 2 = 21 - \text{верно}. \end{cases}$

<u>Ответ:</u> $x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

2. Метод Крамера

Пример.

Решить СЛАУ методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8, \\ -x_1 + 11x_2 = 21. \end{cases}$$

Найдем Δ – определитель матрицы коэффициентов A.

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = 22 + 3 = 25.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение. Далее найдем вспомогательные определители Δ_1, Δ_2. Чтобы найти определитель Δ_1 нужно в определителе Δ заменить первый столбец на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 21 & 11 \end{vmatrix} = 88 - 63 = 25.$$

Чтобы найти определитель Δ_2 нужно в определителе Δ заменить второй столбец на столбец свободных членов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 21 \end{vmatrix} = 42 + 8 = 50.$$

Неизвестные x_1, x_2 найдем по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2.$$

<u>Ответ:</u> $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

3. Метод Гаусса

Пример.

Решить СЛАУ методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8, \\ -x_1 + 11x_2 = 21. \end{cases}$$

Суть метода Гаусса состоит в преобразовании исходной системы линейных уравнений в равносильную систему, имеющую специальный вид, которая легко решается. Используются следующие преобразования системы уравнений:

— перестановка местами уравнений;

— прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на некоторое число.

Преобразования удобнее проводить не над самими уравнениями, а над матрицей их коэффициентов. Для данной системы линейных уравнений матрица коэффициентов будет иметь вид:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Составим также расширенную матрицу системы $A|B$, в которую включен столбец свободных членов:

$$A|B=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ -1 & 11 & 21 \end{array}\right).$$

Преобразуем расширенную матрицу $A|B$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ -1 & 11 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 11 & 21 \\ 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \sim$$

- поменяли местами первую и вторую строки,

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 11 & 21 \\ 2 & 3 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 11 & 21 \\ 0 & 25 & 50 \end{array}\right).$$

- ко второй строке прибавили первую, умноженную на 2.

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 11x_2 = 21, \\ \qquad 25x_2 = 50. \end{cases}$$

Решая ее снизу вверх (обратным ходом метода Гаусса), получаем

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2.$$

<u>Ответ:</u> $x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ТИПОВОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Выполнить действия: а) $A\cdot B$, б) $2A+3B$.

$$A=\begin{pmatrix}2&4&2\\3&1&-3\\1&0&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-2&1&0\\2&-1&2\end{pmatrix}$$

Решение:

а) $A\cdot B$;

Произведение двух матриц $A\cdot B$ существует тогда и только тогда, когда матрица A имеет размерность $m\times n$, а матрица B имеет размерность $n\times k$. Матрица их произведения есть матрица C размерности $m\times k$.

Поскольку матрица A имеет размерность 3×3, и матрица B имеет размерность 3×3, то произведение $A\cdot B$ существует и представляет собой матрицу C размерности 3×3: $C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}$.

Для того чтобы вычислить элемент c_{ij}, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$ матрицы C нужно умножить элементы i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и сложить полученные произведения.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2&4&2\\3&1&-3\\1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&4\\-2&1&0\\2&-1&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+4\cdot(-2)+2\cdot2 & 2\cdot3+4\cdot1+2\cdot(-1) & 2\cdot4+4\cdot0+2\cdot2\\ 3\cdot1+1\cdot(-2)+(-3)\cdot2 & 3\cdot3+1\cdot1+(-3)\cdot(-1) & 3\cdot4+1\cdot0+(-3)\cdot2\\ 1\cdot1+0\cdot(-2)+2\cdot2 & 1\cdot3+0\cdot1+2\cdot(-1) & 1\cdot4+0\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2&8&12\\-5&13&6\\5&1&8\end{pmatrix}.$$

б) $2A+3B$;

Умножить матрицу на число означает умножить каждый элемент матрицы на это число.

Операция сложения вводится только для матриц одинаковой размерности.

Поскольку матрица A имеет размерность 3×3, и матрица B имеет размерность 3×3, то сумма $2A+3B$ существует и представляет собой матрицу D размерности 3×3: $D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$.

Для того чтобы вычислить элемент d_{ij}, $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$ матрицы D нужно сложить элемент a_{ij} матрицы A с соответствующим элементом b_{ij} матрицы B.

$$D=2A+3B=\begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 4 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4+3 & 8+9 & 4+12 \\ 6+(-6) & 2+3 & -6+0 \\ 2+6 & 0+(-3) & 4+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 17 & 16 \\ 0 & 5 & -6 \\ 8 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

<u>Ответ:</u> а) $A\cdot B=\begin{pmatrix} -2 & 8 & 12 \\ -5 & 13 & 6 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, б) $2A+3B=\begin{pmatrix} 7 & 17 & 16 \\ 0 & 5 & -6 \\ 8 & -3 & 10 \end{pmatrix}$.

<u>Задание 2.</u> Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Решение:</u> Матрица A имеет обратную только в том случае, когда ее определитель не равен нулю, то есть $|A|\neq 0$.

Вычислим $|A|$, разложив его по элементам первой строки:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=(2-12)-3\cdot(-1-4)+5(-3-2)=-10+15-25=-20\neq 0.$$

Чтобы найти матрицу A^{-1} – матрицу, обратную к матрице A, воспользуемся формулой:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}^T.$$

Матрица $\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}$; $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij},\ (i,j=1,2,3)$, где M_{ij} - минор элемента a_{ij} матрицы A, полученной из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, является матрицей алгебраических дополнений для матрицы A. Матрица $\tilde{A}^T=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, транспонированная по отношению к матрице $\tilde{A}$, называется присоединенной матрицей.

Найдем алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2-12=-10,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(-1-4)=5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3-2=-5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(3-15)=12,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-5=-4,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-3) = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-(-5)) = -9,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5.$$

Тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -5 \\ 12 & -4 & 0 \\ 2 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу $\tilde{A}$, то есть заменим строки соответствующими по номеру столбцами и наоборот, столбцы заменим соответствующими по номеру строками:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -10 & 12 & 2 \\ 5 & -4 & -9 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Подставив найденную матрицу в формулу для A^{-1}, получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 12 & 2 \\ 5 & -4 & -9 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 & -0.1 \\ -0.25 & 0.2 & 0.45 \\ 0.25 & 0 & -0.25 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0.5 + 3\cdot(-0.25) + 5\cdot 0.25 & 1\cdot(-0.6) + 3\cdot 0.2 + 5\cdot 0 & 1\cdot(-0.1) + 3\cdot 0.45 + 5\cdot(-0.25) \\ -1\cdot 0.5 + 2\cdot(-0.25) + 4\cdot 0.25 & -1\cdot(-0.6) + 2\cdot 0.2 + 4\cdot 0 & -1\cdot(-0.1) + 2\cdot 0.45 + 4\cdot(-0.25) \\ 1\cdot 0.5 + 3\cdot(-0.25) + 1\cdot 0.25 & 1\cdot(-0.6) + 3\cdot 0.2 + 1\cdot 0 & 1\cdot(-0.1) + 3\cdot 0.45 + 1\cdot(-0.25) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0.5 & -0.6 & -0.1 \\ -0.25 & 0.2 & 0.45 \\ 0.25 & 0 & -0.25 \end{pmatrix}.$

Задание 3. Решить систему линейных алгебраических уравнений: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 5x-y+2z=3 \\ 3x-4y+3z=2 \end{cases}$$

Решение: а) матричным методом.

Переходим от системы линейных алгебраических уравнений к матричному уравнению:

$$A\cdot X=B,$$

где $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы,

$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных,

$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Найдем $|A|$ – определитель матрицы A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 3+3\cdot 2\cdot 3+5\cdot(-4)\cdot(-1)-$$

$$-3\cdot(-1)\cdot(-1)-(-4)\cdot 2\cdot 1-5\cdot 3\cdot 3=-3+18+20-3+8-45=-5.$$

Так как $|A| \neq 0,$ то система уравнений имеет единственное решение, которое ищется по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Найдем A^{-1} – матрицу, обратную к матрице A. Для этого воспользуемся формулой:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T.$$

Матрица $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ является матрицей алгебраических дополнений для матрицы A. Ее элементы определяются также как алгебраические дополнения элементов определителя матрицы. Матрица $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$ транспонированная по отношению к матрице $\tilde{A},$ называется присоединенной матрицей.

Таким образом,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -3 - (-8) = 5,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -\left(15 - 6\right) = -9,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -20 - (-3) = -17,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -\left(9 - 4\right) = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-3) = 6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -\left(-4-9\right) = 13,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6-1 = 5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -\left(2-(-5)\right) = -7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1-15 = -16.$$

Тогда

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -17 \\ -5 & 6 & 13 \\ 5 & -7 & -16 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -9 & 6 & -7 \\ -17 & 13 & -16 \end{pmatrix}.$$

Подставив найденную матрицу в формулу для A^{-1}, получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -9 & 6 & -7 \\ -17 & 13 & -16 \end{pmatrix}.$$

В данном случае удобнее не умножать матрицу на $-\frac{1}{5}$ поскольку появятся дроби.

Подставим A^{-1} в формулу для X:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 \\ -9 & 6 & -7 \\ -17 & 13 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{-5}\cdot\begin{pmatrix}5\cdot1+(-5)\cdot3+5\cdot2\\-9\cdot1+6\cdot3+(-7)\cdot2\\-17\cdot1+13\cdot3+(-16)\cdot2\end{pmatrix}=\frac{1}{-5}\cdot\begin{pmatrix}0\\-5\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

$X=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ или $x=0,\ y=1,\ z=2.$

Проверка: $\begin{cases}0+3\cdot1-2=1-\textit{верно},\\5\cdot0-1+2\cdot2=3-\textit{верно},\\3\cdot0-4\cdot1+3\cdot2=2-\textit{верно}.\end{cases}$

<u>Ответ:</u> $x=0,\ y=1,\ z=2.$

<u>Решение:</u> б) методом Крамера.

Найдем $|A|$ – определитель матрицы A. Определитель матрицы A также обозначают Δ.

$$|A|=\Delta=\begin{vmatrix}1&3&-1\\5&-1&2\\3&-4&3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot3+3\cdot2\cdot3+5\cdot(-4)\cdot(-1)-$$

$$-3\cdot(-1)\cdot(-1)-(-4)\cdot2\cdot1-5\cdot3\cdot3=-3+18+20-3+8-45=-5.$$

Так как $\Delta\neq0$, то система уравнений имеет единственное решение. Далее найдем вспомогательные определители $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$. Чтобы найти определитель Δ_1 нужно в определителе Δ заменить первый столбец на столбец свободных членов:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&3&-1\\3&-1&2\\2&-4&3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot3+3\cdot2\cdot2+3\cdot(-4)\cdot(-1)-$$

$$-2\cdot(-1)\cdot(-1)-(-4)\cdot2\cdot1-3\cdot3\cdot3=-3+12+12-2+8-27=0.$$

Чтобы найти определитель Δ_2 нужно в определителе Δ заменить второй столбец на столбец свободных членов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot(-1) -$$

$$-3\cdot 3\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot 3 = 9 + 6 - 10 + 9 - 4 - 15 = -5.$$

Чтобы найти определитель Δ_3 нужно в определителе Δ заменить третий столбец на столбец свободных членов:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 3 + 5\cdot(-4)\cdot 1 -$$

$$-3\cdot(-1)\cdot 1 - (-4)\cdot 3\cdot 1 - 5\cdot 3\cdot 2 = -2 + 27 - 20 + 3 + 12 - 30 = -10.$$

Неизвестные x, y, z найдем по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{-5} = 0;$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1;$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2.$$

<u>Ответ:</u> $x = 0,\ y = 1,\ z = 2.$

<u>Решение:</u> б) методом Гаусса.

Суть метода Гаусса состоит в преобразовании исходной системы линейных уравнений в равносильную систему, имеющую специальный вид, которая легко решается. Используются следующие преобразования системы уравнений:

— перестановка местами уравнений;

— прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на некоторое число.

Преобразования удобнее проводить не над самими уравнениями, а над матрицей их коэффициентов. Для данной системы линейных уравнений матрица коэффициентов будет иметь вид:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 5 & -1 & 2\\ 3 & -4 & 3\end{pmatrix}.$$

Составим также расширенную матрицу системы $A|B$, в которую включен столбец свободных членов:

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -1 & 1\\ 5 & -1 & 2 & 3\\ 3 & -4 & 3 & 2\end{array}\right).$$

Задача заключается в том, чтобы, производя указанные выше преобразования над строками, привести расширенную матрицу системы $A|B$ к виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & a & b & c\\ 0 & 1 & d & e\\ 0 & 0 & 1 & f\end{array}\right).$$

Преобразуем расширенную матрицу $A|B$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -1 & 1\\ 5 & -1 & 2 & 3\\ 3 & -4 & 3 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & -16 & 7 & -2\\ 3 & -4 & 3 & 2\end{array}\right)\sim$$

- ко второй строке прибавили первую, умноженную на -5,

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & -16 & 7 & -2\\ 0 & -13 & 6 & -1\end{array}\right)\sim$$

- к третьей строке прибавили первую, умноженную на -3,

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & -16 & 7 & -2\\ 0 & 0 & 6-\frac{91}{16} & -1+\frac{26}{16}\end{array}\right)\sim$$

- к третьей строке прибавили вторую, умноженную на $-\dfrac{13}{16}$,

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{7}{16} & \dfrac{1}{8} \\ 0 & 0 & \dfrac{5}{16} & \dfrac{5}{8} \end{array}\right)\sim$$

- вторую строку разделили на -16,

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{7}{16} & \dfrac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)\sim$$

- третью строку разделили на $\dfrac{5}{16}$,

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y-z=1, \\ y-\dfrac{7}{16}z=\dfrac{1}{8}, \\ z=2, \end{cases}$$

Решая ее снизу вверх (обратным ходом метода Гаусса), получаем

$$x=0,\ y=1,\ z=2.$$

<u>Ответ:</u> $x=0,\ y=1,\ z=2.$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

Задание 1. Выполнить действия: а) $A \cdot B$, б) $2A + 3B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 2

Задание 1. Выполнить действия: а) $A \cdot B$, б) $2A + 3B$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 0 \\ 5x + y + z = 10 \\ -4x - y = -6 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 3

Задание 1. Выполнить действия: а) $A \cdot B$, б) $2A+3B$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+4y-3z=0 \\ 5x+y+z=10 \\ -4x-y=-6 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 4

Задание 1. Выполнить действия: а) $A \cdot B$, б) $2A+3B$.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 2. Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Задание 3. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 6x+y+z=-4 \\ y-3z=28 \\ 5x+z=-8 \end{cases}$$

ВАРИАНТ 5

Задание 1. Выполнить действия: а) $A \cdot B$, б) $2A+3B$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & -3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 1\\ 2 & -2 & -3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Задание 2.</u> Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Задание 3.</u> Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}-3x-y-z=4\\ x+2y+3z=7\\ 5x-3y+4z=-30\end{cases}$$

ВАРИАНТ 6

<u>Задание 1.</u> Выполнить действия: а) $A\cdot B$, б) $2A+3B$.

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ -2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

<u>Задание 2.</u> Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

<u>Задание 3.</u> Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}x+y+z=6\\ 2x+3y+4z=13\\ 4x-5y+5z=-4\end{cases}$$

ВАРИАНТ 7

<u>Задание 1.</u> Выполнить действия: а) $A\cdot B$, б) $2A+3B$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -3\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

<u>Задание 2.</u> Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

<u>Задание 3.</u> Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}-x+y+2z=14\\ 3x-2y+z=4\\ 2x+4y+z=26\end{cases}$$

ВАРИАНТ 8

<u>Задание 1.</u> Выполнить действия: а) $A\cdot B$, б) $2A+3B$.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ 2 & -4 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 2 & 1 & -3\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

<u>Задание 2.</u> Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Задание 3.</u> Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}2x-y=0\\ x+3z=-10\\ 5y-z=-7\end{cases}$$

ВАРИАНТ 9

<u>Задание 1.</u> Выполнить действия: а) $A\cdot B$, б) $2A+3B$.

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Задание 2.</u> Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

<u>Задание 3.</u> Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x+y=13\\ x-y+2z=9\\ 5x+2y-5z=-2\end{cases}$$

ВАРИАНТ 10

<u>Задание 1.</u> Выполнить действия: а) $A\cdot B$, б) $2A+3B$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Задание 2.</u> Найти обратную матрицу к заданной, сделать проверку.

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

<u>Задание 3.</u> Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}5x+y-z=-11\\ 2x+3y+z=-3\\ x-y+2z=0\end{cases}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение матрицы.
2. Для каких матриц определена операция суммы? Как выполняется суммирование матриц?
3. Как осуществляется умножение матрицы на число?
4. Для каких матриц определена операция умножения? Как выполняется умножение матриц?
5. Что такое определитель матрицы?
6. Назовите способы вычисления определителя матрицы 3x3.
7. Дайте определение обратной матрицы.
8. Задайте формулу для вычисления обратной матрицы.
9. Каким способом можно проверить, что обратная матрица найдена верно?
10. Чему не может быть равен определитель основной матрицы системы при решении СЛАУ матричным методом и методом Крамера?
11. По какой формуле вычисляются неизвестные в матричном методе?
12. По каким формулам вычисляются неизвестные в методе Крамера?
13. Любые ли СЛАУ можно решить с помощью метода Гаусса?

Литература

Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д.В. Беклемишев. — 18-е изд., перераб. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-4916-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/152643 — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Бугров Я.С. Сборник задач по высшей математике: учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — 4-е изд. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 304 с. — ISBN 5-9221-0177-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/2124. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учебник для вузов / Бугров Я.С., Никольский С.М. - 4-е изд., перераб. и доп. - Ростов-на-Дону: Феникс, 1997. - 284 с. - (Высш. математика). - ISBN 5-222-00222-5.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Письменный Д.Т. - 4-е изд. - М.: Айрис-пресс, 2006. - 602 с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 5-8112-1778-1.