

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

**Учебно-методическое пособие для студентов факультета лесного
хозяйства, лесопромышленных технологий и садово-паркового
строительства**

Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. Баумана

Москва 2019

УДК 512.64
ББК 22.143

Факультет «Космический»

Кафедра «Высшая математика и физика» (К-6 МФ)

Автор:

О.М.Полещук

*Рекомендовано Научно-методическим советом МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебно-методического пособия*

**Элементы линейной алгебры. Учебно-методическое пособие для
самостоятельной работы студентов / О.М.Полещук – Москва: Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. – 39 с.**

В учебном издании представлены учебно-методические и справочные материалы для освоения студентами модуля «Элементы линейной алгебры» дисциплины «Математика». Изложены необходимые теоретические материалы, подробно изложены примеры решения задач, приведены вопросы для самоконтроля и задачи для самостоятельного решения. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета лесного хозяйства, лесопромышленных технологий и садово-паркового строительства.

.

УДК 512.64
ББК 22.143

©

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

© Оформление. Издательство

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019

Оглавление

Предисловие.....	4
1. Матрицы. Операции с матрицами. Свойства операций с матрицами.	6
2. Определители. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Свойства определителей.....	14
3. Единичная и обратная матрицы. Общие понятия о системах линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и их свойства. Решение СЛАУ методом Крамера.....	27
4. Решение СЛАУ матричным способом и методом Гаусса.....	34
Рекомендуемая литература.....	39

Предисловие

Учебно-методическое пособие является учебным изданием, содержащим учебно-методические и справочные материалы для освоения модуля «Элементы линейной алгебры» дисциплины «Математика». **Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров факультета лесного хозяйства, лесопромышленных технологий и садово-паркового строительства.**

Цель изучения модуля дисциплины – освоение теоретических и практических основ модуля «Элементы линейной алгебры» годовой дисциплины «Математика».

После изучения дисциплины студенты овладеют:

- Теоретическими основами оперирования с матрицами и решения систем линейных алгебраических уравнений,
- практическими приемами оперирования матрицами для анализа и обработки информации профессионального поля деятельности,
- практическими навыками моделирования профессиональных задач на основе матриц и систем линейных алгебраических уравнений,
- практическими навыками решения оптимизационных задач профессионального поля деятельности на основе систем линейных алгебраических уравнений,

Планируемые результаты обучения

Модуль «Элементы линейной алгебры» дисциплины «Математика» представляет собой логически заверченный раздел курса. После обучения студенты смогут использовать теоретические знания и практические навыки для выполнения курсовых и дипломного проектов, а также при моделировании и решении задач профессионального поля деятельности.

Для изучения модуля «Элементы линейной алгебры» дисциплины «Математика» необходимы знания «школьного» курса математики.

Методика проработки и освоения материала модуля «Элементы линейной алгебры» дисциплины «Математика».

Для освоения материала модуля «Элементы линейной алгебры» дисциплины «Математика» предусмотрена самостоятельная работа студента, включающая проработку лекционного курса и выполнение контрольной работы.

1. Матрицы и операции с матрицами.

Матрицей размеров $m \times n$ называется прямоугольная таблица, составленная из $m \times n$ элементов (чисел, символов) произвольной природы представленных в виде m строк и n столбцов. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матриц используются прописные буквы латинского алфавита ($A, B, X, \dots$), а для обозначения элементов матриц - строчные ($a_{ij}, b_i, x_i, \dots$) с двумя или одним индексами.

Сокращенно матрицу A размеров $m \times n$ обозначают $A = (a_{ij})_{m \times n}$, где буквой a с двумя индексами i и $j - (a_{ij})$ обозначают элементы матрицы. Строки и столбцы матрицы считаются пронумерованными: первый индекс $i (i = \overline{1, m})$ указывает номер строки, а второй индекс $j (j = \overline{1, n})$ - номер столбца, где расположен элемент a_{ij} . Так, например, элемент a_{23} расположен во второй строке и в третьем столбце.

Частными случаями матриц являются матрица-строка и матрица-столбец.

$A = (a_{1j})_{1 \times n} = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n})$ - матрица - строка (1 строка, n столбцов);

$$B = (b_{i \times 1})_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix} - \text{матрица - столбец (} m \text{ строк, 1 столбец)}.$$

Элементы матрицы-строки или матрицы-столбца удобно обозначать буквой с одним индексом.

Матрица, состоящая из одинакового количества строк и столбцов ($m = n$), называется **квадратной матрицей** n -го порядка.

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = (a_{ij})_{n^2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{квадратная матрица } n\text{-го порядка.}$$

Квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n^2}$ называется **симметрической**, если

$$\forall (i, j) \in \{(i, j) \mid i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}\}: a_{ij} = a_{ji}$$

и **кососимметрической**, если

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \forall i = j, \\ -a_{ji} & \forall i \neq j. \end{cases}$$

Примеры.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ - прямоугольная матрица размеров 2×3 (2 строки, 3 столбца).

2. $X = (1 \ 0 \ -5 \ 3)$ - матрица - строка (1 строка, 4 столбца).

3. $B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ - матрица - столбец (3 строки, 1 столбец).

4. $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ - прямоугольная матрица размеров 4×2 (4 строки, 2 столбца).

5. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 2-го порядка (2 строки, 2 столбца).

6. $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 3-го порядка (3 строки, 3 столбца).

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица 3-го порядка.

8. $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ - кососимметрическая матрица 3-го порядка.

Действия с матрицами.

Рассмотрим две матрицы одинакового размера

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \quad \text{и} \quad B = (b_{ij})_{m \times n}, \quad | \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Равенство матриц.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

Пример. Найдем матрицу B равную матрице A , если $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. $B = A \Leftrightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц.

$$A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

Пример. Найдем сумму $A + B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. $A + B = \begin{pmatrix} 1 + (-5) & -2 + 6 & 3 + (-8) \\ -4 + 7 & 5 + (-3) & -6 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$

Умножение матрицы на число.

$$\text{Для } \forall c \in R \quad cA = c(a_{ij})_{m \times n} = (ca_{ij})_{m \times n}.$$

Пример. Произведение матрицы на число

$$-4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot (-1) & (-4) \cdot 2 \\ (-4) \cdot 0 & (-4) \cdot (-3) \\ (-4) \cdot (-6) & (-4) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 12 \\ 24 & -20 \end{pmatrix}.$$

Вычитание матриц.

$$A - B = A + (-1)B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}.$$

Пример. Найдем разность $A - B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. $A - B = \begin{pmatrix} -1 - 3 & 2 - 0 \\ -3 - (-1) & 4 - (-2) \\ -5 - (-4) & 6 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Следствие. Для $\forall \mu, \nu \in R$:

$$\mu A + \nu B = \mu (a_{ij})_{m \times n} + \nu (b_{ij})_{m \times n} = (\mu a_{ij} + \nu b_{ij})_{m \times n}.$$

Пример. Найдем $-2A + 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{aligned} -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -6 & -8 & 2 \\ -4 & 6 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 & -9 \\ 0 & 15 & -6 \\ 3 & -12 & 18 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 + 6 & 0 - 3 & 4 - 9 \\ -6 + 0 & -8 + 15 & 2 - 6 \\ -4 + 3 & 6 - 12 & -10 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 \\ -6 & 7 & -4 \\ -1 & -6 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Умножение матриц.

Для выполнения этого действия важны порядок расположения множителей и их размеры. Произведение двух матриц AB существует при условии, что число столбцов матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ равно числу строк матрицы $B = (b_{jk})_{n \times l}$. Только при выполнении этого условия результатом произведения матрицы A на матрицу B является матрица C равная

$$AB = C = (c_{ik})_{m \times l}, \text{ где } c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \quad (i = \overline{1, m}; k = \overline{1, l}),$$

у которой число строк равно числу строк матрицы A , а число столбцов равно числу столбцов матрицы B .

Пример. Найдем произведения AB и BA матриц A и B , если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 \\ 5 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 & 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 & 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

;

BA – не существует.

Пример. Найдем произведения AB и BA матриц A и B , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) & 4 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) & 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -2 \\ 21 & 3 & -15 \\ 17 & -4 & -10 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + (-5) \cdot 4 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + (-5) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -16 & -1 \end{pmatrix} \neq AB$$

Замечание.

Произведения матриц AB и BA существуют, если $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ji})_{n \times m}$.

Результатами произведений являются: AB – квадратная матрица m – го порядка;

BA – квадратная матрица n – го порядка.

Возведение в степень.

Для любой квадратной матрицы n – го порядка $A = (a_{ij})_{n \times n}$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-множителей}}.$$

В частности,

$$A^2 = AA = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk} \right)_{n^2} \neq \left((a_{ij})^2 \right)_{n^2}.$$

Пример. Возведение матрицы в квадрат

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) & -2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \\ -1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Транспонирование матрицы.

Транспонированием матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ называется преобразование ее в матрицу $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$, в результате которого строки матрицы A в той же последовательности будут столбцами матрицы A^T и наоборот.

Пример. Найдем транспонированные матрицы для матриц $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}^T = (3 \quad -4 \quad 2), \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Выполняются равенства

$$A^{TT \dots T} = \begin{cases} A^T, & \text{если матрица транспонируется нечетное число раз;} \\ A, & \text{если матрица транспонируется четное число раз.} \end{cases}$$

Свойства операций с матрицами.

Сложение матриц.

- 1) $A + B = B + A$ – коммутативно;
- 2) $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$ – ассоциативно;
- 3) $\forall A \exists$ единственная матрица O такая, что $A + O = A$.

$O = (0)_{m \times n}$ – нулевая матрица (все элементы равны нулю).

- 4) $\forall A \exists$ единственная матрица $\bar{A}$ такая, что $A + \bar{A} = O$.

$\bar{A} = (-1)A = (-a_{ij})_{m \times n}$ – противоположная матрица.

Умножение матрицы на число.

$\forall \lambda, \mu \in R :$

- 1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B;$
- 2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$
- 3) $\lambda(\mu A) = \lambda\mu A.$

Произведение матриц.

- 1) В общем случае $AB \neq BA.$
- 2) $ABC = (AB)C = A(BC)$ – ассоциативно.
- 3) $A(B+C) = AB + AC$ – дистрибутивно относительно сложения.
- 4) $(AB)^T = B^T A^T.$

Замечания.

Разность матриц $A-B$ можно определить как сумму $A + \bar{B}$, то есть $A - B = A + \bar{B}$

Пример. Найдем разность матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & -1+4 \\ -5+(-1) & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Всякую квадратную матрицу n -го порядка $A = (a_{ij})_{n^2}$ можно представить как сумму симметрической $A^{(+)} = (a_{ij}^{(+)})_{n^2}$ и кососимметрической $A^{(-)} = (a_{ij}^{(-)})_{n^2}$ матриц того же порядка $A = A^{(+)} + A^{(-)}$. Элементы матриц $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$ определяются формулами

$$a_{ij}^{(+)} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}, \quad a_{ij}^{(-)} = \begin{cases} a_{ii}^{(-)} = 0 \quad (\forall i = j), \\ a_{ij}^{(-)} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2} \quad (\forall i \neq j). \end{cases}$$

Пример. Представим в виде суммы симметрической и

кососимметрической матриц матрицу $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$

Вопросы для самоконтроля.

1. Что такое матрица?
2. Что такое квадратная, симметрическая и кососимметрическая матрица?
3. Какие операции определены для матриц?
4. Любые ли матрицы можно складывать?
5. Любые ли матрицы можно перемножать?
6. Можно ли транспонировать любую матрицу?

Задачи для самостоятельного решения.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу $(A \cdot B)^T - 3 \cdot E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Найдите матрицу A^3 , где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = (-3 \ 1)$. Найдите матрицу $A^T \cdot B^T$.
4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = (-3 \ 1)$. Найдите матрицу $A \cdot B^T$.
5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ Найдите матрицу $(A \cdot B) - 2C$.

2. Определители и их свойства.

Размещения, перестановки, сочетания.

Рассмотрим множество X_n , состоящее из n элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ произвольной природы, $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Из элементов $x_i \in X_n$ ($i = \overline{1, n}$) образуем группы (подмножества) $X_n^m \subset X_n$, составленные из выбранных произвольным способом m ($m \leq n$) элементов $x_i \in X_n$:

$$X_n^m = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}, \text{ где } I_n^m = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset N_n = \{1; 2; \dots; n\} \left(i_k \neq i_l \forall (k, l) | k \neq l \right).$$

Вопрос: сколько таких подмножеств (групп) можно составить?

Поскольку все элементы множества X_n пронумерованы числами $1, 2, \dots, n$, то задача определения числа таким способом составленных подмножеств $X_n^m \subset X_n$, сводится к определению числа числовых подмножеств $I_n^m \subset I_n$.

Подмножества бывают упорядоченные и неупорядоченные. Подмножество называется **упорядоченным**, если существенным является состав элементов в нем и порядок их расположения. Два упорядоченных подмножества $I_n^m = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ и $J_n^m = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ считаются различными, то есть $I_n^m \neq J_n^m$, если они отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения. Два упорядоченных подмножества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов и совпадает порядок следования этих элементов друг за другом. Подмножество называется **неупорядоченным**, если порядок следования элементов в нем не существенен. Неупорядоченные подмножества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, но отличаются порядком следования этих элементов. Неупорядоченные подмножества считаются различными, если они состоят из разных элементов.

Упорядоченными подмножествами являются **перестановки**, если $m = n$ и **размещения**, если $m < n$.

Рассмотрим n элементов и составим из них всевозможные упорядоченные выборки. На первом месте может стоять любой из n элементов, на втором месте любой из оставшихся $n - 1$ элементов, на третьем месте любой

из оставшихся $n-2$ элементов и т.д. Всего мы получим $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1 = n!$ различных выборов, а их число

$$P_n = n!$$

называется **числом перестановок** из n элементов.

Рассмотрим n элементов и составим всевозможные упорядоченные выборки из m элементов. На первом месте может стоять любой из n элементов, на втором месте любой из оставшихся $n-1$ элементов, на третьем месте любой из оставшихся $n-2$ элементов и на m -ом месте любой из $n-m+1$ элементов. Всего мы получим $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$

различных выборов, а их число

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

называется числом размещений из n элементов по m .

Неупорядоченные подмножества m элементов из n называются **сочетаниями**. Сочетания считаются равными, если они имеют одинаковый состав элементов и различными, если имеют разный состав элементов. Рассмотрим n элементов и составим всевозможные сочетания из m элементов. Число сочетаний будет меньше, чем число размещений из n элементов по m ровно в $m!$ раз, поскольку именно $m!$ способами можно упорядочить m элементов.

Число неупорядоченных выборов из n элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

и называется числом сочетаний из n элементов по m .

Свойства перестановок и сочетаний.

1. $P_0 = 0! = 1$.
2. $P_n = P_{n-1} \cdot n$.
3. $C_n^{m-k} = C_n^{n-m+k} \ (\forall k \leq m)$. В частности, $C_n^m = C_n^{n-m}$.

$$4. C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}.$$

Пример. Перечислим все комбинации из двух чисел $I_2 = \{1, 2\}$.

Перестановки (размещения из 2 по 2): $(1, 2), (2, 1)$ ($P_2 = A_2^2 = 2 \cdot 1 = 2! = 2$).

Размещения по одному: $(1), (2)$ ($A_2^1 = 2$).

Сочетания по одному: $\{1\}, \{2\}$ ($C_2^1 = 2$). Сочетания по два:

$$\{1; 2\} = \{2; 1\} \quad (C_2^2 = 1).$$

Пример. Перечислим все комбинации из трех чисел $I_3 = \{1, 2, 3\}$.

Перестановки (размещения из 3 по 3). $(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1)$, ($P_3 = A_3^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$).

Размещения по одному: $(1), (2), (3)$, ($A_3^1 = 3$). Размещения по два: $(1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 3), (3; 1), (3; 2)$ ($A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$).

Сочетания по одному: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$, ($C_3^1 = 3$). Сочетания по два:

$$\{1; 2\} = \{2; 1\}, \{1; 3\} = \{3; 1\}, \{2; 3\} = \{3; 2\}, \quad (C_3^2 = 3).$$

$$\{1; 2; 3\} = \{1; 3; 2\} = \{2; 1; 3\} = \{2; 3; 1\} = \{3; 1; 2\} = \{3; 2; 1\}, \quad (C_3^3 = 1).$$

Инверсии.

Говорят, что в перестановке $I_n^n = (i_1; i_2; \dots; i_k; \dots; i_l; \dots; i_n)$ из чисел $\{1; 2; \dots; n\}$ два числа i_k и i_l образуют **инверсию**, если большее число стоит перед меньшим числом ($i_k > i_l$ при $k < l$), если же меньшее стоит впереди большего ($i_k < i_l$ при $k < l$), то - **порядок**. Перестановка I_n^n называется четной, если число инверсий в ней четно, и нечетной, если число инверсий в ней нечетно.

Способ подсчета числа инверсий: следуя слева направо, для каждого из чисел i_k считаем, сколько чисел меньше i_k стоит правее него, и все полученные числа складываем.

Пример. Перестановки из чисел $\{1; 2\}$. Всего можно составить $2! = 1 \cdot 2 = 2$ перестановки: $(1; 2), (2; 1)$, из них

$(1; 2)$ – четная (число инверсий равно 0),
 $(2; 1)$ – нечетная (число инверсий равно 1).

Пример. Перестановки из чисел $\{1; 2; 3\}$. Всего можно составить $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ перестановок: $(1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1)$,
из них четные перестановки:

$$\begin{cases} (1; 2; 3) - \text{число инверсий равно } 0, \\ (2; 3; 1) - \text{число инверсий равно } 1+1=2, \\ (3; 1; 2) - \text{число инверсий равно } 2; \end{cases}$$

нечетные перестановки:

$$\begin{cases} (1; 3; 2) - \text{число инверсий равно } 1, \\ (2; 1; 3) - \text{число инверсий равно } 1, \\ (3; 2; 1) - \text{число инверсий равно } 2+1=3. \end{cases}$$

Пример. Перестановка $(4; 3; 2; 1)$ – четная (число инверсий равно $3+2+1=6$).

Пример. Перестановка $(5; 2; 8; 3; 7; 1; 9; 6; 4)$ – нечетная (число инверсий равно $4+1+5+1+3+2+1=17$). Перестановка $(8; 1; 9; 7; 6; 5; 2; 4; 3)$ – четная (число инверсий равно $7+6+5+4+3+1=26$).

Определители.

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.

Для квадратной матрицы порядка $n : A = (a_{ij})_{n^2}$ число

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{I_n=(i_k)} (-1)^{\text{inv}(I_n)} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} =$$

$$= \left(\sum_{J_n=(j_l)} (-1)^{\text{inv}(J_n)} a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdot \dots \cdot a_{j_n n} \right)$$

называется определителем (детерминантом) n -го порядка, или определителем

(детерминантом) матрицы A , где сумма берется по всем различным между собой перестановкам $I_n = (i_1; i_2; \dots; i_n) (J_n = (j_1; j_2; \dots; j_n))$ чисел $(1; 2; \dots; n)$, где

$$\begin{aligned} \text{inv}(I_n) & - \text{число инверсий в перестановке } I_n \\ \text{inv}(J_n) & - \text{число инверсий в перестановке } J_n. \end{aligned}$$

Произведения $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} (a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdot \dots \cdot a_{j_n n})$ называются членами определителя. Число всех членов определителя равно $n!$. Каждый член определителя равен произведению n элементов матрицы $A = (a_{ij})_{n^2}$, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем это произведение берется со своим знаком, если перестановка $I_n (J_n)$ четная, и с противоположным знаком, если нечетная.

Элементы a_{ij} (строки и столбцы) матрицы $A = (a_{ij})_{n^2}$ называются соответственно элементами (строками и столбцами) ее определителя. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ образуют побочную диагональ. Произведение элементов главной диагонали при любом n входит в определитель n -го порядка всегда со знаком плюс, а произведение элементов побочной диагонали входит со знаком минус или плюс в зависимости от четности перестановки $n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$.

Определитель 1 - го порядка.

Определитель 1 - го порядка равен своему единственному элементу:

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

Пример. $\det(-2) = -2; \det(100) = 100$.

Определитель 2 - го порядка.

Определитель 2 - го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Перестановки: $(1; 2) - \text{четная}; (2; 1) - \text{нечетная}$.

Примеры.

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2. \quad б) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 6 - 2 \cdot (-4) = -18 + 8 = -10.$$

$$в) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin^2 \alpha - (-\cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$г) \begin{vmatrix} 1 & -x \\ x & 1-2x \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-2x) - (-x) \cdot x = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2.$$

Определитель 3 - го порядка.

Определитель 3 - го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Перестановки: $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ – четные; $(3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)$ – нечетные.

Выражение для вычисления определителя 3-го можно получить, по следующим правилам:

1) по правилу треугольников, которое можно пояснить схемами, на которых произведения элементов с указанными знаками соединены отрезками:

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} & ; \\ (+) & (-) & \end{array}$$

2) по правилу прямоугольника. Из элементов определителя и двух его первых столбцов составим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \searrow a_{22} & \searrow a_{23} & \searrow a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \searrow a_{33} & \searrow a_{31} & \searrow a_{32} \end{pmatrix}$$

Произведения трех элементов, соединенных стрелками, направленными слева направо, входят со знаком плюс.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \swarrow & a_{23} \swarrow & a_{21} \swarrow & a_{22} \\ a_{31} \swarrow & a_{32} \swarrow & a_{33} \swarrow & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Произведения трех элементов, соединенных стрелками, направленными справа налево, входят со знаком минус.

Пример . Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) по правилу треугольников

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-4) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot (-2) - (-1) \cdot 0 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) \cdot (-2) - 3 \cdot 5 \cdot 1 =$$

$$= -30 + 4 + 0 - 0 - 16 - 15 = -57;$$

б) по правилу прямоугольника. Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-4) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot (-2) - (-1) \cdot 0 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) \cdot (-2) - 3 \cdot 5 \cdot 1 =$$

$$= -30 + 4 + 0 - 0 - 16 - 15 = -57$$

Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя.

Минором элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $n-1$ -го порядка M_{ij} , который образован из элементов исходного определителя вычеркиванием из них элементов i -ой строки и j -го столбца.

Так, например, минорами элементов определителя 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ являются определители первого порядка:

$M_{11} = a_{22}, M_{12} = a_{21}, M_{21} = a_{12}, M_{22} = a_{11}$; минорами элементов определителя 3-го

порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ являются определители второго порядка:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя, для которых сумма индексов $(i + j)$ – *четное число* равны $A_{ij} = M_{ij}$, а для которых $(i + j)$ – *нечетное число* равны: $A_{ij} = -M_{ij}$. Так, например, для элементов определителя 2-го порядка:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = M_{11}, A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -M_{12}, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 M_{21} = -M_{21}, A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 M_{22} = M_{22}; \end{aligned}$$

для элементов определителя 3-го порядка:

$$\begin{aligned} A_{11} &= M_{11}, A_{12} = -M_{12}, A_{13} = M_{13}, \\ A_{21} &= -M_{21}, A_{22} = M_{22}, A_{23} = -M_{23}, \\ A_{31} &= M_{31}, A_{32} = -M_{32}, A_{33} = M_{33}. \end{aligned}$$

Пример. Найдем миноры и алгебраические дополнения элементов

$$a_{12}, a_{23}, a_{31} \text{ определителя } \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3, A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -M_{12} = 3;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 14 = 6, A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 M_{23} = -M_{23} = -6;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3, A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 M_{31} = M_{31} = -3.$$

Свойства определителей.

А) В определителе строки и столбцы равноправны.

Б) Определитель не меняется при транспонировании.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) = -4 + 6 = 2. \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 7 + (-2) \cdot (-4) \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \cdot (-5) - 3 \cdot 3 \cdot 2 - (-2) \cdot (-2) \cdot 7 - 1 \cdot (-4) \cdot (-5) = 21 + 16 + 30 - 18 - 28 - 20 = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 7 + (-2) \cdot (-5) \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot (-4) - 2 \cdot 3 \cdot 3 - (-2) \cdot (-2) \cdot 7 - 1 \cdot (-5) \cdot (-4) = 21 + 30 + 16 - 18 - 28 - 20 = 1.$$

В) От перестановки местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

Пример. Поменяем в определителе $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2$ столбцы местами, а потом

строки местами и вычислим полученные определители.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2, \quad \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2.$$

Пример. Поменяем в определителе $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 1$ местами второй и

третий столбцы и вычислим полученный определитель.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot (-5) + 3 \cdot 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) \cdot 7 - (-2) \cdot (-4) \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 7 - \\ - 3 \cdot (-2) \cdot (-5) = 20 + 18 + 28 - 16 - 21 - 30 = -1$$

Г) Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Пример.

$$\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -9 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-9 + 12) = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (9 - 12) = \\ = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 6 \cdot (3 - 4) = -6$$

Д) Если все элементы какой-либо строки (какого-либо столбца) представлены в виде суммы двух слагаемых

$$a_{kl} = b_{kl} + c_{kl} \quad \left(k = \overline{1; n} \left(l = \overline{1; n} \right) \right),$$

то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы), кроме k -ой строки (l -го столбца) – такие же, как и в заданном определителе, а все элементы k -ой строки (l -го столбца) в первом определителе будут b_{kl} , а во втором определителе c_{kl} .

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2+0 & 3 \\ -2 & 2+1 & -4 \\ 2 & -2-3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix} = (14 + 16 + 12 - \\ - 8 - 28 - 12) + (7 - 0 + 18 - 12 + 0 - 6) = -6 + 7 = 1.$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0+2 & -2-3 & 3+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (9 + 0 + 12 -$$

$$-8 - 12 - 0) + (12 + 16 + 18 - 12 - 16 - 18) = 1 + 0 = 1.$$

Е) Определитель равен нулю, если:

Все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю.

Определитель содержит две одинаковые строки (столбца).

В определителе все элементы каких-либо двух строк (столбцов) пропорциональны.

В определителе какая-либо строка (какой-либо столбец) является линейной комбинацией других строк (столбцов).

Пример.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ (все элементы третьего столбца равны нулю).}$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (первая и третья строки одинаковые).}$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -2(-1) & -2(2) & -2(-3) \end{vmatrix} = 0$$

(первая и третья строки пропорциональны)

Пример.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3+2 \\ 2 & 1 & 6+1 \\ 3 & -5 & 9-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \cdot (-1) + 2 \\ 2 & 1 & 3 \cdot (2) + 1 \\ 3 & -5 & 3 \cdot (3) - 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

(третий столбец является суммой второго столбца и умноженного на 3 первого столбца.)

7. Величина определителя не изменится, если к элементам какой либо строки (какого либо столбца) прибавить соответствующие элементы любой другой строки (любого другого столбца) умноженные на любое число.

Пример. Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix}$, который равен 1.

Прибавим ко второй строке первую строку, умноженную на 2, и вычислим полученный определитель.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix} = (-7 - 8) - (-6 - 10) = -15 + 16 = 1.$$

Ж) Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения .

Пример. Найдем определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ по второму столбцу.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 45 - 16 = -57.$$

3) Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки (другого столбца) равна нулю.

Пример. Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 7 \end{vmatrix}$ и третий столбец.

Найдем сумму $\sum_{i=1}^3 a_{i3}A_{i1} = \sum_{i=1}^3 a_{i3}(-1)^{1+i} M_{i1}$.

Таким образом мы находим сумму произведение элементов третьего столбца на алгебраические дополнения первого столбца:

$$3(21-20) + (-4)(14-15) + 7(8-9) = 0.$$

Теорема. Если A, B - квадратные матрицы одного порядка, то $|AB| = |A||B|$

Рангом матрицы называется наивысший из порядков всевозможных ненулевых миноров этой матрицы.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что такое перестановки, сочетания, размещения и как определить их число?
2. Когда два числа образуют инверсию?
3. Что такое определитель и для каких матриц он существует?
4. Как вычисляется определитель?
5. Равноправны ли строки и столбцы при вычислении определителя?
6. Что такое минор элемента определителя?
7. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя?
8. Свойства определителей.

Задачи для самостоятельного решения.

6. При каком λ определитель $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ равен нулю?

7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ по третьей строке.

8. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{22}, a_{13}, a_{32}

определителя $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{vmatrix}$.

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$.

10. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 11 & 20 \\ -4 & 2 & -16 \end{vmatrix}$.

3. Единичная и обратная матрицы. Общие понятия о системах линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и их свойства.

Решение СЛАУ методом Крамера.

Матрица n -го порядка называется **единичной** и обозначается E , если на ее главной диагонали стоят единицы, а все остальные ее элементы равны нулю.

Определитель единичной матрицы равен единице.

Матрица A называется **вырожденной**, если ее определитель равен нулю.

Матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель не равен нулю.

Матрица A^{-1} называется **обратной** к матрице A , если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Утверждение. У вырожденной матрицы A не существует обратной матрицы.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $|A| = 0$, но при этом существует A^{-1} . Тогда $1 = |E| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 0|A^{-1}| = 0$. Противоречие, значит вырожденной матрицы A не существует обратной матрицы.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Рассмотрим присоединенную

матрицу $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где $A_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ - алгебраические

дополнения элементов $a_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ матрицы A . Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Одним из центральных вопросов линейной алгебры является вопрос о решении система линейных (первой степени относительно неизвестных) алгебраических уравнений (СЛАУ).

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящей из m уравнений первой степени с n неизвестными, называется система вида:

[illegible]

ИЛИ

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Решением СЛАУ называется упорядоченная система из n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, таких, что при подстановке вместо неизвестных x_i

соответствующих им значений α_j : $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ в уравнения СЛАУ, все уравнения обращаются в истинные равенства:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

СЛАУ называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если она не имеет решения. Совместная СЛАУ называется **определенной**, если она имеет единственное решение. Совместная СЛАУ называется **неопределенной** в противном случае.

Пример.

Система $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ 3x_1 - 5x_2 = -7 \end{cases}$ совместная и определенная, так как имеет единственное решение $(1; 2)$.

Пример.

Система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$ несовместная, так как ни при каких значениях неизвестных x_1 и x_2 оба уравнения не могут удовлетворяться одновременно. Действительно, если предположить существование таких чисел α_1 и α_2 , которые оба уравнения удовлетворяют одновременно, тогда из первого уравнения следует $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3$, а из второго: $2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2) = 2 \cdot 3 = 6 = 5?$.

Пример.

Система $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$ совместная и неопределенная, так как имеет больше одного решений, например, $(1; 1), (-1; 2), (3; 0)$ и еще много других. Отметим такой очевидный факт, что любая пара чисел $(\alpha_1; \alpha_2)$, которая будет удовлетворять первому уравнению, будет удовлетворять и второму. Действительно, если $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3$, то из второго уравнения следует, что

$2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2) = 2 \cdot 3 = 6 = 6$. Бесчисленное множество решений данной системы можно описать, например, таким способом. Полагая неизвестное $x_2 = c$, где c – любое число (параметр), а неизвестное $x_1 = 3 - 2c$, легко проверить, что пара чисел $(3 - 2c; c)$ – решение данной системы.

СЛАУ называется **однородной**, если все $b_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

СЛАУ называется **неоднородной**, если имеется хотя бы одно значение $b_i \neq 0$ $\left(\sum_{i=1}^m b_i^2 > 0 \right)$.

Однородная СЛАУ всегда совместная, так как она всегда имеет тривиальное (нулевое) решение $x = (0; 0; \dots; 0)$.

Тривиальное решение может быть не единственным. Так, например. Система
$$\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 4x - 6y = 0, \end{cases}$$
 кроме тривиального решения $(0; 0)$, имеет решения: $(3; 2)$, $(-6; -4)$, $(1, 5; 1)$ и еще много других.

Эквивалентные СЛАУ. Эквивалентные преобразования.

Рассмотрим две СЛАУ с одинаковым числом неизвестных:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (\text{СЛАУ 1});$$

$$c_{k1}y_1 + c_{k2}y_2 + \dots + c_{kn}y_n = d_k \quad (k = \overline{1, l}) \quad (\text{СЛАУ 2}).$$

(СЛАУ 1) и (СЛАУ 2) называются **эквивалентными** или **равносильными**, если все решения (СЛАУ 1) будут и решениями (СЛАУ 2) и все решения (СЛАУ 2) будут и решениями (СЛАУ 1).

Любые несовместные СЛАУ с одинаковым числом неизвестных считаются эквивалентными.

Эквивалентными преобразованиями СЛАУ называют следующие преобразования:

1) перестановка двух уравнений местами,

2) умножение обеих частей любого уравнения на любое отличное от нуля число,

3) прибавление к обеим частям любого уравнения соответствующих частей любого другого уравнения, умноженные на одно и тоже любое отличное от нуля число.

Пример.

Для системы $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ 3x_1 - 5x_2 = -7 \end{cases}$ эквивалентными будут следующие системы:

$$1) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = -7, \\ 2x_1 - 3x_2 = -4; \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} (2\mu)x_1 - (3\mu)x_2 = -(4\mu), \\ 3x_1 - 5x_2 = -7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ (3\nu)x_1 - (5\nu)x_2 = -(7\nu); \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2\mu)x_1 - (3\mu)x_2 = -(4\mu), \\ (3\nu)x_1 - (5\nu)x_2 = -(7\nu); \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (2 + (3\nu))x_1 + (-3 + (-5\nu))x_2 = -4 + (-7\nu), \\ 3x_1 - 5x_2 = -7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ (3 + (2\mu))x_1 + (-5 + (-3\mu))x_2 = -7 + (-4\mu). \end{cases}$$

Здесь μ и ν любые числа. Для данной системы эквивалентной также может быть любая другая система из двух уравнений, полученная эквивалентными преобразованиями исходных двух уравнений. Это свойство можно успешно применять для нахождения решения не только данной системы, но и в общем случае для исследования любых СЛАУ.

Решение СЛАУ методом Крамера.

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными

[illegible]

Обозначим через $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицу системы, а через

$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1j-1} & b_1 \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2j-1} & b_2 \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nj-1} & b_n \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ матрицу, которая получается из матрицы A

заменой j -го столбца на столбец свободных членов.

Тогда, если $|A| \neq 0$, то система имеет единственное решение $x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, j = \overline{1, n}$.

Доказательство. Проверим, что $x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, j = \overline{1, n}$ действительно является

решением системы. Систему можно представить в следующем виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1, n}. \quad \text{Тогда}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{|A_j|}{|A|} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{l=1}^n \frac{(-1)^{l+j} b_l M_{lj}}{|A|} = \sum_{l=1}^n b_l \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{l+j} a_{ij} M_{lj}}{|A|} = \begin{cases} b_i, i = l \\ 0, i \neq l \end{cases}. \quad \text{Докажем, что}$$

это решение единственное. Пусть система имеет еще какое-то решение

$x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$. Тогда $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^1 = b_i \quad i = \overline{1, n}$. Домножим обе части уравнений системы

на $(-1)^{i+k} M_{ik}$ и просуммируем по $i = \overline{1, n}$. Получим

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^1 (-1)^{i+k} M_{ik} = \sum_{i=1}^n b_i (-1)^{i+k} M_{ik} = |A_k|. \quad \text{Выражение, стоящее в левой}$$

части преобразуем следующим образом: $\sum_{j=1}^n x_j^1 \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+k} M_{ik}$, где

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+k} M_{ik} = \begin{cases} |A|, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}. \quad \text{Тогда получаем при } j = k \quad x_k = \frac{|A_k|}{|A|}, k = \overline{1, n}.$$

Значит решение единственно.

Если $|A| = 0$, а хотя бы один из $|A_j| \neq 0, j = \overline{1, n}$, то система решений не имеет.

Если $|A| = 0$ и $|A_j| = 0, j = \overline{1, n}$, то система решений не имеет или имеет бесконечно много решений.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что такое единичная матрица?
2. У каких матриц существует обратная матрица?
3. Что такое система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)?
4. Что такое решение СЛАУ?
5. Какие СЛАУ называются однородными и неоднородными?
6. Какие преобразования СЛАУ являются эквивалентными?
7. Какие СЛАУ называются эквивалентными или равносильными?
8. Что такое метод Крамера решения СЛАУ?

Задачи для самостоятельного решения.

11. Для каких матриц существуют обратные матрицы?

1. $\begin{pmatrix} 21 & -31 & 10 \\ 7 & 40 & -2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

12. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

13. При каком λ СЛАУ
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 \\ \lambda x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$
 не имеет единственного решения?

14. При каком λ СЛАУ
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \lambda x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$
 не имеет решений?

15. Решить систему
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ 3x_1 - 5x_2 = -7 \end{cases}$$
 методом Крамера.

4. Решение СЛАУ матричным способом и методом Гаусса.

Матричный метод решения СЛАУ.

Рассмотрим систему

[illegible]

и запишем ее в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, |A| \neq 0.$$

Тогда $X = A^{-1}B$.

Метод Гаусса решения СЛАУ.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и расширенной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix},$$

которая получается из матрицы системы добавлением

столбца свободных членов в качестве $n+1$ -ого столбца.

Будем считать, что $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то уравнения можно переставить и добиться выполнения этого условия. Умножим первую строку расширенной матрицы на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и прибавим ко второй строке, к третьей строке прибавим

первую строку, умноженную на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и так далее, к n -ой строке прибавим

первую строку, умноженную на $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$. После таких преобразований расширенная матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 & b_n^1 \end{pmatrix},$$

где $a_{ij}^1 = a_{ij} + a_{1j} \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right), b_i^1 = b_i + b_1 \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right), i = \overline{2, n}, j = \overline{2, n}$.

Будем считать, что $a_{22}^1 \neq 0$. Если это не так, то уравнения можно переставить и добиться выполнения этого условия. Умножим вторую строку расширенной матрицы на $-\frac{a_{32}^1}{a_{22}^1}$ и прибавим к третьей строке, к четвертой строке прибавим

вторую строку, умноженную на $-\frac{a_{42}^1}{a_{22}^1}$, и так далее, к n -ой строке прибавим

вторую строку, умноженную на $-\frac{a_{n2}^1}{a_{22}^1}$. После таких преобразований расширенная матрица примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^2 & b_n^2 \end{pmatrix},$$

где $a_{ij}^2 = a_{ij}^1 + a_{2j}^1 \left(-\frac{a_{i2}^1}{a_{22}^1} \right), b_i^2 = b_i^1 + b_2^1 \left(-\frac{a_{i2}^1}{a_{22}^1} \right), i = \overline{3, n}, j = \overline{3, n}$.

Продолжаем до тех пор, пока расширенная матрица не примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{n-1} & b_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Используя последнюю строку расширенной матрицы, находим $x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}}$.

Используем предпоследнюю строку расширенной матрицы, находим x_{n-1} , и так далее, поднимаясь до первой строки расширенной матрицы, находим все неизвестные системы.

Методом Гаусса можно решать СЛАУ, в которых не совпадает число уравнений с числом неизвестных. Следует при этом отметить некоторые моменты, которые могут возникнуть. Если на каком-то этапе преобразования мы получим в расширенной матрице нулевую строку, то это говорит о том, что соответствующее этой строке уравнение системы можно исключить из рассмотрения, как излишнее, и продолжить дальнейшие преобразования. Если на каком-то этапе преобразования мы получим строку, в которой все нули, кроме последнего элемента (соответствующего свободному члену), то система в этом случае несовместна. Такая ситуация встречается, когда число уравнений больше числа неизвестных. Если на каком-то этапе исключаются не одна, а несколько переменных, например, при исключении переменной x_l , одновременно с ней исключилась и x_{l+1} , то следующим этапом нужно исключать x_{l+2} .

Схема исследования СЛАУ.

Теорема Кронекера-Капелли.

Для того, чтобы СЛАУ была совместной необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы. Если ранг равен числу неизвестных, то решение единственно. Если ранг меньше числа неизвестных, то решений бесконечно много. Если ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы системы, то система несовместна (решений нет).

Пример.

Решим систему $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ 3x_1 - 5x_2 = -7 \end{cases}$ матричным способом и методом Гаусса.

Решение. Решим матричным способом. Запишем нашу систему следующим образом

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$. Несложно вычислить, что

обратной матрицей является матрица $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Решим эту же систему методом Гаусса. Обе части первого уравнения умножим на 3, а обе части второго уравнения умножим на -2 и сложим, то получим эквивалентную ей систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ \left((2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2))x_1 + (-3 \cdot 3 + (-5) \cdot (-2))x_2 = -4 \cdot 3 + (-7) \cdot (-2) \right), \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ 0x_1 + 1x_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Подставляя найденное таким способом значение неизвестной $x_2 = 2$ в первое уравнение, получаем уравнение $2x_1 - 3 \cdot 2 = -4, \Rightarrow 2x_1 - 6 = -4, \Rightarrow 2x_1 = 2, \Rightarrow x_1 = 1$.

Следовательно рассматриваемая система имеет решение $(1; 2)$. Это решение единственное.

Если первое уравнение исходной системы умножить на -5, а второе на 3 и сложить, то эквивалентная ей система имеет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ \left((3 \cdot 3 + 2 \cdot (-5))x_1 + ((-5) \cdot 3 + (-3) \cdot (-5))x_2 = ((-7) \cdot 3 + (-4) \cdot (-5)) \right) \end{cases} \text{ или}$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ -x_1 + 0x_2 = -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4, \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Затем находим $x_2 = 2$.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что такое матричный метод решения СЛАУ?
2. Как работает метод Гаусса решения СЛАУ, когда число уравнений в

системе и число неизвестных совпадает?

3. Как работает метод Гаусса решения СЛАУ, когда число уравнений в системе и число неизвестных не совпадает?

4. Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то что можно сказать о решениях СЛАУ?

5. Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных, то что можно сказать о решениях СЛАУ?

6. Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, но он меньше числа неизвестных, то что можно сказать о решениях СЛАУ?

7. Если ранг матрицы системы меньше ранга расширенной матрицы, то что можно сказать о решениях СЛАУ?

Задачи для самостоятельного решения.

16. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = 5 \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \end{pmatrix}$

17. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}$.

18. В матричном уравнении $7AX^{-1}B = D$ A, B, D, X - квадратные матрицы одного размера. Определите матрицу, которая будет решением уравнения.

19. Решите СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -9 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$ методом Гаусса.

20. Решите СЛАУ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -10 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -7 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$ методом Гаусса.

Ответы.

1. $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 27 & 14 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 7 \\ -13 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. 6. $\lambda = -3$. 7. -57 .

9. 0. 10. 0. 11. 4). 12. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. 13. $\lambda = 4$. 14. $\lambda = 2$. 15. $x_1 = 1, x_2 = 2$. 16. $\begin{pmatrix} -110 \\ 95 \end{pmatrix}$.

17. $\begin{pmatrix} -114 & 87 \end{pmatrix}$. 18. $7BD^{-1}A$. 19. $x_1 = -5, x_2 = 5, x_3 = 1$. 20. $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = -2$.

Рекомендуемая литература.

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для студентов вузов / Д.В. Беклемишев. – М.: Физматлит, 2006. – 307 с.
2. Трегуб, А.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие для всех специальностей МГУЛ / А.В. Трегуб. – М.: МГУЛ, 2010. – 83с.
3. Курзина, В.М. Математика: учебное пособие/ В.М. Курзина, П.А. Курзин. – М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2006. – 336с.