Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЛЕСА

Полещук О.М.

Геометрия

Методическое пособие для студентов первого курса

Издательство Московского государственного университета леса

Москва-2015

—

Полещук О. М. Геометрия. Методическое пособие для студентов первого курса. — М.: МГУЛ, —   25 с.

Одобрено и рекомендовано к изданию в качестве методического пособия редакционно-издательским советом университета

Кафедра высшей математики

Составители: Ольга Митрофановна Полещук, профессор

Подписано к печати   Тираж 500 экз.
Объем   0,75 п.л.   Заказ №

Издательство Московского государственного университета леса.
141005. Мытищи-5,Московская обл., 1-я Институтская , 1, МГУЛ.
Телефон: (095) 588 –57–62

Введение

Геометрия развивает образное и пространственное мышление, учит быть последовательным и внимательным при выполнении алгоритма решения задачи. Без всех этих навыков невозможно изучать теоретические и практические курсы по всем дисциплинам, преподаваемым в высшей школе.

Умение решать геометрические задачи показывает уровень развития логической подготовки студента, его подготовленность к обучению в вузе.

В предлагаемом пособии приведены основные типы задач по планиметрии и стереометрии. Для успешного выполнения этих заданий необходимы твёрдые знания основных геометрических фактов и некоторый опыт в решении геометрических задач.

Успех при решении многих задач по геометрии зависит от рисунка. При выполнении рисунка постарайтесь, по возможности, отобразить на нём все условия задачи. Например, если задан произвольный треугольник, то следует нарисовать разносторонний треугольник, а не равносторонний или равнобедренный.

Основная трудность при решении геометрических задач обычно возникает, когда обучающиеся сталкиваются с не самыми знакомыми конфигурациями, или не видят рационального пути решения задачи.

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

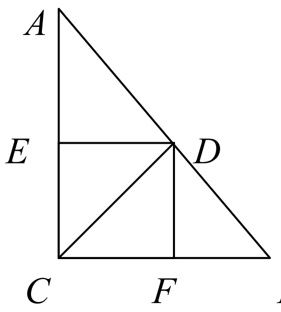


Рис. 1.

***Задача* 1**. Катеты прямоугольного треугольника 12 и 18. Вычислить длину биссектрисы прямого угла.

Дано: $AC = 18$; $BC = 12$;

CD – биссектриса $\Rightarrow \angle ACD = \angle BCD = 45^{\circ}$.

Найти: CD.

Решение. Проведем $DE \perp AC$ и $DF \perp BC$. Рассмотрим $\Delta CDF : \angle DCF = 45^{\circ}$, $\angle CFD = 90^{\circ}$, $\angle CDF = 45^{\circ} \Rightarrow DF = CF \Rightarrow$ $EDFC$ – квадрат, пусть сторона его равна a. $\Delta AED \sim \Delta ABC \Rightarrow$

$\dfrac{ED}{CB} = \dfrac{AE}{AC} \Rightarrow \dfrac{a}{12} = \dfrac{18-a}{18} \Rightarrow 18a + 12a = 12 \cdot 18 \Rightarrow a = \dfrac{12 \cdot 18}{30} = 7,2.$ Таким образом, $CD = a\sqrt{2} = 7,2 \cdot \sqrt{2}$.

Ответ: $7,2 \cdot \sqrt{2}$.

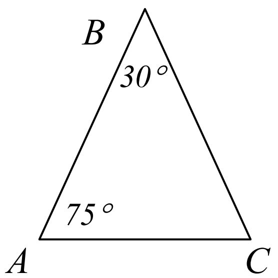


Рис. 2.

***Задача* 2.** Вычислить площадь треугольника, если одна из его сторон равна 60, а прилежащие к ней углы содержат 30° и 75°.

Дано: $AB = 60, \angle A = 75^{\circ}, \angle B = 30^{\circ}$.

Найти: $S_{\Delta ABC}$.

Решение. Так как $\angle C = 180^{\circ} - (75^{\circ} + 30^{\circ}) = 75^{\circ} \Rightarrow \Delta ABC$ – равнобедренный, $AB = BC = 60 \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \dfrac{1}{2} \cdot 60 \cdot 60 \cdot \sin 30^{\circ} =$ $= 900$.

Ответ: 900.

***Задача* 3.** Определить длины высоты и диагоналей трапеции, если ее основания 28 и 6, а боковые стороны 25 и 17.

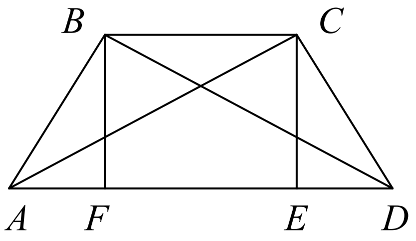


Рис. 3.

Дано: $AD = 28; BC = 16; AB = 25; CD = 17.$

Найти: $AC, BD, BF.$

Решение. Пусть $AF = y, ED = x, BF = CE = h.$

Из ΔABF получаем, что

$$h^2 = AB^2 - AF^2 = 25^2 - y^2.$$

Из ΔCDE $h^2 = CD^2 - ED^2 = 17^2 - x^2.$

Следовательно, $25^2 - y^2 = 17^2 - x^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 25^2 - 17^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 328.$

Поскольку $AD - BC = x + y = 28 - 16 \Rightarrow x + y = 12.$ Получаем систему уравнений относительно x и y:

$$\begin{cases} x + y = 12; \\ (y - x)(y + x) = 328, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12; \\ (y - x) \cdot 12 = 328, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 12; \\ y - x = 28, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20; \\ x = -8. \end{cases}$$

Полученное значение $x = -8$ говорит о том, что чертеж не соответствует задаче, его следует переделать, а именно:

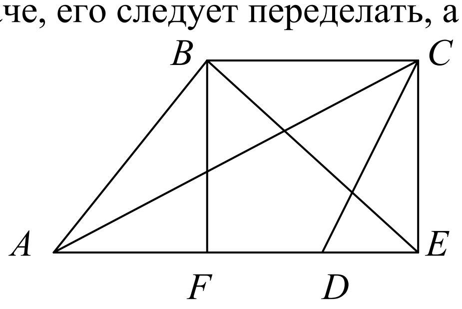


Рис. 4.

Сохраняя обозначения $AF = y, ED = x, BF = CE = h$, получаем и в этом случае , что $y^2 - x^2 = 25^2 - 17^2$, кроме того верно равенство $AD + DE - AF = BC, 28 + x - y = 16,$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 28 - 16; \\ y^2 - x^2 = 328, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 12; \\ (y - x)(y + x) = 328, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x = 12; \\ y + x = 28, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 20; \\ x = 8. \end{cases}$$

$$BF = h = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15; BD = \sqrt{BF^2 + FD^2} = \sqrt{15^2 + (28 - 20)^2} =$$

$$= \sqrt{225 + 64} = 17; AC = \sqrt{CE^2 + AE^2} = \sqrt{15^2 + (28 + 8)^2} = \sqrt{225 + 1296} = 39.$$

Ответ: 39; 17; 15.

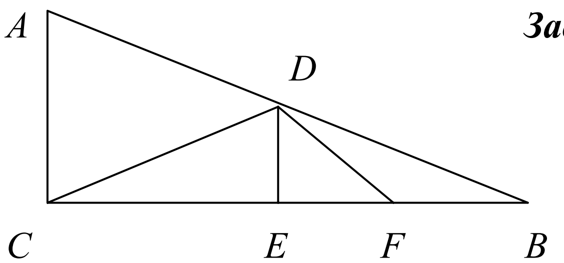


Рис. 5.

***Задача* 4.** В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C, углом B равным $20°$ и катетом $AC = 2,92$ проведена медиана CD. Кроме того, из точки D под углом $25°$ к гипотенузе проведена прямая, пересекающая отрезок BC в точке F. Вычислить площадь $\Delta\ CDE$, принять $tg\,20^\circ = 0,365.$

Дано: $AC = 2,92; AD = DB; \angle C = 90^\circ, \angle B = 20^\circ; \angle FDB = 25^\circ.$

Найти: $S_{\Delta CDF}$.

Решение. Из $\Delta ABC \quad AC = BC \cdot tg20^\circ; \quad BC = 2{,}92/0{,}365 = 8.$

Проведем $DE \perp BC$, т.к. $AD = DB \Rightarrow CE = BE = \dfrac{BC}{2} = 4; \quad DF = \dfrac{AC}{2} = 1{,}46.$

Из $\Delta DBF \Rightarrow \angle DBF = 180^\circ - (20^\circ + 25^\circ) = 135^\circ \Rightarrow \angle DFE = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

Из $\Delta DEF \Rightarrow \angle DFE = 45^\circ; \angle DEF = 90^\circ \Rightarrow \angle EDF = 45^\circ \Rightarrow DE = EF = 1{,}46$.

Из $\Delta CDF \quad CF = CE + EF = 4 + 1{,}46 = 5{,}46; \quad DE = 1{,}46.$

$$S_{\Delta CDF} = \frac{1}{2} CF \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 5{,}46 \cdot 1{,}46 = 3{,}9858.$$

Ответ: 3, 9858.

***Задача* 5.** Треугольник ABC образован двумя радиусами AB и BC и хордой AC. $\angle ABC = \alpha < 90^\circ$. При повороте этого треугольника вершина B остается на месте, а вершины A и C перемещаются, соответственно в точки D и E, при этом отрезки AC и DE пересекаются в точке K так, что $\angle AKD = \beta < \alpha$. Вычислить, на какие части отрезок BK делит $\angle ABC$.

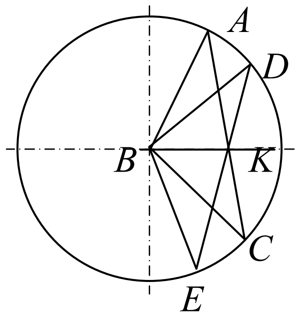


Рис. 6.

Дано: $AB = BC + BD = BE = R$; $\angle ABC = \alpha < 90^\circ$; $\angle AKD = \beta < \alpha.$

Найти: $\angle ABK$ и $\angle KBC$.

Решение. Соединим точки A и E. Из $\angle ABC = \angle DBE = \alpha \Rightarrow$ $\cup AC = \cup DE = \alpha; \cup DC -$ общая часть этих дуг, то есть получаем $\cup AD = \cup CE.$

На эти дуги опираются вписанные углы $\angle EAC = \angle AED. \angle AKD -$ внешний угол $\Delta AKE \Rightarrow \angle AKD = \angle EAC + \angle AED \Rightarrow \beta = 2\angle EAC \Rightarrow \angle EAC = \beta/2$ или $\cup CE = \cup AD = \beta \Rightarrow \angle ABD = \angle CBE = \beta. \quad \cup DC = \cup AC - \cup AD = \alpha - \beta \Rightarrow$

$$\angle DBC = \alpha - \beta; \quad \angle DBK = \frac{1}{2}\angle DBC = \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad \angle ABK = \angle ABD + \angle DBK =$$

$$= \beta + \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}; \angle KBC = \angle DBK = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\alpha + \beta}{2}; \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

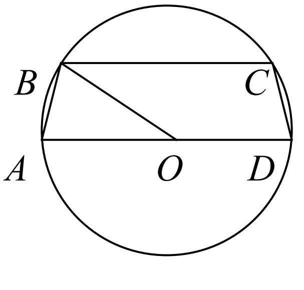


Рис. 7.

***Задача* 6.** Диаметр окружности является основанием равнобедренной трапеции, вписанной в эту окружность. Найти боковую сторону трапеции, если один из ее углов равен 60°, а радиус окружности равен 2.

Дано: $AB = CD, AO = 2, \angle BAO = 60^\circ$.

Найти: AB.

Решение. ΔABC – *равносторонний, так как* $AO = OB$*, а поскольку* $\angle BAO = 60^\circ \Rightarrow AB = AO = 2$. *Ответ:* 2.

***Задача* 7.** В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M так, что $AK = AC, BM = BC$. Найти угол $\angle MCK$ (в градусах).

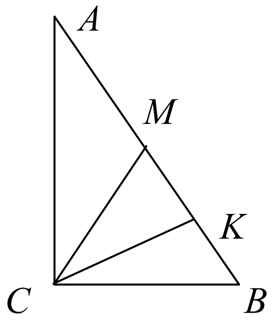


Рис. 8.

Дано: $\angle C = 90^\circ, AK = AC, BC = BM$.

Найти : $\angle MCK$.

Решение. ΔAKC и ΔMBC – равнобедренные по построению, поэтому

$$\angle ACK = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2}, \angle MCB = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2},$$

тогда $\angle ACK + \angle MCB = 90^\circ + \angle MCK =$

$$= \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} + \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} = 180^\circ - 45^\circ,$$

$(\angle ABC + \angle BAC = 90^\circ) \Rightarrow \angle MCK = 45.$ *Ответ*: 45°.

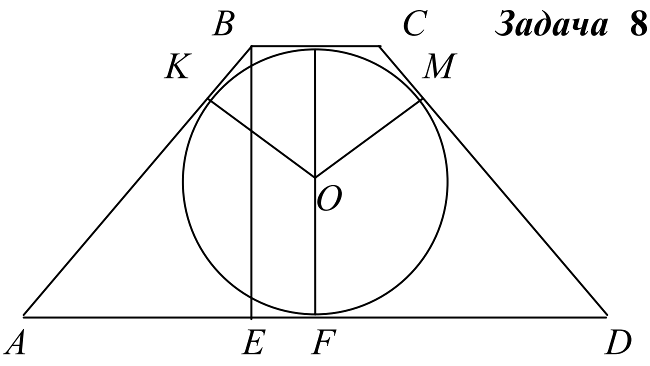


Рис. 9.

***Задача* 8.** Боковая сторона равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 12. Острый угол трапеции равен 30°. Найти площадь трапеции.

Дано: $AB = CD = 12, \angle BAD = 30^\circ$

Найти : S_{ABCD}.

Решение. Проведем $BE \perp AD$, $BE = AB \cdot \sin 30^\circ = 6$. По свойству касательных и в силу того, что $AB = CD$ следует $KB = BL = LC = CM$, $AK = AF = FD = MD \Rightarrow BC + AD = BL + LC + AF + FD = KB + CM + AK + + MD = AB + CD = 24 \Rightarrow S_{ABCD} = 12 \cdot 6 = 72.$ *Ответ*: 72.

***Задача* 9.** В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 1. Найти меньшее основание трапеции, если ее площадь равна 5.

Дано: $AB = CD, S_{ABCD} = 5, r_{окр} = 1.$

Найти: BC.

Решение.

$$LK \perp AD, LK = 2r_{окр} = 2 \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot LK \Rightarrow \frac{AD+BC}{2} = 2{,}5.$$

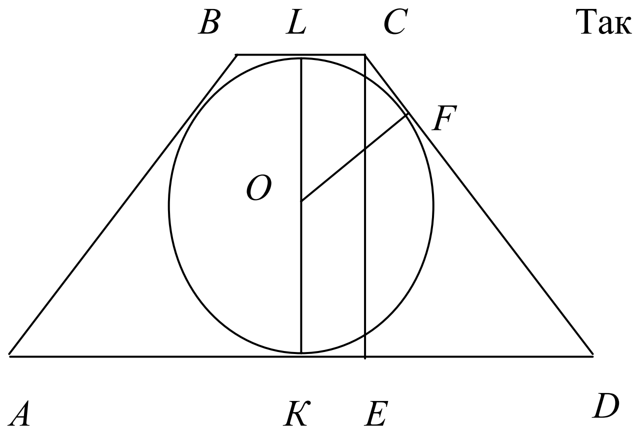


Рис. 10.

Так как $CF = LC = \frac{BC}{2}, FD = KD = \frac{AD}{2}$, то $CD = CF + FD = \frac{BC+AD}{2} = 2{,}5$. $CE \perp AD, ED = 2{,}5 - 2LC$. Пусть $LC = x$, тогда из ΔCED следует $(2{,}5)^2 = 2^2 + (2{,}5 - 2x)^2$, $4x^2 - 10x + 4 = 0$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4},$$

$x_1 = 2$ – не подходит $(ED < 0)$, $x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 1$.

Ответ: 1.

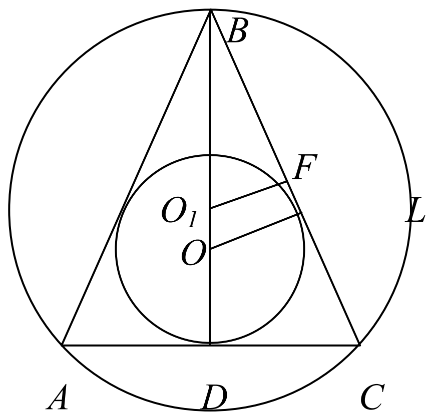


Рис. 11

***Задача* 10.** В равнобедренный треугольник, боковая сторона которого в два раза больше основания, вписана окружность радиуса 6. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

Дано: $BC = AB = 2AC, OD = 6$

Найти: $r_{опис}$.

Решение. ΔABC – равнобедренный, следовательно центр описанной окружности O_1 тоже лежит на BD. Проведем $O_1F \perp BC$, тогда $BF = FC$. Так как $CD = CL = 0{,}5AC = 0{,}25BC$, то $BL = 0{,}75BC$. Пусть $BC = b$, тогда из прямоугольного ΔDBC получаем $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{16}} = \frac{b\sqrt{15}}{4}$.

Из $\Delta OBL \sim \Delta BDC \Rightarrow \frac{OL}{DC} = \frac{BL}{BD} \Rightarrow \frac{6}{0{,}25b} = \frac{0{,}75b}{0{,}25b\sqrt{15}} \Rightarrow b = 8\sqrt{15} \Rightarrow BD = 30$,

$BO = 24$. А из подобия $\Delta OBL \sim \Delta O_1BF \Rightarrow \frac{BO_1}{BO} = \frac{BF}{BL} \Rightarrow \frac{BO_1}{24} = \frac{0{,}5}{0{,}75} \Rightarrow$

$BO_1 = r_{опис} = 16$.

Ответ: 16.

***Задача* 11.** Основания трапеции равны 2 и 3. В трапеции проведен отрезок, параллельный основаниям и делящий площадь трапеции на равные части. Найти квадрат длины этого отрезка.

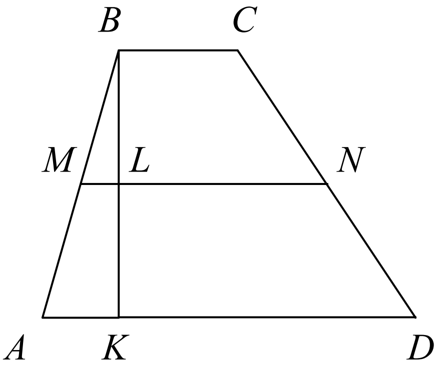


Рис. 12.

Дано: $BC = 2, AD = 3, MN \parallel AD', S_{AMND} = S_{MBCN}$.

Найти: MN^2.

Решение. Проведем $BK \perp AD \Rightarrow$

$$S_{ABCD} = S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK = 2{,}5BK.$$

Пусть $MN = x$, тогда

$$S_{MBCN} = \frac{S}{2} = \frac{BC + MN}{2} \cdot BL = \frac{2 + x}{2} \cdot BL;$$

$$S_{AMND} = \frac{S}{2} = \frac{AD + MN}{2} \cdot LK = \frac{3 + x}{2} \cdot LK \Rightarrow BK = \frac{S}{2{,}5}, BL = \frac{S}{2 + x}, LK = \frac{S}{3 + x}.$$

т. к. $BK = BL + LK$,

то $\dfrac{S}{2{,}3} = \dfrac{S}{2 + x} + \dfrac{S}{3 + x} \Leftrightarrow (2 + x)(3 + x) = 2{,}5 \cdot (5 + 2x) \Leftrightarrow x^2 = 6{,}5$.

Ответ: 6,5.

***Задача* 12.** На сторонах равнобедренного прямоугольного тругольника с катетом 3 построены квадраты, их центры соединены. Найти площадь полученного треугольника.

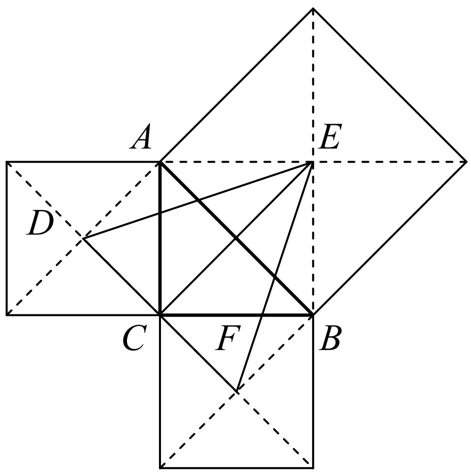


Рис. 13.

Дано: $\angle ACB = 90^\circ, AC = BC = 3$.

Найти: S_{DEF}.

Решение: $DF = EC = AB = 3\sqrt{2}$ – как диагонали квадратов со стороной 3. Так как $EC \perp AB$ (диагонали квадрата), а $AB \parallel DF$, то

$$EC \perp DF \text{ и } S_{DEF} = \frac{EC \cdot DF}{2} = 9.$$

Ответ: 9.

***Задача* 13.** Найдите наибольшую сторону треугольника, если отношение его сторон равно 13 : 20 : 21, а высота, проведенная к меньшей стороне AH, равна 50,4.

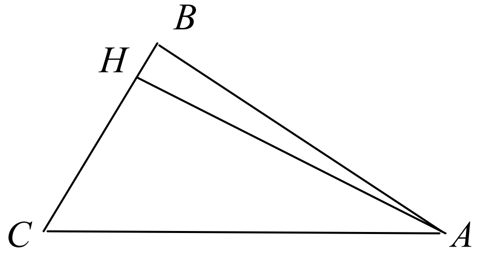


Рис.14

Дано: $AB : BC : AC = 13 : 20 : 21$; AH=50,4.

Найти: AC.

Решение: Пусть длины сторон Δ равны $13x$,$20x$ и $21x$. Выразим площадь треугольника двумя способами:

$$\frac{1}{2}BC \cdot AH = \sqrt{p(p-AC)(p-AB)(p-BC)}.$$

Так как меньшая сторона треугольника равна $13x$, то

$$S = 0{,}5 \cdot 13x \cdot 50{,}4 = 13 \cdot 25{,}6x = 332{,}8x.$$

Поскольку $p = \frac{1}{2}(13x + 20x + 21x) = 27x$, то $S = \sqrt{27x \cdot 14x \cdot 7x \cdot 6x} = 126x^2$.

Итак, $332{,}8x = 126x^2 \to x = 2{,}6$. Тогда наименьшая сторона равна 21·2,6=54,6.

Ответ: 54,6.

***Задача* 14.** Прямые KM и PR параллельны, а отрезки KR и PM пересекаются в точке C. Площадь треугольника MKC равна 12, площадь треугольника PRC равна 27. Найдите площадь треугольника PKC.

Дано: $KM \| PR$; $S_{\Delta MKC} = 12$; $S_{\Delta PRC} = 27$.

Найти: $S_{\Delta PKC} = ?$

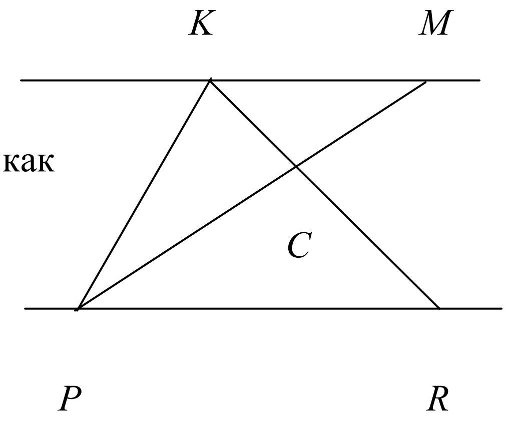


Рис.15

Решение: Треугольники KCM и RCP на рис.15 подобны ($\angle KCM = \angle PCR$ как вертикальные, $\angle KMC = \angle RPC$ как накрест лежащие при параллельных KM и PR и секущей PM). Найдем коэффициент подобия:

$$\frac{S_{KCM}}{S_{RCP}} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}, \text{ значит, } \frac{MC}{PC} = \frac{2}{3}.$$

Треугольники MKC и PKC имеют одну и ту же высоту, тогда $\frac{S_{PKC}}{S_{MKC}} = \frac{PC}{CM} \Rightarrow \frac{S_{PKC}}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{PKC} = 18.$

Ответ: 18.

***Задача* 15.** Основание остроугольного равнобедренного треугольника равно 48. Найдите радиус вписанной в него окружности, если радиус описанной около него окружности равен 25.

Дано: ΔABC – равнобедренный, $AB=BC$; $AC = 48$; $R_{описанной} =25$.

Найти: $r_{вписанной}=?$

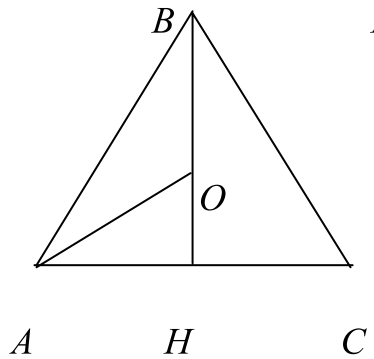


Рис.16

Решение: В равнобедренном треугольнике ABC BH – его высота и медиана, а точка O – центр описанной окружности. Тогда точка O лежит на прямой BH. Так как ΔABC – остроугольный, она находится внутри треугольника (рис.16).

Из прямоугольного треугольника AOH получаем: $OH^2 = AO^2 - AH^2 =$
$= 25^2 - 24^2 = 49 \rightarrow OH = 7, BH = 25 + 7 = 32.$

Из прямоугольного треугольника AOH
получаем: $AB^2 = BH^2 + AH^2 = = 32^2 + 24^2 = 8^2(16+9) \rightarrow AB = 40.$

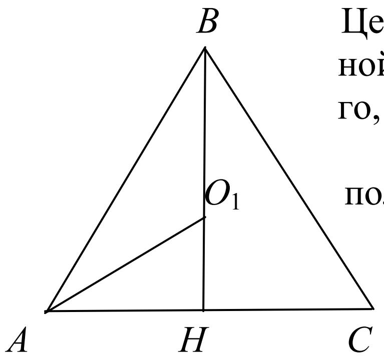


Рис.17

Центр вписанной окружности, как и центр описанной окружности, лежит на высоте BH, но, кроме того, он лежит на биссектрисе угла BAH (рис.17).

Радиус вписанной окружности найдем, используя свойство биссектрисы треугольника:

$$\frac{BO_1}{O_1H} = \frac{AB}{AH} \Rightarrow \frac{32-r}{r} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$96 - 3r = 5r \Rightarrow 8r = 96 \Rightarrow r = 12.$$

Ответ: 12.

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

***Задача* 1.** Радиус окружности, описанной около основания правильной четырехугольной пирамиды, равен 6. Угол между боковым ребром и основанием равен $arctg\frac{1}{2}$. Найти объем пирамиды.

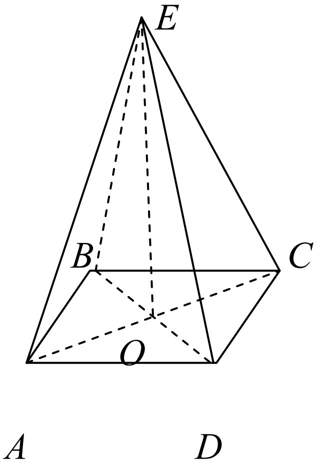


Рис. 18.

Дано: $tg\angle ODE = 0{,}5; r_{опис} = 6.$

Найти: $V_{пир}$.

Решение. Пирамида правильная, следовательно четырехугольник $ABCD$ - квадрат, $AO = OB = OD = OC = r_{опис} = 6, OE$ – высота пирамиды и ребра составляют равные углы с основанием, то есть

$$\angle OAE = \angle ODE = \angle OCE = \angle OBE.$$

Поскольку $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = 6\sqrt{2}$, то

$$OE = OD \cdot tg\angle OCE = 3 \Rightarrow$$

$$V_{пир} = \frac{1}{3}\left(6\sqrt{2}\right)^2 \cdot 3 = 72.$$

Ответ: 72.

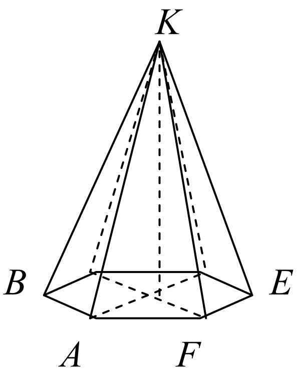


Рис. 19.

***Задача* 2.** Радиус окружности, описанной около основания правильной шестиугольной пирамиды, равен $4\sqrt{3}$. Угол между боковым ребром и основанием равен $arctg\frac{1}{8}$. Найти объем пирамиды.

Дано: $OF = 4\sqrt{3}, \angle OFK = arctg\frac{1}{8}$

Найти: $V_{пир}$.

Решение. Пирамида правильная, отсюда следует, что OK – высота пирамиды, точка O – центр описанной окружности, а все ребра наклонены к основанию под одним углом, $OF = r_{опис} = 4\sqrt{3}$, ΔAOF – равносторонний,

$$AF = OF = 4\sqrt{3}, \quad OK = OF \cdot tg\angle OFK = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{пир} = \frac{1}{3} S_{ABCDEF} \cdot OK = \frac{1}{3} \cdot 6\frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36.$$

Ответ: 36.

***Задача* 3.** Радиус окружности, описанной около основания правильной треугольной пирамиды, $6\sqrt{3}$. Угол между боковым ребром и основанием равен $arctg\frac{1}{8}$. Найти объем пирамиды.

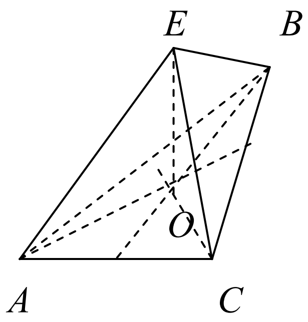


Рис. 20.

Дано: $r_{опис} = 6\sqrt{3}, tg\angle OCE = 0{,}125$

Найти: $V_{пир}$.

Решение. Пирамида правильная, OE – высота пирамиды, следовательно

$$\angle OCE = \angle OEB = \angle OAE,$$

$OC = OB = OA = r_{опис}$, ΔABC – равносторонний, значит, $AC = \frac{3}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 18,$

$$S_{ABC} = 18^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3},$$

$$OE = 6\sqrt{3} \cdot 0{,}125 = \frac{3\sqrt{3}}{4}; \quad V_{пир} = \frac{1}{3} \cdot 81\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = 60{,}75.$$

Ответ: 60,75.

***Задача* 4.** В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 и 4. Боковые ребра наклонены под углом 45°. Найти объем пирамиды.

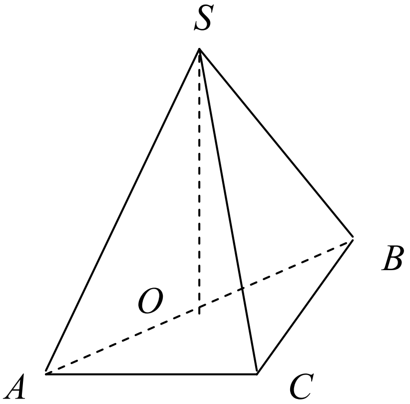


Рис. 21.

Дано: $AC = 3;\ BC = 4;$

$\angle SAO = \angle SCO = \angle SBO = 45^\circ$.

Найти: $V_{пир}$.

Решение. Так как боковые ребра пирамиды одинаково наклонены, то вершина проектируется в центр описанной около основания окружности. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Гипотенузу AB найдем по теореме Пифагора:

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$

Половина гипотенузы $AO = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$; $\angle SAO = 45^\circ$, поэтому получаем, что

$OS = AO \cdot tg45^\circ = AO = \frac{5}{2};$ где OS – высота пирамиды. Площадь основания пирамиды равна

$$S_{осн} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \Rightarrow V_{пир} = \frac{1}{2} S_{осн} \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{5}{2} = 7,5.$$

Ответ: 7, 5.

***Задача* 5.** Шар, объемом 4, вписан в конус. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найти объем конуса.

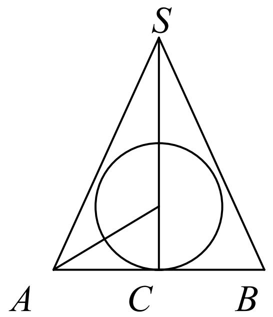


Рис. 22.

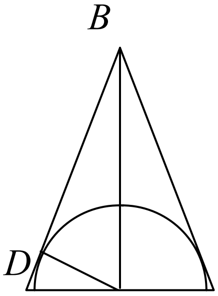
Дано: $V_{шар} = 4; \quad \angle SAB = 60^\circ.$

Найти: $V_{кон}$.

Решение. Применим при решении этой задачи один из основных приемов решения стереометрических задач: проведем сечение и сведем задачу к планиметрической. Проведем осевое сечение. Секущая плоскость пересекает конус по треугольнику *ASB* и шар по окружности с центром *O* радиуса *OC*. Радиус основания *AC* обозначим за *R*. Поскольку окружность вписана в ΔASB, то *AO* – биссектриса и $\angle OAC = \frac{1}{2}\angle SAC = 30^\circ$. Отсюда $OC = AC \cdot tg30^\circ = R\frac{\sqrt{3}}{3}$. Объем шара равен $\frac{4}{3}\pi|OC|^3 = \frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{3\sqrt{3}} = 4 \Rightarrow R^3 = \frac{9\sqrt{3}}{\pi}$.

Из ΔASC высота пирамиды равна $h = AC \cdot tg60^\circ = R\sqrt{3}$. Объем конуса равен $V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi\frac{9\sqrt{3}}{\pi} \cdot \sqrt{3} = 9.$

Ответ: 9.



***Задача* 6.** Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса $\sqrt{3}/3$, причем центр основания конуса лежит в центра шара.

Дано: $R_{\text{полушара}} = \sqrt{3}/3$.

Найти: $h_{конуса}$.

A *O* *C*

Рис. 23 .

Решение. Проведем осевое сечение. Плоскость сечения пересечет конус по треугольнику ABC и полушар по полукругу с центром в точке *O*. Ось *BO* отсечет треугольник ABO, в котором длина высоты *OD*, опущенной на *AB* равна $\sqrt{3}/3$ – радиусу полушара. Обозначим *BO* за *x*.Из теоремы Пифагора для ΔBOD

$$BD = \sqrt{BO^2 - OD^2} = \sqrt{x^2 - \frac{1}{3}}.$$

$\Delta BOD \sim \Delta AOD$ как прямоугольные с равными углами $\angle DOA = \angle OBD$ (углы с взаимно-перпендикулярными сторонами). Следовательно, $\frac{BD}{BO} = \frac{OD}{OA} \Rightarrow OA = \frac{OD \cdot BO}{BD} = \frac{\sqrt{3}/3}{\sqrt{x^2 - 1/3}} x$. Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi AO^2 \cdot OB = \frac{1}{3}\pi \frac{x^2}{3(x^2 - 1/3)} \cdot x = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{x^3}{(3x^2 - 1)}$. Производная этой функции равна $V' = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3x^2(3x^2 - 1) - x^3 \cdot 6x}{(3x^2 - 1)^2} \Rightarrow V' = 0$ при выполнении равенства $3x^2(3x^2 - 1) - x^3 \cdot 6x = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1.$ Поскольку мы ищем минимум при $x > 0$, то таблица интервалов имеет вид:

x	(0;1)	1	(1;∞)
y'	–	0	+
y	↘	min	↗

Так как производная функции в критической точке $x_2 = 1$ равна нулю, причем слева от нее производная отрицательная, а справа положительная, то в этой точке функция имеет локальный минимум.

Ответ: 1.

***Задача* 7.** В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от центра симметрии основания до бокового ребра равно *d*, двугранный угол между основанием и боковой гранью равен φ. Найти объем пирамиды.

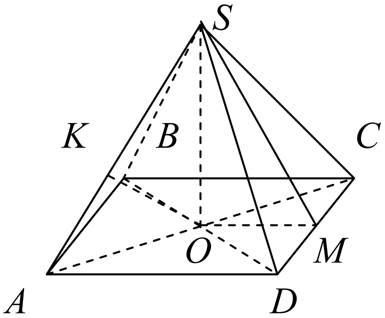


Рис. 24.

Дано: *OK* =*d*; $\angle SMO = \varphi$.

Найти: *V*.

Решение. Пусть $AD = a$, $SO = H$, тогда $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} a^2 H$. Из прямоугольного треугольника *SOM* находим высоту $H = OMtg\varphi = atg\varphi / 2$, а из прямоугольного треугольника *AOS*:

$$AS = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + H^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2 + tg^2\varphi} \Rightarrow S_{AOS} = \frac{d \cdot AS}{2} = \frac{AO \cdot OS}{2}$$

или $\quad d \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2 + tg^2\varphi} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} tg\varphi, \quad$ откуда $\quad a = \frac{\sqrt{2}d\sqrt{2 + tg^2\varphi}}{tg\varphi} =$

$= \sqrt{2}d\sqrt{2 + tg^2\varphi} \cdot ctg\varphi$. Итак, $V = \frac{1}{6}a^3 tg\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}d^3(2 + tg^2\varphi)^{3/2} ctg^3\varphi.$

Ответ: $\frac{1}{6}a^3 tg\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}d^3(2 + tg^2\varphi)^{3/2} ctg^3\varphi.$

***Задача* 8.** Объем правильной четырехугольной пирамиды равен V. Угол наклона его бокового ребра к плоскости основания равен α. Найти боковое ребро пирамиды.

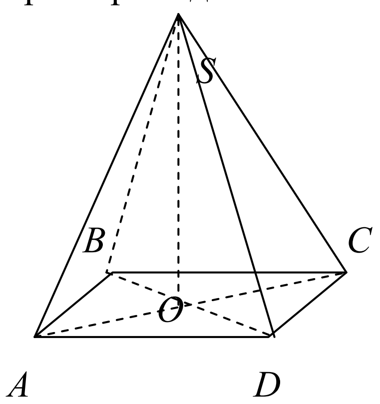


Рис.25

Дано: $V_{\text{пир}} = V$; $\angle SAO = \alpha$.

Найти: AS.

Решение. Пусть $AD = a$, тогда из прямоугольного треугольника SOA находим $SO = AO \cdot tg\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} tg\alpha$. Поскольку объем

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3}a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} tg\alpha =$$

$= \frac{a^3\sqrt{2}}{6} tg\alpha$, находим , что

$$a = \left(\frac{6}{\sqrt{2}} Vctg\alpha\right)^{1/3} = \left(3\sqrt{2} \cdot Vctg\alpha\right)^{1/3} \Rightarrow$$

$$AS = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha} = \frac{\left(3\sqrt{2}Vctg\alpha\right)^{1/3}\sqrt{2}}{2\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{3Vctg\alpha}{2}\right)^{1/3}}{\cos\alpha}. \qquad \textit{Ответ}: \frac{\left(\frac{3Vctg\alpha}{2}\right)^{1/3}}{\cos\alpha}.$$

***Задача* 9.** В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю 10. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом β. Найти площадь поверхности и объем шара.

Дано: AC =10; $\angle SCA = \beta$.

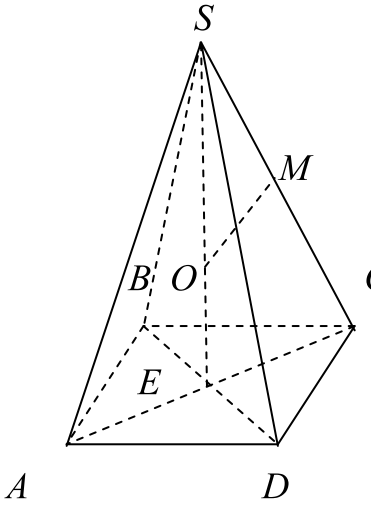


Рис. 26

Найти: $S_{шар}; V_{шар}$.

Решение. Пусть O – центр шара, описанного около пирамиды $SABCD$, R – его радиус, E – центр прямоугольника $ABCD$, M – середина ребра CS. Тогда $OM \perp CS$ и

$$R = OS = \frac{SM}{\sin\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CE}{\cos\beta \sin\beta} = \frac{5}{\sin 2\beta}.$$

$$S_{шар} = 4\pi R^2 = \frac{4\pi \cdot 25}{\sin^2 2\beta} = \frac{100\pi}{\sin^2 2\beta};$$

$$V_{шар} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{125}{\sin^3 2\beta} = \frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}.$$

Ответ: $S_{шар} = \dfrac{100\pi}{\sin^2 2\beta}; V_{шар} = \dfrac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$.

***Задача* 10.** Стороны треугольника $a = b = 10, c = 12$ касаются сферы радиуса 5. Найти расстояние от центра сферы до плоскости треугольника.

Дано: $a = b = 10; c = 12; r = 5$.

Найти: OI.

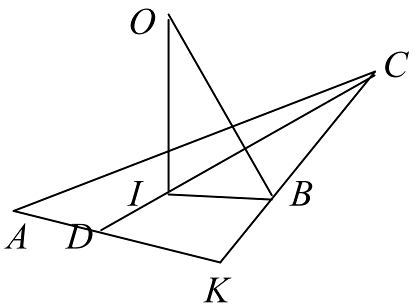


Рис. 27.

Решение. Поскольку стороны треугольника AKC касаются сферы, то центр O этой сферы проектируется в центр I окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдем высоту CD этого треугольника:

$CD = \sqrt{KC^2 - BD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48,$$

а радиус вписанной окружности треугольника ABC равен

$$r = \frac{S}{p} = \frac{48}{\frac{1}{2}(10 + 10 + 12)} = \frac{48}{16} = 3.$$

Следовательно,

$$OI = \sqrt{OB^2 - IB^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Ответ: 4.

***Задача* 11.** Через вершину конуса проведено сечение под углом 30° к высоте конуса. Вычислить площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$, а радиус основания равен 5.

S

Дано: $SO = 3\sqrt{3}$; $R = 5$; $\angle OSM = 30^\circ$.

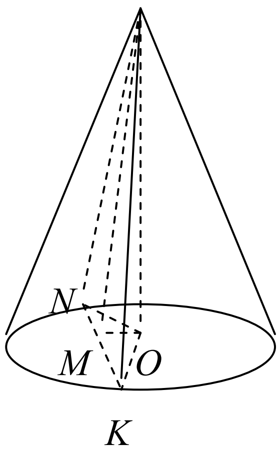


Рис. 28.

Найти: S_{KNS}.

Решение. Пусть SKN – данное сечение, M – середина хорды KN. Тогда $\angle MSO = 30°$ и из прямоугольного треугольника MOS находим

$MO = SO \cdot tg30^{\circ} = 3\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 3, SM = 2MO = 6$, а из прямоугольного треугольника KMO:

$MK = \sqrt{OK^2 - MO^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$, поэтому

$$S_{KNS} = \frac{1}{2} \cdot KN \cdot SM = MK \cdot SM = 4 \cdot 6 = 24.$$

Ответ: 24.

***Задача* 12.** Тело состоит из двух конусов, имеющих общее основание и расположенных по разные стороны от плоскости основания. Найти объем шара, вписанного в тело, если радиусы оснований конусов равны 1, а высоты 1 и 2.

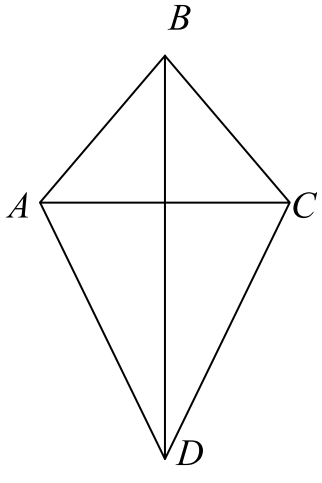


Рис. 29.

Дано: $R = 1$; $H_1 = 1$; $H_2 = 2$.
Найти: $V_{шар}$.

Решение. Пусть $ABCD$ – осевое сечение двух данных конусов. Тогда плоскость $ABCD$ пересекает вписанный шар по большому кругу, окружность которого является вписанной в четырехугольник $ABCD$, откуда площадь четырехугольника

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = pr \quad \text{или}$$

$\dfrac{1}{2} AC \cdot BD = (AB + CD)r,$ следовательно,

$$r = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \sqrt{5} - \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = (\sqrt{2} + \sqrt{5})r \Rightarrow V_{шар} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^3.$$

Ответ: $\dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)^3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти отношение площадей круга, вписанного в правильный треугольник, и круга, описанного около него.

Ответ: 0,25.

2. В прямоугольном треугольнике острые углы относятся как 1:2, меньший катет равен a, найти радиус описанной окружности.

Ответ: a.

3. Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит противолежащую сторону в отношении 3:2, считая от вершины острого угла. Вычислить площадь ромба, если его сторона равна 20 см.

Ответ: 240.

4. Найти основание равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна $\sqrt{3}$ см, причем отношение угла при вершине к углу при основании равно 4 .

Ответ: 3.

5. Вычислить периметр равнобедренной трапеции, у которой тупой угол в 3 раза больше острого, меньшее основание равно высоте, а большее основание равно $2-\sqrt{2}$ см.

Ответ: 4/3.

6. В прямоугольный треугольник вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найти площадь квадрата, если катеты треугольника равны 10 м и 15 м.

Ответ: 36.

7. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2м, а радиус описанной окружности равен 5 м. Найдите больший катет треугольника.

Ответ: 8.

8. Дан ромб $ABCD$. Окружность, описанная около треугольника ABD, пересекает большую диагональ ромба AC в точке E. Найдите CE, если $AB = 8\sqrt{5}$, $BD = 16$.

Ответ: 12.

9. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $\sqrt{13}$, а основания равны 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.

Ответ: 5.

10. Найдите площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности с радиусом 4, если известно, что боковая сторона трапеции равна 10.

Ответ: 80.

11. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. найдите площадь параллелограмма, если $BK = KC = 5$ м , $AK = 8$ м.

Ответ: 48.

12. Средняя линия трапеции равна 15, сумма углов при одном из оснований равна 90°. Найдите площадь трапеции, если одна боковая сторона равна $\sqrt{10}$. а разность оснований равна 10.

Ответ: 45.

13. Найдите радиус окружности, в котрую вписана трапеция, основание которой является диаметром окружности, если площадь трапеции равна $40\sqrt{5}$, а средняя линия трапеции равна $7\sqrt{2}$.

Ответ: 18.

14. Две стороны параллелограмма равны 13 и 14, а одна из диагоналей равна 15. Найдите площадь треугольника, отсекаемого от параллелограмма биссектрисой его угла.

Ответ: 78.

15. В ромбе против острого угла, равного 30°, лежит диагональ, равная $\sqrt{8-4\sqrt{3}}$. Найдите площадь ромба.

Ответ: 2.

16. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, если $AD = 10$, $BD = 8$, а отрезок, соединяющий вершину B с серединой стороны AD, равен $\sqrt{15}$.

Ответ: 28.

17. Площадь треугольника равна 24, а две его стороны равны 10 и 8. Найдите третью сторону треугольника.

Ответ: 6.

18. Из точки, лежащей на окружности, проведены две хорды, равные 7 и 15. Найдите диаметр окружности, если расстояне между серединами хорд равно 10.

Ответ: 25.

19. Найдите расстояние от точки пересечения медиан прямоугольного треугольника до его катета, равного 12, если гипотенуза равна 15.

Ответ: 3.

20. Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC на расстоянии $\sqrt{3}$ от основния. Найдите основание треугольника, если $\angle B = 120^\circ$.

Ответ: 30.

21. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2 см, высота $\sqrt{3}$ см. Найти объем пирамиды.

Ответ: 1.

22. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а высота 1 см. Найти боковую поверхность пирамиды.

—

Ответ: 18.

23. В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна 2 см, а высота $2\sqrt{3}$ см. Найти объем пирамиды.

Ответ: 12.

24. Около цилиндра радиуса 2 см и высоты 5 см описать прямой круговой конус наименьшего объема (плоскости оснований цилиндра и конуса должны совпадать). Чему равна высота конуса?

Ответ: 15.

25. Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна 3 см ^{2} и боковая поверхность 6 см ^{2}. Найти объем пирамиды.

Ответ: 1,5.

26. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами, равными 12 и 5. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти объём пирамиды.

Ответ: 20.

27. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точки A_1 и B и середину ребра DD_1 проведена секущая плоскость. Найдите ребро куба, если периметр сечения равен $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

Ответ: 2.

28. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точки A и B_1 и середину ребра CC_1 проведена секущая плоскость. Найдите площадь полной поверхности куба, если площадь сечения равна 36.

Ответ: 192.

29. Около прямой четырехугольной призмы описан цилиндр. Основание призмы – прямоугольник, диагонали которого образуют угол 60°, а расстояние между боковым ребром призмы и скрещивающейся с ним диагональю основания равно $1+\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Ответ: $120\sqrt{3}$.

30. Радиус основания цилиндра служит диаметром основания конуса. Плоскости оснований конуса и цилиндра совпадают, а вершина конуса лежит на втором основании цилиндра. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости основания, при котором площадь боковой поверхности конуса в 125 раз больше площади боковой поверхности цилиндра.

Ответ: $\arcsin 0{,}001$.

31. Два касающихся шара радиуса 2 расположены внутри прямой призмы. Первый шар касается нижнего основания и всех боковых граней. Второй шар касается верхнего основания и всех боковых граней. Найдите объем призмы, если в ее основании лежит равнобедренный треугольник с тупым углом при вершине, синус которого равен 0,96.

Ответ:108.

—

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Измерение площадей

Примем обозначения: a, b, c – стороны; d_1, d_2 – диагонали; h_a– высота, опущенная на сторону a; φ – угол между диагоналями; $\angle A$ – угол при вершине A; P_n – периметр n-угольника; r, R – радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей; S – площадь.

Прямоугольник: $S = a \cdot b.$

Параллелограмм: $$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi = a \cdot b \cdot \sin\angle A.$$

Квадрат : $$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

Ромб: $$S = a \cdot h_a = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Треугольник : $$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\angle A = \frac{abc}{4R} =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p = (a+b+c)/2.$$

Трапеция: $$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi,$$
a, b – основания трапеции.

Описанный многоугольник: $$S = \frac{1}{2} P_n \cdot r.$$

Круг радиуса R: $$S = \pi \cdot R^2.$$

2. Формулы для определения элементов треугольника

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\angle A}=\dfrac{b}{\sin\angle B}=\dfrac{c}{\sin\angle C}=2R,\quad R=\dfrac{abc}{4S}$, R – радиус описанной окружности.

Теорема косинусов: $a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\angle A.$

Длина биссектрисы – отрезка прямой, делящий угол треугольника на две равновеликие части – $l_a=\dfrac{2\sqrt{cbp(p-a)}}{b+c}$.

Длина медианы – отрезка прямой, соединяющей вершину треугольника и середину противоположной стороны – $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

Длина средней линии – отрезка прямой, соединяющей середины двух сторон треугольника – равна половине длины той стороны треугольника, которой эта средняя линия параллельна.

3. Площадь поверхности многогранника

Обозначим: P_n – периметр основания; h – высота призмы ; l – длина ребра; Q_n – периметр перпендикулярного сечения.

Боковая поверхность прямой призмы: $S=P_n\cdot h.$

Боковая поверхность наклонной призмы: $S=Q_n\cdot l.$

Полная поверхность призмы: $S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}.$

4. Площади поверхностей тел вращения

Обозначим: R и r – радиусы нижнего и верхнего (для усеченного конуса) оснований; H – высота ; l – образующая тела вращения.

Полная поверхность цилиндра: $S=2\pi R\cdot H+2\pi R^2.$

Боковая поверхность цилиндра: $S = 2\pi R \cdot H$.

Полная поверхность конуса: $S = \pi R \cdot l + \pi R^2$.

Боковая поверхность конуса: $S = \pi R \cdot l$.

Полная поверхность усеченного конуса: $S = \pi(R + r) \cdot l + \pi(R^2 + r^2)$.

Боковая поверхность усеченного конуса: $S = \pi(R + r) \cdot l$.

Поверхность шара радиуса R: $S = 4\pi R^2$.

Поверхность шарового пояса высоты h: $S = 2\pi R \cdot h$.

5. Объемы

Обозначим: R – радиус шара или радиус нижнего основания усеченного конуса; r – радиус верхнего основания усеченного конуса; h – высота; l – длина ребра; Q_n – площадь перпендикулярного сечения; Q – площадь нижнего, а q – площадь верхнего основания.

Призма: $V = Q_n \cdot l$.

Пирамида: $V = \frac{1}{3} Q \cdot h$.

Усеченная пирамида: $V = \frac{1}{3}(Q + q + \sqrt{Q \cdot q}) \cdot h$.

Цилиндр: $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$.

Конус: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h$.

Усеченный конус: $V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + R \cdot r)$.

Шар: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$.

Шаровой сектор: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot h$.

—

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кремер Н.Ш., Константинова О.Г., Фридман М.Н. Математика абитуриентам экономических вузов: Учеб. пособие для вузов/ Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. –509 с.
2. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. В двух книгах. Кн.1 / Под редакцией М.И. Сканави / – М. .: Высшая школа, 1994.– 528 с.
3. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. В двух книгах. Кн.2 / Под редакцией М.И. Сканави / – М. .: Высшая школа, 1994.– 368 с.
4. Единый государственный экзамен: Математика: сб. заданий/ Л. О. Денищева, Г. К. Безрукова, Е. М. Бойченко и др. – М.: Просвещение,2005. –224 с.: ил.

ОГЛАВЛЕНИЕ