

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

О.М. Полещук, С.В. Тумор
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ
ФУНКЦИИ. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2024

УДК 517.51

ББК 22.161.5

Издание доступно в электронном виде по адресу

<https://ebooks.bmstu.press/catalog/>

Факультет «Космический»

Кафедра «Высшая математика и физика» (К-6 МФ)

*Рекомендовано Научно-методическим советом МГТУ им. Н.Э. Баумана в
качестве учебного пособия*

Рецензент:

профессор В. А. Котельников

Полещук, О.М.

Математический анализ. Введение в математический анализ. Элементарные функции. Исследование поведения функций. Учебное пособие для самостоятельной работы студентов / О.М.Полещук, С.В.Тумор – Москва: Издательство МГТУ им.Н.Э. Баумана, 2024. – 119 с.

В учебном пособии изложены базовые элементы математического анализа для полного исследования функций и построения их графиков. Теоретический материал подкреплён большим количеством примеров.

Учебное пособие предназначено для студентов бакалавриата, изучающих математические дисциплины.

УДК 517.51

ББК 22.161.5

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024

© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2024

Оглавление

Предисловие.....	4
1. Переменная величина. Функция, способы задания. Элементарные функции. Основные элементарные функции, их свойства	6
2. Исследование поведения функций	24
2.1. Непрерывность функции в точке. Свойства функций непрерывных в замкнутом промежутке. Разрывная в точке функция. Виды разрывов	26
2.2. Возрастание и убывание функции. Локальный максимум и минимум. Критические точки. Необходимые и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Применение теории максимума и минимума функции к решению задач.....	29
2.3. Исследование функции на экстремум по второй производной. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия существования точки перегиба	37
2.4. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. Исследование графика функции вблизи вертикальной асимптоты. Общий план исследования функции и построения графика	41
Вопросы и задания для самоконтроля.....	118
Литература	119

Предисловие

Учебное пособие предназначено для математических дисциплин. Издание содержит базовые элементы математического анализа для полного исследования функций и построения их графиков. Также пособие может быть полезно в изучении других дисциплин, связанных с построением графиков функций.

В учебном пособии приведены базовые сведения об элементарных функциях и их графиках. Рассмотрены различные приемы, упрощающие построение графиков функций. Особое внимание уделено полному исследованию функций методами дифференциального исчисления с последующим построением графиков исследуемых функций. Для этих целей приведена схема полного исследования функции, а рассматриваемые элементарные функции сгруппированы по типам. Для каждого типа представлено существенное количество примеров исследования. В пособии также приведены упражнения для закрепления пройденных тем. Завершают пособие вопросы и задания для самоконтроля и список рекомендуемой литературы.

Ключевые слова: функция, график функции, элементарные функции, полное исследование функции.

Цель издания – оказание помощи студентам в освоении математических дисциплин.

Изучив материалы учебного пособия, студенты:

- приобретут более глубокое понимание функции, как зависимости между величинами;
- смогут выполнять построение графиков элементарных функций, ориентируясь на их свойства;
- закрепят навыки исследования функций;
- научатся по виду предложенной функции предопределять ее особенности.

Теоретические и практические материалы, изложенные в данном пособии, будут способствовать овладению студентами компетенциями, предусмотренными образовательной программой, по которой они обучаются.

1. Переменная величина. Функция, способы задания. Элементарные функции. Основные элементарные функции, их свойства

Приведено понятие функции и ее основные характеристики. Представлены многочисленные примеры построения различных функций.

Планируемые результаты обучения. После изучения материалов данной главы студенты приобретут навыки:

- работы с основными характеристиками функции;
- графического построения функций рациональными способами.

Если каждому элементу x из некоторого множества X по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент $y=f(x)$ из некоторого множества Y , то говорят, что на множестве X задана *однозначная функция f* . Если допустить, что каждому элементу x из множества X соответствует не один элемент y из множества Y , а несколько, то функция $y=f(x)$ называется *многозначной функцией*.

В общем случае функция f называется *числовой функцией*, если она принимает числовые значения. Будем считать, что элементами множеств X и Y являются действительные числа. В дальнейшем будем рассматривать только такие числовые функции и обозначать их $y=f(x)$.

При этом переменную x будем называть *аргументом* функции или *независимой переменной*, а y – *функцией* или *зависимой переменной* (значения y зависят от значений x). Про величины x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*. Иногда, чтобы показать функциональную зависимость y от x , вместо $y=f(x)$ пишут $y=y(x)$.

Множество X называется областью *определения функции* и обозначается $D(f)$ (или $D(y)$).

Множество Y называется областью *значений функции* и обозначается, как $E(f)$ (или $E(y)$).

Функция имеет обратную тогда и только тогда, когда она взаимно однозначная. Если каждое свое значение функция f принимает только один раз, то можно определить *обратную к f функцию*, которая обозначается f^{-1} . Областью определения этой функции будет являться множество всех значений функции f и $f^{-1}(y) = x$, где $y = f(x)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy с координатами $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Четной называется функция $y = f(x)$ определенная на множестве D такая, что $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$.

Нечетной называется функция $y = f(x)$, определенная на множестве D , такая, что $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

Функцию, не являющуюся ни четной, ни нечетной, называют *функцией общего вида*.

У четной функции график симметричен относительно оси Oy , у нечетной – относительно начала координат (рис. 1, 2).

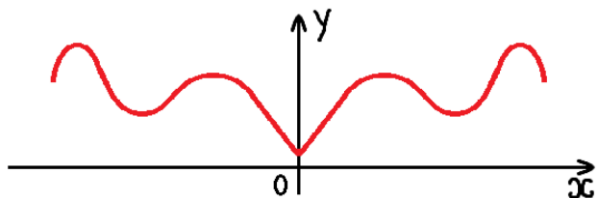


Рис. 1. График четной функции

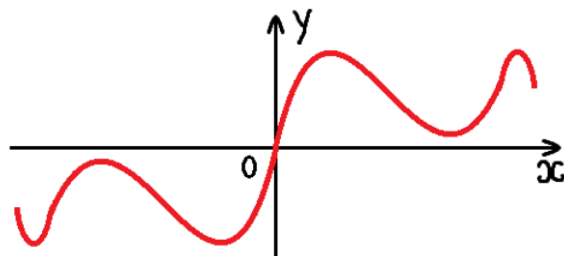


Рис. 2. График нечетной функции

Периодической называется функция $y = f(x)$, определенная на множестве D , такая, что существует число $T > 0$ такое, что $\forall x \in D$ значение $(x + T) \in D$ и $f(x + T) = f(x)$ (рис. 3). Наименьшее число T называется *периодом* функции.

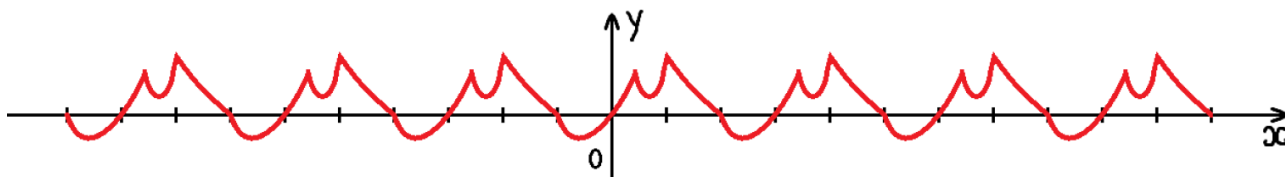


Рис. 3. График периодической функции, период равен 3

Среди всех функций выделяют небольшую группу функций, хорошо известных из курса школьной алгебры, которые называют элементарными функциями.

Элементарные функции – это функции, определяемые формулами, содержащими конечное число операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, взятия логарифма, вычисления тригонометрических функций.

Элементарные функции строятся из *основных элементарных функций*:

- степенная функция (рис. 4);
- показательная и логарифмическая функции (рис. 5);
- тригонометрические функции (рис. 6, 7);
- обратные тригонометрические функции (рис. 8).

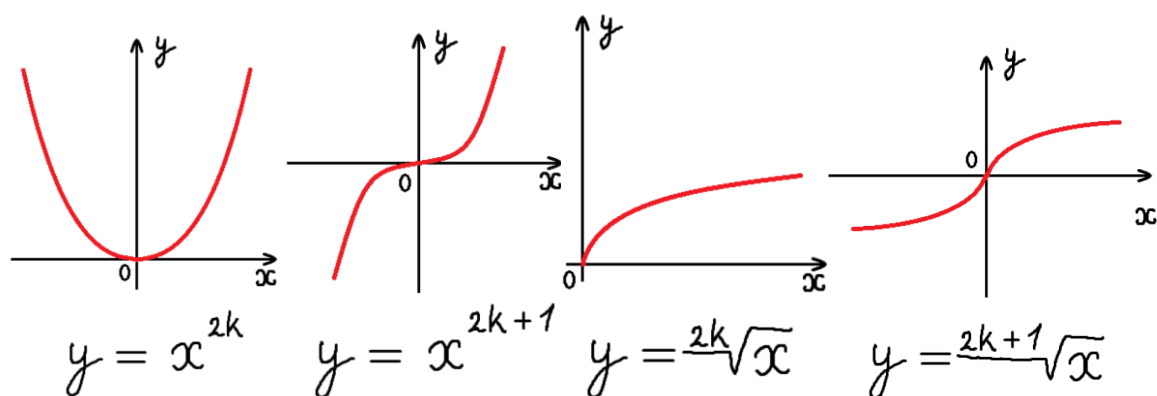


Рис. 4. Графики степенных функций ($k \in \mathbb{N}$)

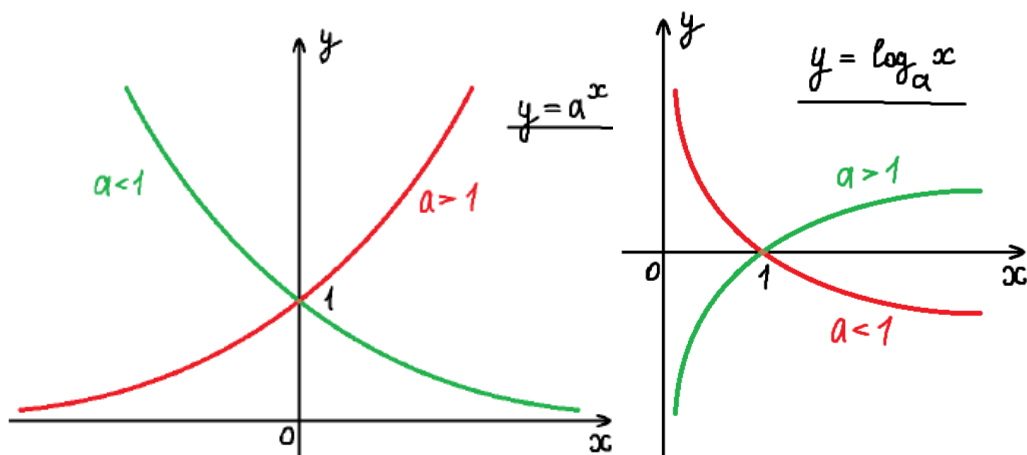


Рис. 5. Графики показательной и логарифмической функций

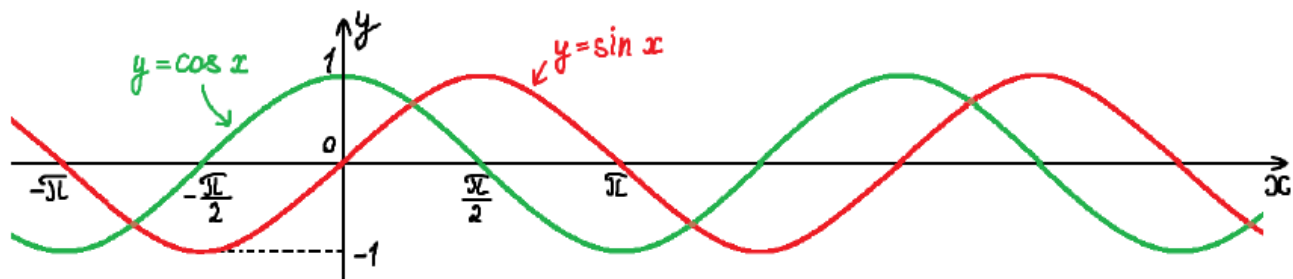


Рис. 6. Графики тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

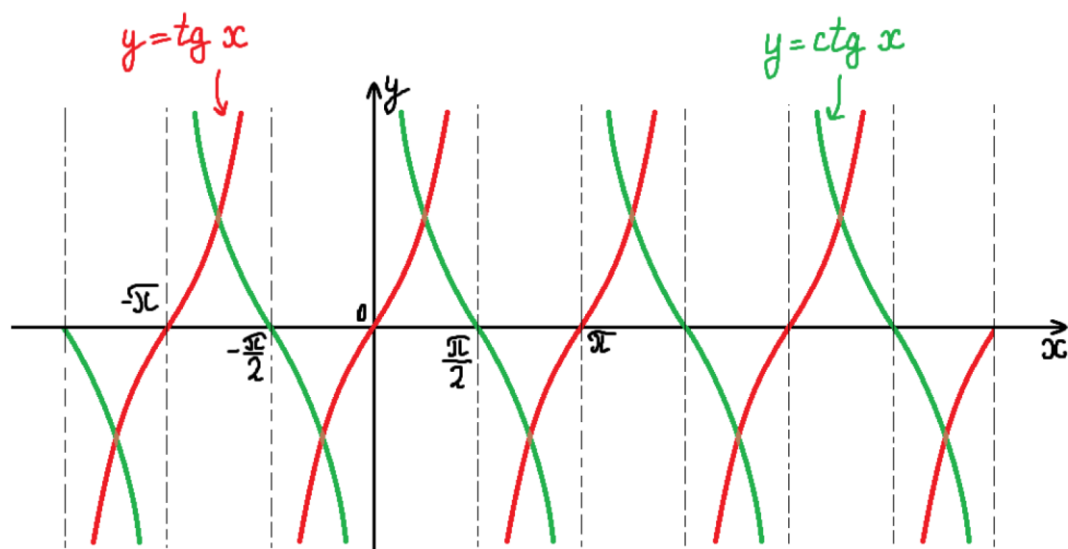


Рис. 7. Графики тригонометрических функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

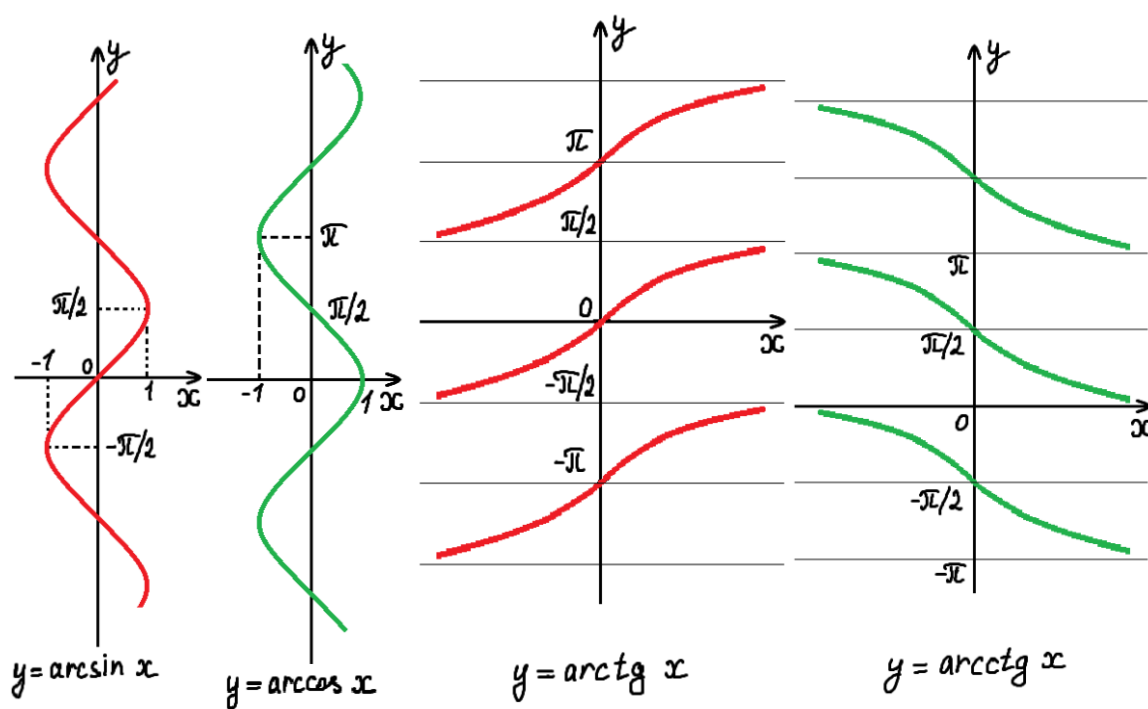


Рис. 8. Графики обратных тригонометрических функций

Прямая и обратная функции выражают одну и ту же зависимость между переменными x и y , с тем только отличием, что в обратной функции эти переменные поменялись ролями, что равносильно изменению обозначений осей координат. Поэтому график обратной функции симметричен графику прямой функции относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов, т.е. относительно прямой $y=x$. Таким образом, для построения графика функции, обратной по отношению к функции $y=f(x)$, следует построить график $y=f(x)$ и отразить его относительно прямой $y=x$ (рис. 9).

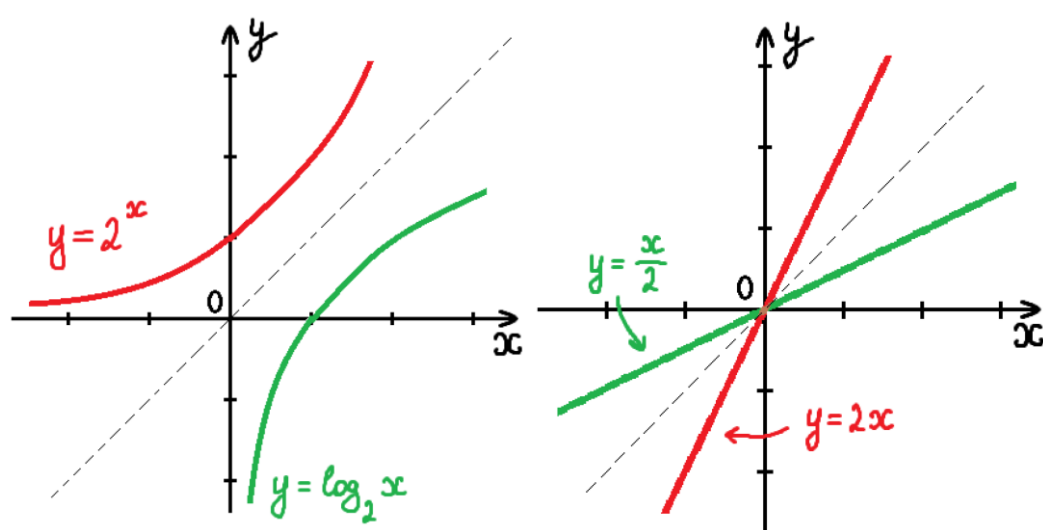


Рис. 9. Примеры графиков прямой и обратной функций

График функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом вдоль оси ординат графика функции $y = f(x)$ на $|b|$ единиц вверх при $b > 0$ или на $|b|$ единиц вниз при $b < 0$. Перемещение графика можно заменить переносом оси абсцисс на столько же единиц, но в противоположную сторону (рис. 10).

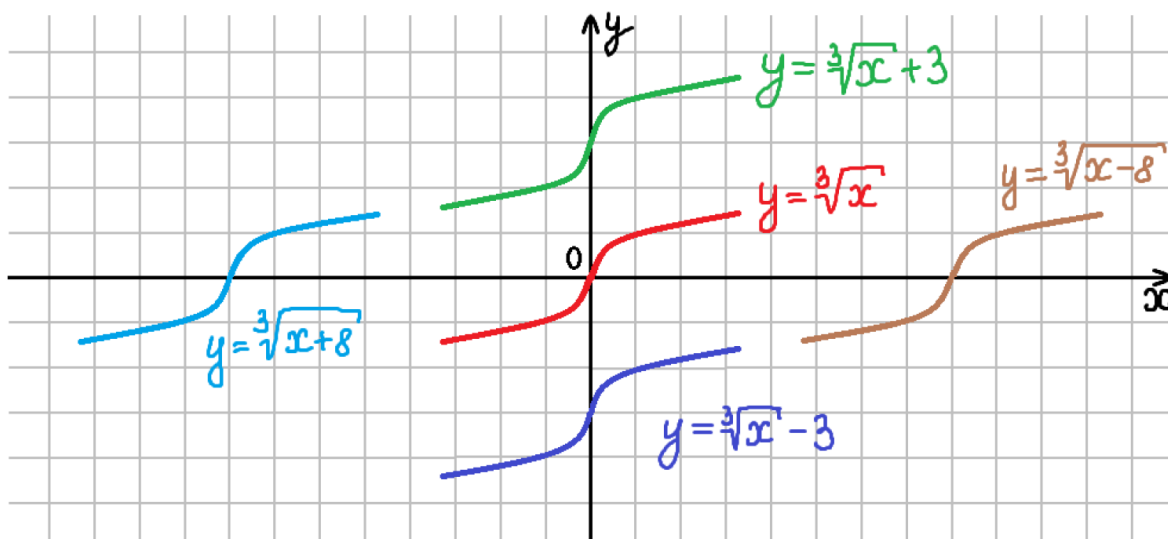


Рис. 10. Пример параллельного переноса графика функции $y = \sqrt[3]{x}$

График функции $y = f(x + a)$ получается параллельным переносом вдоль оси абсцисс графика функции $y = f(x)$ на $|a|$ единиц влево при $a > 0$ или на $|a|$ единиц вправо при $a < 0$. Перемещение графика можно заменить переносом оси ординат на столько же единиц, но в противоположную сторону (рис. 10).

Для построения графика функции $y = -f(x)$ следует построить график функции $y = f(x)$ и отразить его относительно оси абсцисс (рис. 11).

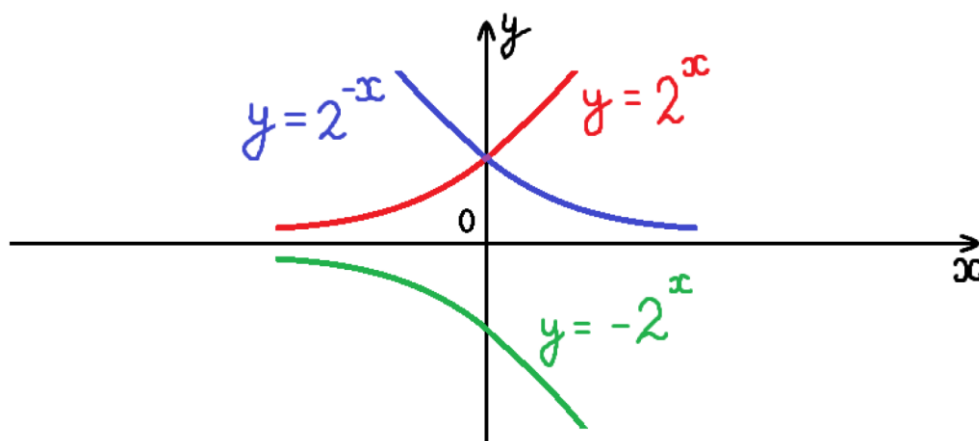


Рис. 11. Пример отражения графика функции $y = 2^x$

Для построения графика функции $y = f(-x)$ следует построить график функции $y = f(x)$ и отразить его относительно оси ординат (рис. 11).

Для построения графика функции $y = Af(x)$, $A > 0$, следует построить график функции $y = f(x)$ и растянуть его вдоль оси ординат в A раз при $A > 1$ или сжать в $\frac{1}{A}$ раз при $A < 1$ (рис. 12).

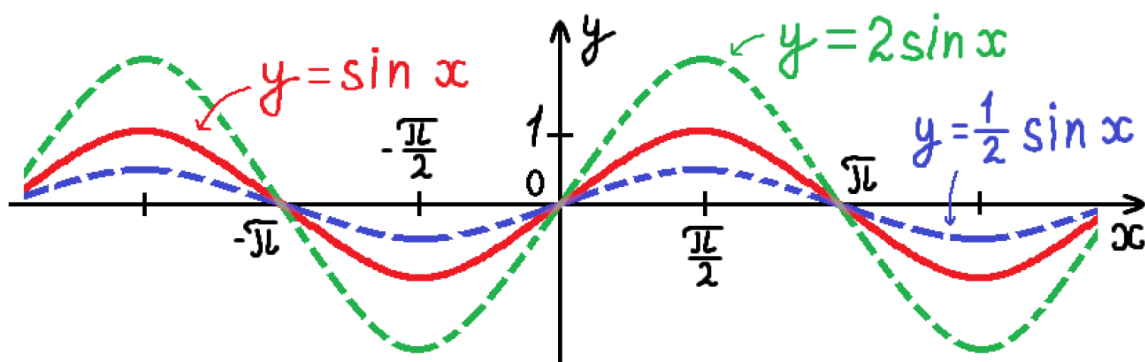


Рис. 12. Пример растяжения и сжатия графика функции $y = \sin x$ вдоль оси ординат

Для построения графика функции $y = f(kx)$, $k > 0$, следует построить график функции $y = f(x)$ и сжать его вдоль оси абсцисс в k раз при $k > 1$ или растянуть в $\frac{1}{k}$ раз при $k < 1$ (рис. 13).

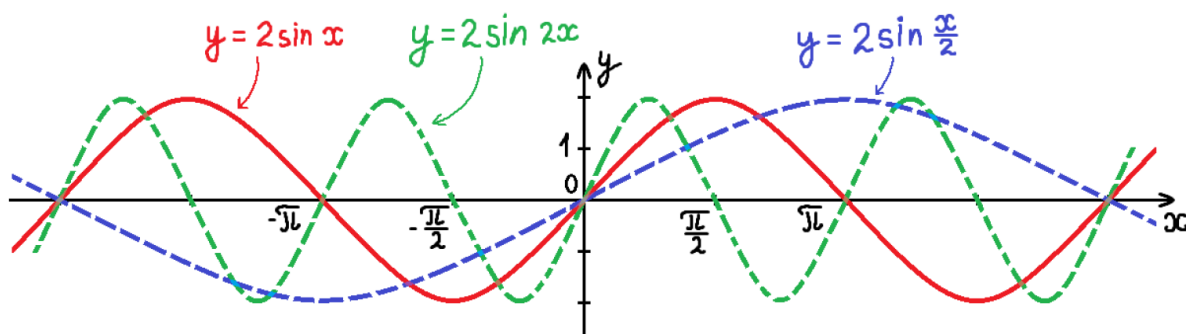


Рис. 13. Пример растяжения и сжатия графика функции $y = 2 \sin x$ вдоль оси абсцисс

Пример 1. Построить график функции $y = 2 \sin(2x - 1)$.

Преобразуем данную функцию к виду $y = 2\sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$.

В качестве исходного построим график функции $y = \sin x$.

Затем строим график функции $y = \sin 2x$ путем сжатия графика $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс в два раза (рис. 14):

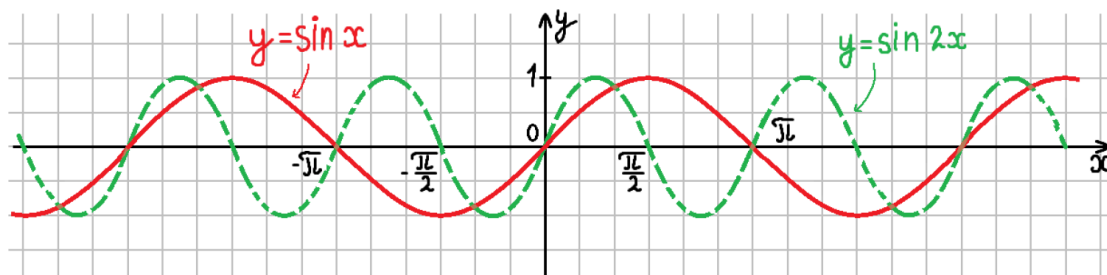


Рис. 14. Графики функций $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$

После этого строим график функции $y = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ путем сдвига графика $y = \sin 2x$ на $\frac{1}{2}$ вправо (рис. 15):

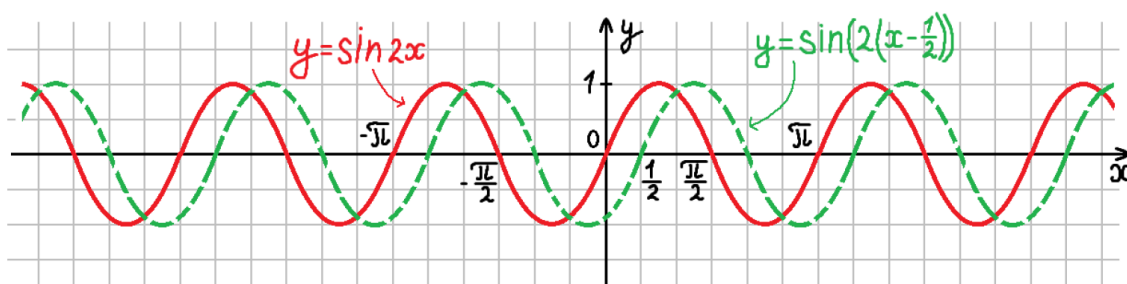


Рис. 15. Графики функций $y = \sin 2x$ и $y = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$

Наконец, путем растяжения полученного графика функции $y = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ вдоль оси ординат в два раза получаем искомый график (рис. 16):

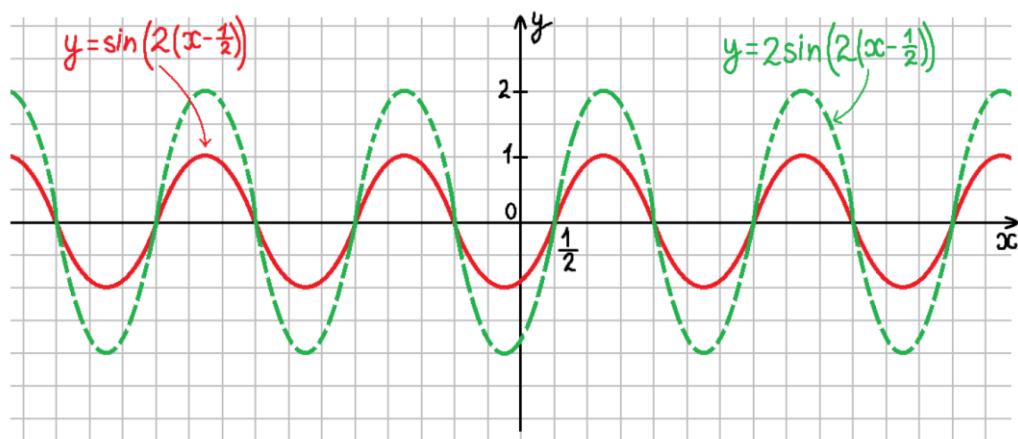


Рис. 16. Графики функций $y = \sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ и $y = 2\sin\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$

Упражнения

Построить графики функций:

- 1) $y = \sin(3x - 2) + 1$;
- 2) $y = -2\cos(2x + 1)$.

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ нужно сначала построить график функции $y = f(x)$, а затем ту часть графика, которая расположена под осью абсцисс, отразить относительно оси абсцисс. Полученная над осью абсцисс кривая и будет графиком функции $y = |f(x)|$ (рис.17).

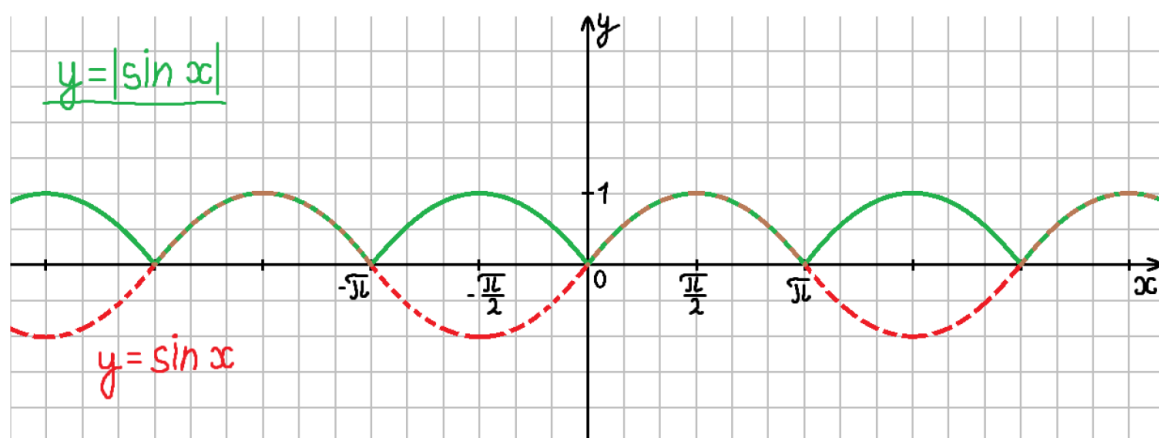


Рис. 17. Графики функций $y = \sin x$ и $y = |\sin x|$

Для построения графика функции $y = f(|x|)$ нужно сначала построить график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$, а затем отразить его относительно оси ординат (рис. 18).

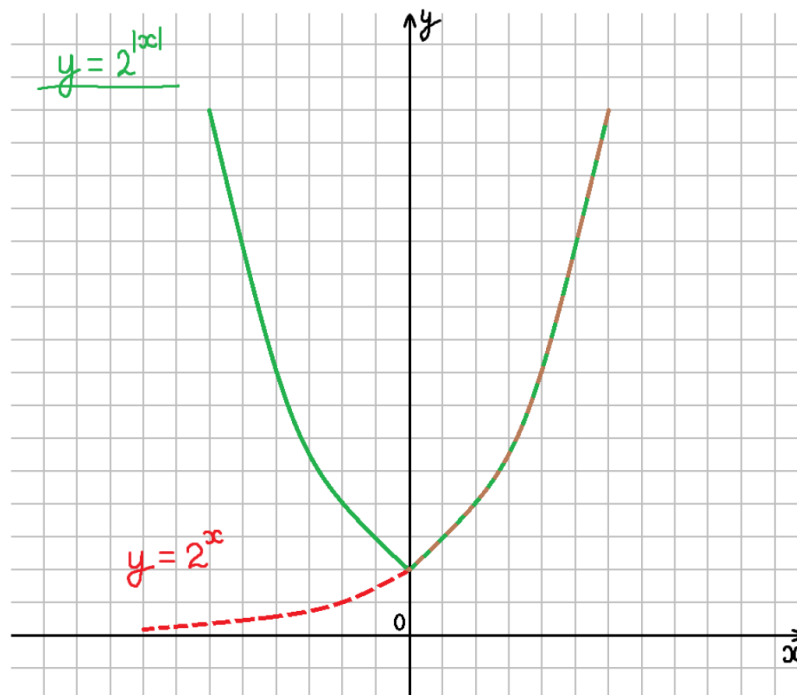


Рис. 18. Графики функций $y = 2^x$ и $y = 2^{|x|}$

Выражения для функций могут содержать одновременно переменные со знаком модуля и без него. Прежде чем строить графики таких функций, необходимо предварительно раскрыть знак модуля и выполнить построение графика на отдельных интервалах. Функция, заданная отдельной формулой на каждом из интервалов области ее определения, называется *кусочно-заданной функцией*.

Пример 2. Построить график функции $y = |x| + x$.

Раскрыв знак модуля, получим кусочно-заданную функцию (рис. 19):

$$y = \begin{cases} 2x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

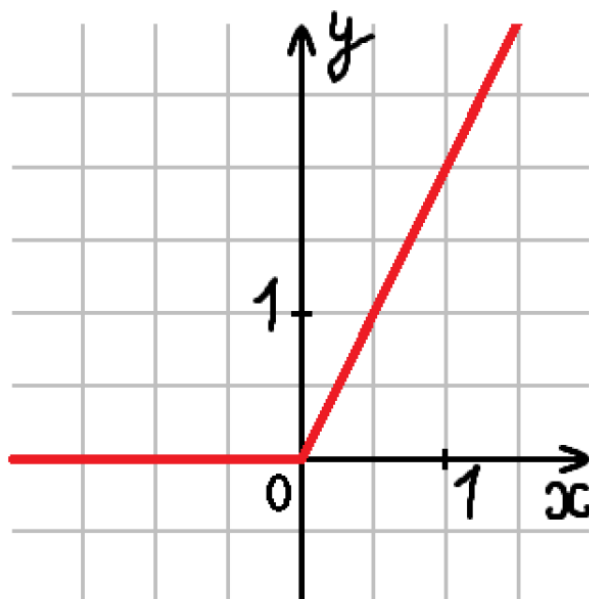


Рис. 19. График функции $y = |x| + x$

Пример 3. Построить график функции $y = |x - 1| + |x + 2|$.

Раскрыв знаки модулей, получим кусочно-заданную функцию (рис. 20):

$$y = \begin{cases} -2x - 1, & x < -2; \\ 3, & -2 \leq x \leq 1; \\ 2x + 1, & x > 1. \end{cases}$$

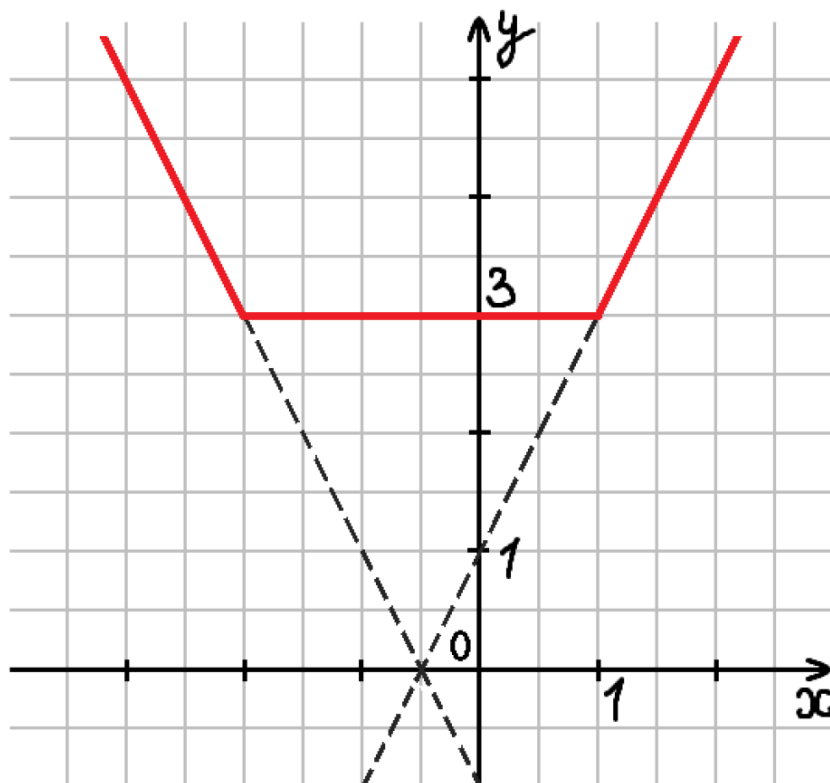


Рис. 20. График функции $y = |x-1| + |x+2|$

Упражнения

Построить графики функций:

1) $y = |\ln|x||$;

2) $y = \sqrt{2(x + |x-2|)}$.

Для построения графиков функций $y(x) = f(x) \pm g(x)$, $y(x) = f(x)g(x)$,

$y(x) = \frac{1}{f(x)}$ следует построить на одном чертеже графики функций $f(x)$, $g(x)$,

а затем нужный график строить по точкам на основе $f(x)$ и $g(x)$.

Пример 4. Построить график функции $y = x + \sin x$ (рис. 21).

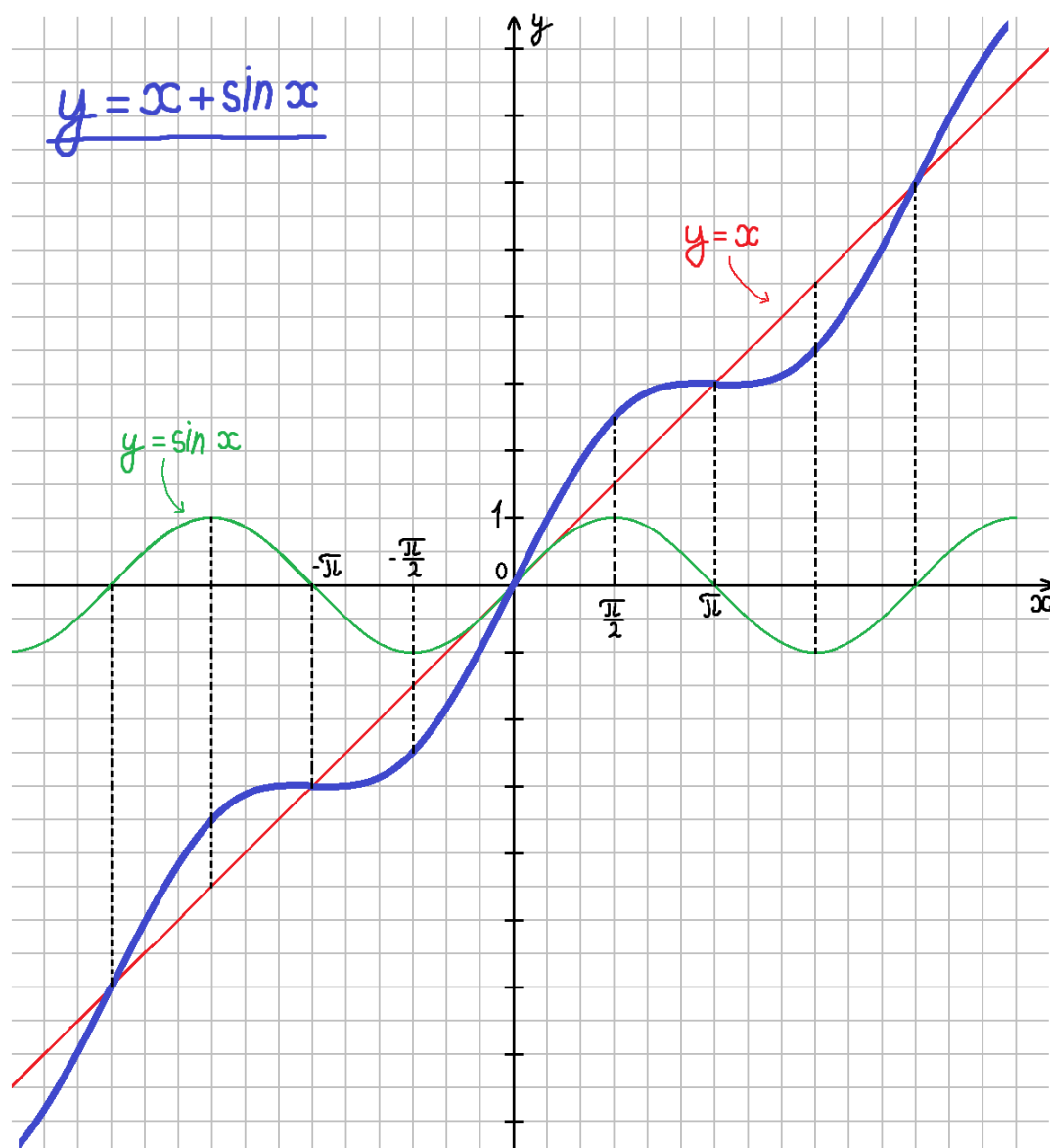


Рис. 21. График функции $y = x + \sin x$

Пример5. Построить график функции $y = 2^x + 2^{-x}$ (рис. 22).

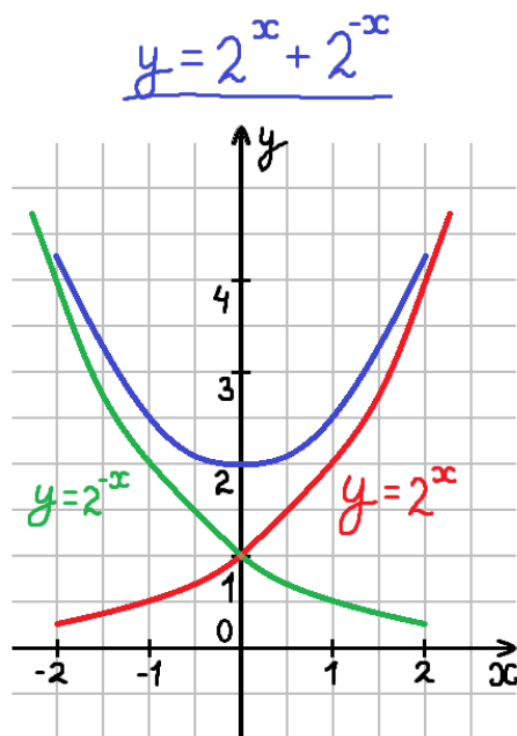


Рис. 22. График функции $y = 2^x + 2^{-x}$

Пример 6. Построить график функции $y = \frac{1}{\log_2 x}$ (рис. 23).

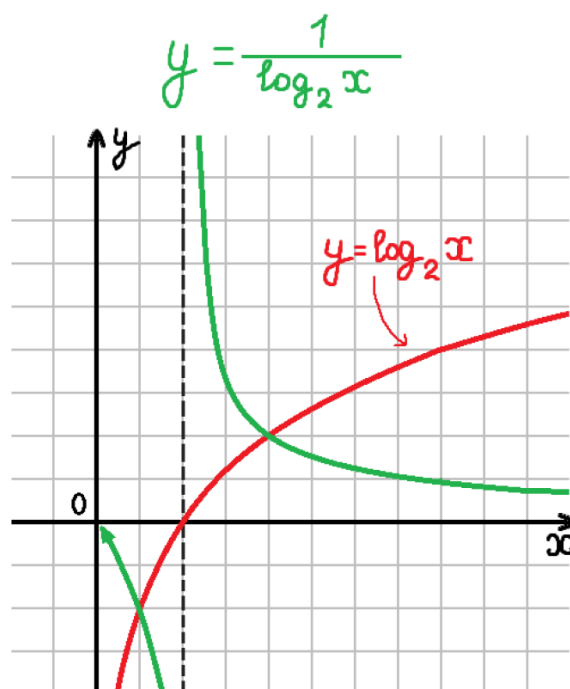


Рис. 23. График функции $y = \frac{1}{\log_2 x}$

Пример 7. Построить график функции $y = x \sin x$ (рис. 24).

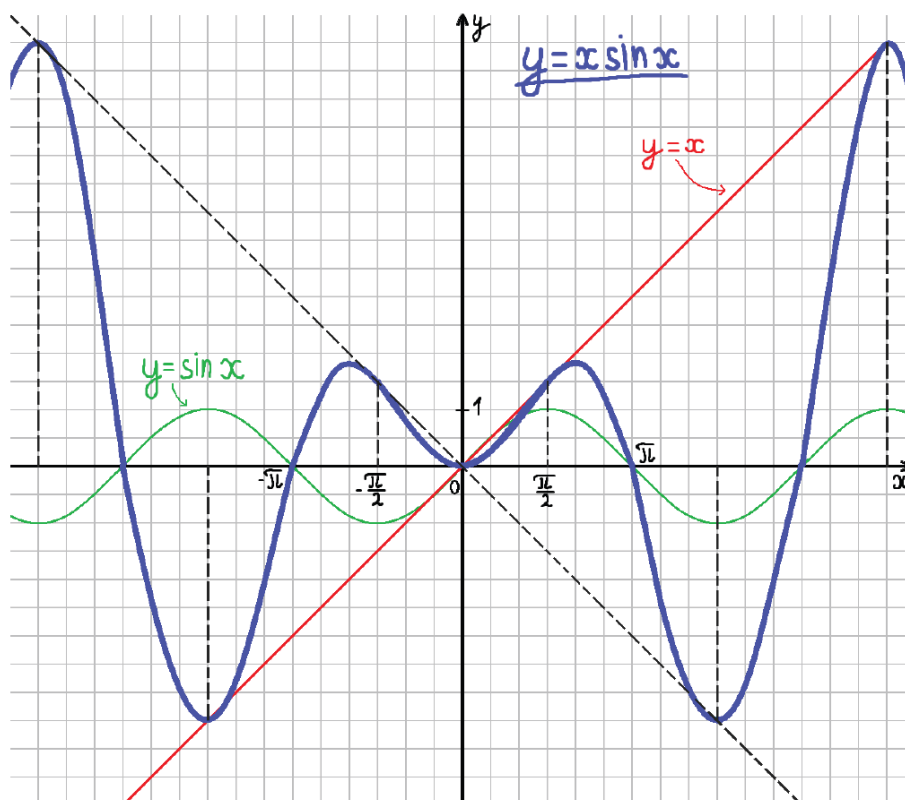


Рис. 24. График функции $y = x \sin x$

Пример 8. Построить график функции $y = \frac{\sin x}{x} + x$ (рис. 25).

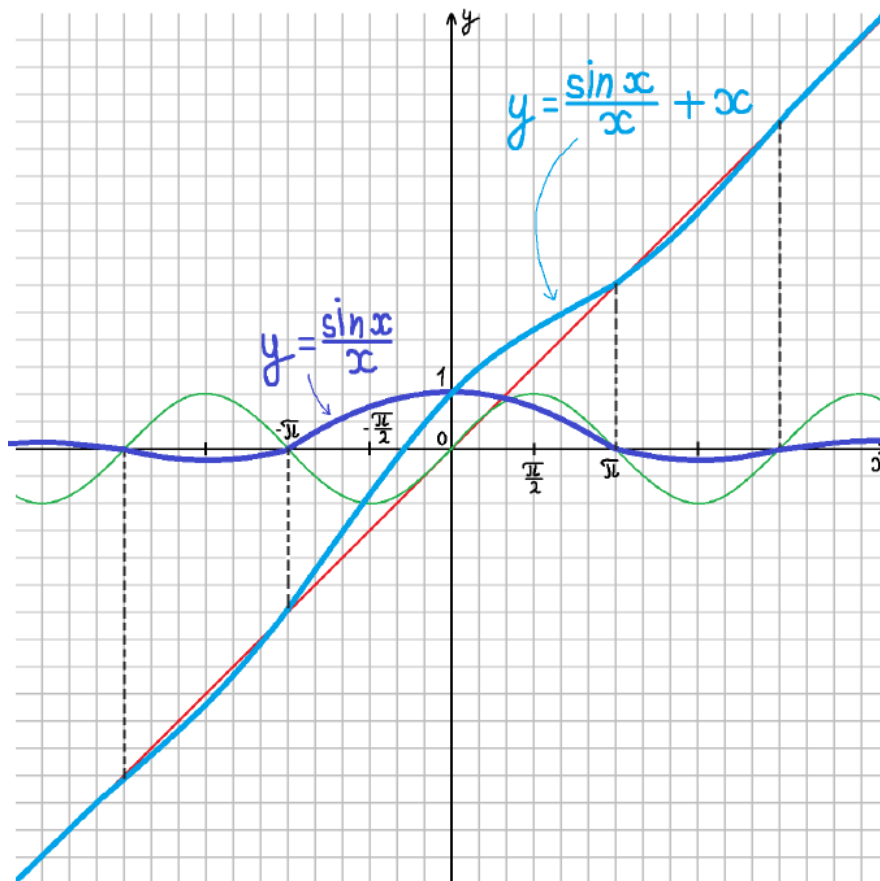


Рис. 25. График функции $y = \frac{\sin x}{x} + x$

Упражнения

Построить графики функций:

- 1) $y = \sin x + \cos x$;
- 2) $y = 2\sin x + \cos 2x$;
- 3) $y = x^2 \cos x$;
- 4) $y = \frac{1}{\cos x}$.

Функция $y = \varphi(f(x))$ называется *сложной функцией*, или функцией от функции. Для построения графика сложной функции нужно сначала построить график функции $f(x)$, а затем по точкам строить график функции $y = \varphi(f(x))$.

Пример 9. Построить график функции $y = 3^{\cos x}$ (рис. 26).

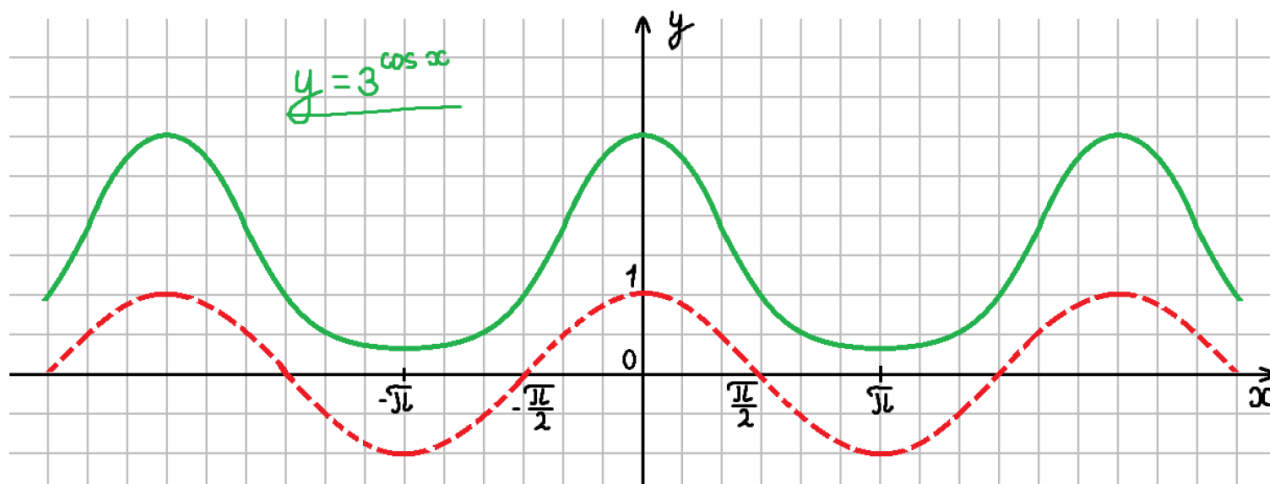


Рис. 26. График функции $y = 3^{\cos x}$

Пример10. Построить график функции $y = \sqrt{\cos x}$ (рис. 27).

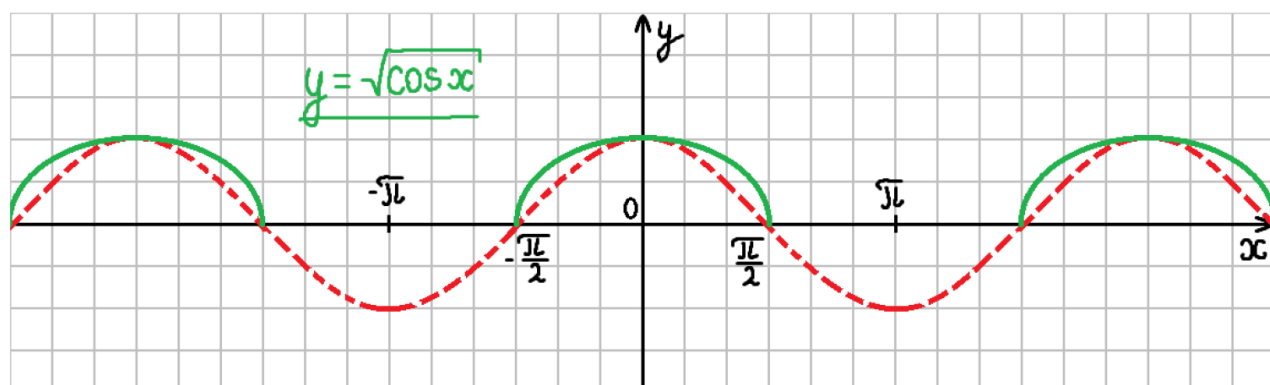


Рис. 27. График функции $y = \sqrt{\cos x}$

Пример11. Построить график функции $y = \log_{\frac{1}{3}} \cos x$ (рис.28).

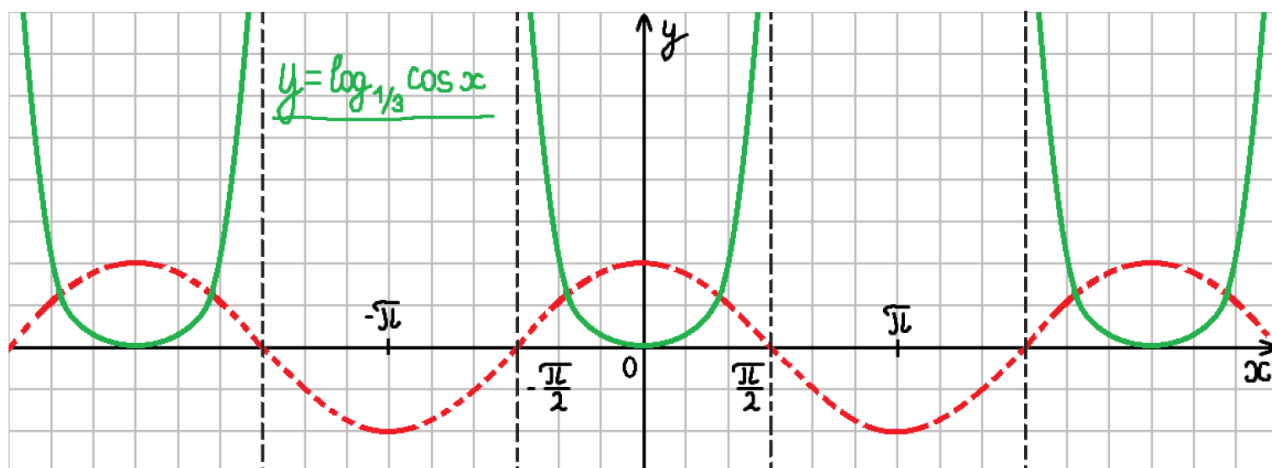


Рис. 28. График функции $y = \log_{\frac{1}{3}} \cos x$

Примеры 12-14. Построить графики функций:

$$y = \log_2 \log_3 x, \quad y = 2^{\frac{1}{x}}, \quad y = 2^{\frac{2}{\pi} \arctg x} \quad (\text{рис. 29}).$$

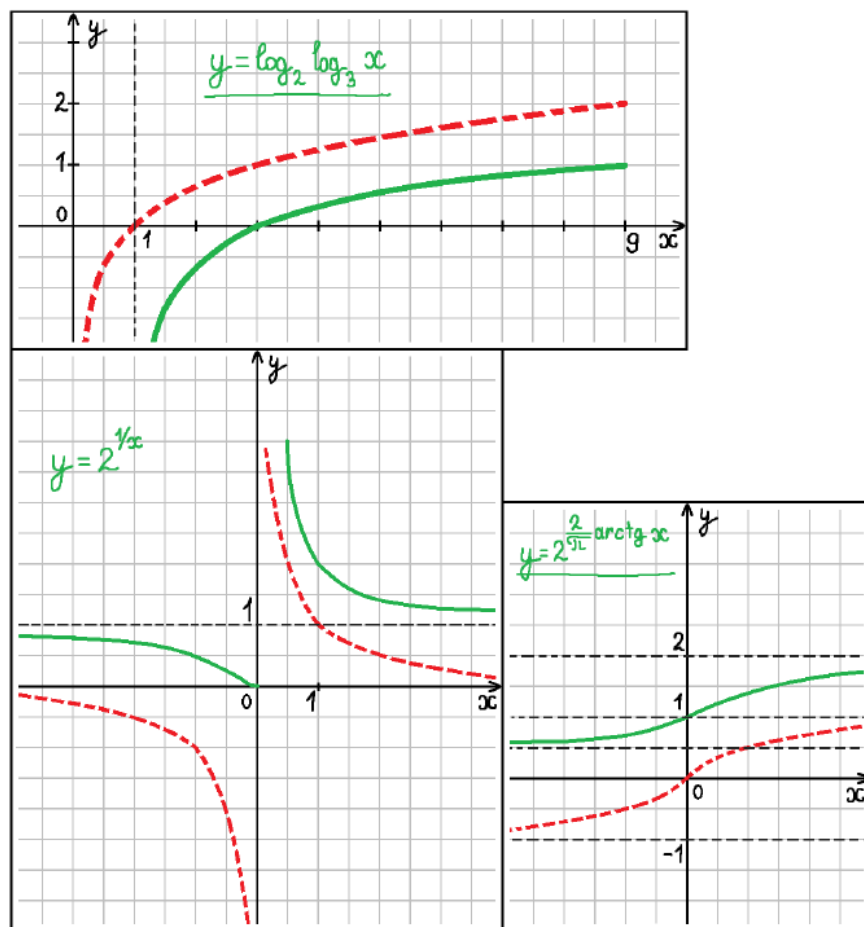


Рис. 29. Графики функций $y = \log_2 \log_3 x$, $y = 2^{\frac{1}{x}}$, $y = 2^{\frac{2}{\pi} \arctg x}$

Упражнения

Построить графики функций:

1) $y = \sin^2 x$;

2) $y = \operatorname{tg}^2 x$;

3) $y = \sqrt{\log_2 x}$;

4) $y = \operatorname{ctg} \cos x$.

2. Исследование поведения функций

Приведена пошаговая схема исследования функции для выявления ее существенных характеристик. Представлены многочисленные примеры исследования различных функций.

Планируемые результаты обучения. После изучения материалов данной главы студенты приобретут навыки:

- исследования функций одной переменной различной сложности;
- практического применения дифференциального исчисления функций одной переменной.

Если функция $y = f(x)$ задана формулой, то под областью определения функции (О.О.Ф.) обычно понимают множество всех значений x , при которых формула, определяющая функцию, имеет смысл. Такая область определения называется *естественной*.

При нахождении области определения функции следует учитывать следующие ограничения:

- значения x , при которых знаменатель обращается в нуль, не входят в о.о.ф;

- при извлечении корня четной степени те значения x , при которых подкоренное выражение становится отрицательным, не входят в о.о.ф;
- степенная функция $y = x^\alpha$ с иррациональным показателем α определена лишь при $x \geq 0$;
- выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным;
- основание логарифма должно быть положительным и не равным 1;
- выражение, стоящее под знаком арксинуса или арккосинуса, должно быть по модулю не больше 1.

Замечание. При исследовании области определения функции необходимо исходить из первоначально заданного выражения для функции и не проводить перед этим никаких тождественных преобразований.

Примеры функций, определенных не при всех x :

- функции $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ определены при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;
- функции $y = \sqrt[4]{x^2 - 1}$ и $y = (x^2 - 1)^{\sqrt{2}}$ определены при $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;
- функция $y = \log_{x^2} 2$ определена при $x \neq 0, x \neq \pm 1$;
- функция $y = \arccos(3 - x)$ определена при $x \in [2; 4]$;
- функция $y = 2^{\log_2 x}$ определена при $x > 0$;
- функция $y = (\sqrt{x})^2$ определена при $x \geq 0$;
- функция $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ определена при $x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- функция $y = \sin(\arcsin x)$ определена при $x \in [-1; 1]$;
- функция $y = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x}$ определена при $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

- функция $y = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}$ определена при $x \neq 0$.

2.1. Непрерывность функции в точке. Свойства функций непрерывных в замкнутом промежутке. Разрывная в точке функция. Виды разрывов

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если:

- 1) эта функция определена в точке x_0 ;
- 2) существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
- 3) этот предел равен $f(x_0)$, т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области, то она называется непрерывной в этой области.

Если при $x = x_0$ хотя бы одно из условий 1-3 не выполняется, то точка x_0 называется точкой разрыва.

Точки разрыва подразделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Если для функции $f(x)$ существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, причем не все три числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ равны между собой, то x_0 называется точкой разрыва первого рода (рис. 30).

В частности, если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева (рис. 31); если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа (рис. 32); если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то точка x_0 называется устранимой точкой разрыва (рис. 33).

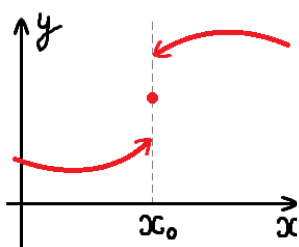


Рис. 30. Точка
разрыва
первого рода
(общий случай)

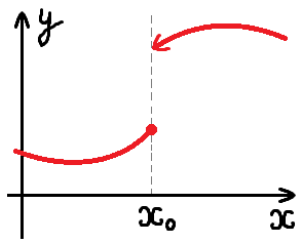


Рис. 31.
Функция
непрерывна
слева

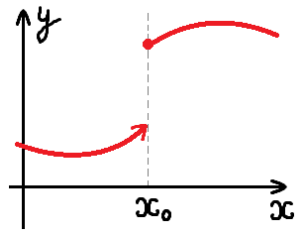


Рис. 32.
Функция
непрерывна
справа

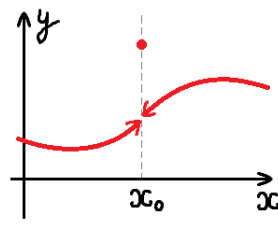


Рис. 33.
Устранимая
точка разрыва

Точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва первого рода, называются точками разрыва второго рода.

Более конкретно, точка разрыва x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$, если по крайней мере один из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ в этой точке не существует или равен бесконечности.

Например, функция $y = \frac{1}{x^2}$ в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода, так как односторонние пределы в этой точке обращаются в бесконечность:

$$\lim_{x \rightarrow 0 - 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0 + 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad (\text{рис. 34}).$$

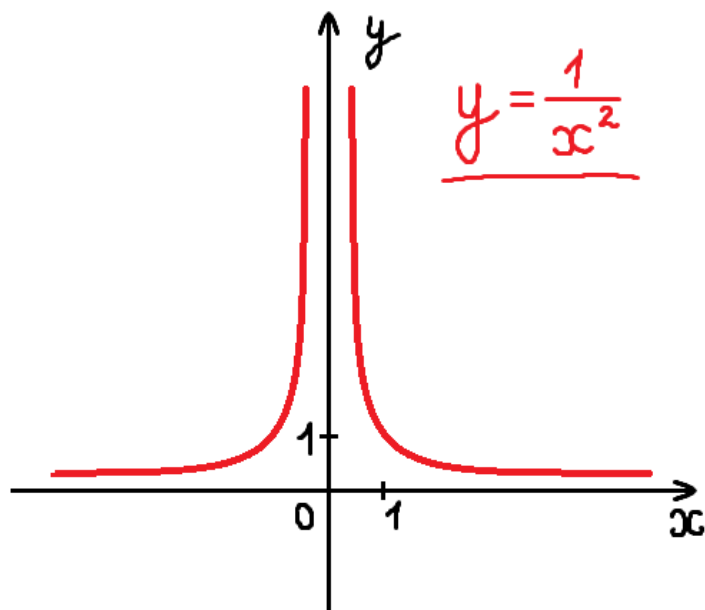


Рис. 34. График функции $y = \frac{1}{x^2}$

Функция $y = \cos \frac{\pi}{x}$ в точке $x=0$ имеет разрыв второго рода, так как односторонние пределы в этой точке не существуют (рис. 35).

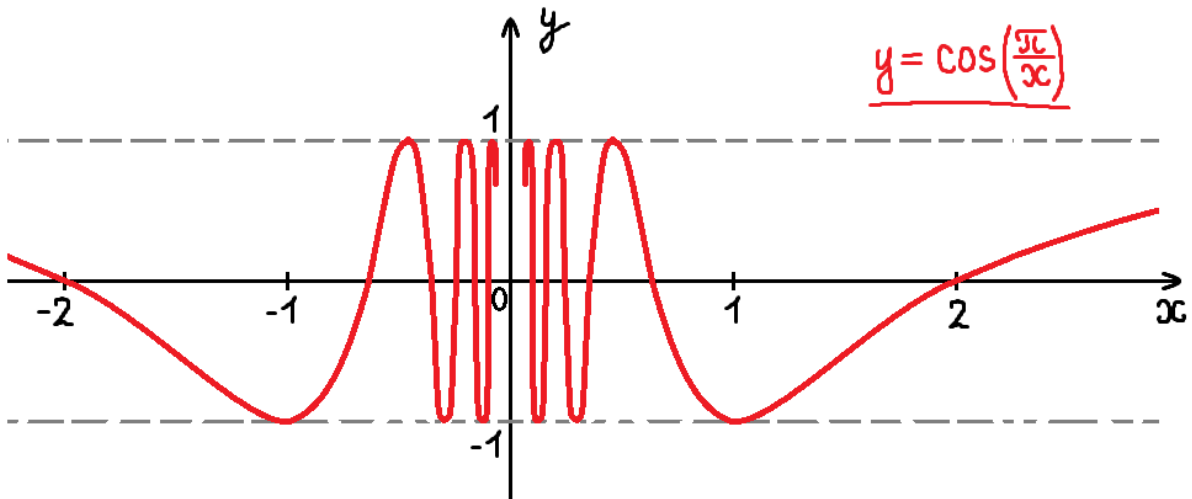


Рис. 35. График функции $y = \cos \frac{\pi}{x}$

Свойства функций непрерывных на отрезке:

1. **Теорема Вейерштрасса.** Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке свое наибольшее и свое наименьшее значения;
2. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция является ограниченной на этом отрезке;
3. **Теорема Больцано-Коши.** Если функция $y = f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка неравные между собой значения, то есть $f(a) = a_0$, $f(b) = b_0$, то на этом отрезке функция принимает и все промежуточные значения между a_0 и b_0 ;

4. Если непрерывная на некотором отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то существует точка $c \in [a, b]$, такая что $f(c) = 0$.

Промежутки знакопостоянства

В общем случае функция может принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. Функция может изменить знак (но не обязательно меняет) только в точках, где она принимает нулевые значения или в точках разрыва. Нули функции и точки разрыва разбивают о.о.ф. на промежутки знакопостоянства функции. Знак функции в каждом промежутке можно определить, вычислив значение функции в какой-либо точке из этого промежутка.

Пример 15. Найти промежутки знакопостоянства функции $y = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x-5}$.

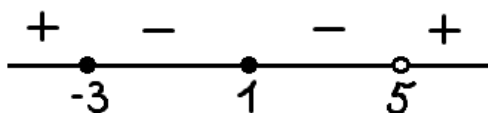


Рис. 36. Промежутки знакопостоянства функции $y = \frac{(x-1)^2(x+3)}{x-5}$

Функция положительна на $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$.

Функция отрицательна на $(-3; 1) \cup (1; 5)$.

2.2. Возрастание и убывание функции. Локальный максимум и минимум. Критические точки. Необходимые и достаточные условия экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Применение теории максимума и минимума функции к решению задач

Производная функции, ее геометрический смысл

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется число

$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Если функция имеет производную в некоторой точке,

то говорят, что функция дифференцируема в этой точке.

Геометрический смысл производной: производная в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке x_0 (рис. 37).

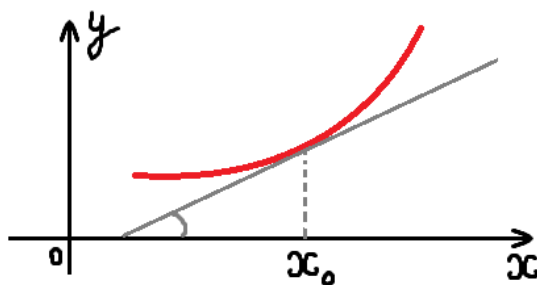


Рис. 37. Геометрический смысл производной

Приведем некоторые конкретные примеры производных функций в точке.

I. $y = |x|$ (рис. 38).

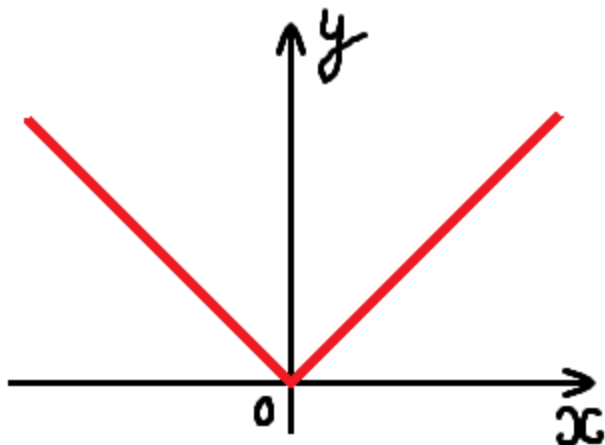


Рис. 38. График функции $y = |x|$

В точке $x = 0$ производная не существует. Касательной в точке $x = 0$ нет.

Аналитически в точке $x=0$ имеем $\left| x' \right|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \rightarrow 0+0, \\ -1, & \text{если } x \rightarrow 0-0. \end{cases}$

Замечание. Мы видим, что у функции $y=|x|$ в точке $x=0$ существуют односторонние пределы. В таких случаях говорят, что функция имеет односторонние производные (или «производные слева и справа»), обозначают их $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$. Если односторонние производные не равны друг другу $f'_-(x) \neq f'_+(x)$, то производная в точке не существует.

II. $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 39).

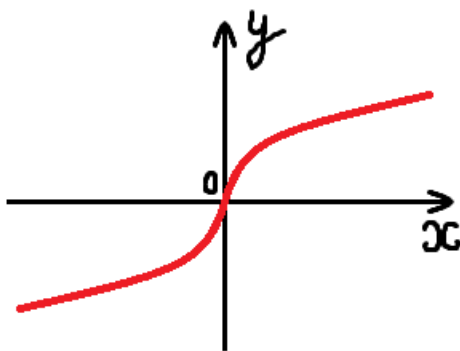


Рис. 39. График функции $y = \sqrt[3]{x}$

В точке $x=0$ производная обращается в бесконечность. График функции имеет в точке $x=0$ вертикальную касательную.

Аналитически в точке $x=0$ имеем $\left(\sqrt[3]{x} \right)' \Big|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$.

III. $y = \sqrt[3]{|x|}$ (рис. 40).

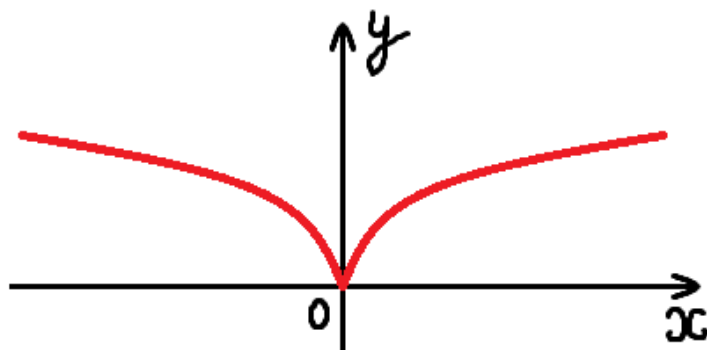


Рис. 40. График функции $y = \sqrt[3]{|x|}$

В точке $x=0$ производная не существует. Касательной в точке $x=0$ нет.

Аналитически в точке $x=0$ имеем

$$\left(\sqrt[3]{|x|}\right)' \Big|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{|x|}}{x} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } x \rightarrow 0+0, \\ -\infty, & \text{если } x \rightarrow 0-0. \end{cases}$$

Понятие производной функции непосредственно связано с возрастанием и убыванием самой функции.

Функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей на некотором промежутке области ее определения, если для любой пары значений x_1 и x_2 из этого промежутка таких, что $x_1 < x_2$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Если же при $x_1 < x_2$ имеет место противоположное неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции), то функция $f(x)$ называется монотонно убывающей.

Если на каком-то промежутке $f'(x) > 0$, то касательная к графику функции в любой точке из этого промежутка образует острый угол с осью Ox , и функция $f(x)$ на этом участке возрастает;

Если же $f'(x) < 0$ на некотором промежутке, то касательная к графику функции в любой точке из этого промежутка образует тупой угол с осью Ox , и функция $f(x)$ на этом участке убывает (рис. 41).

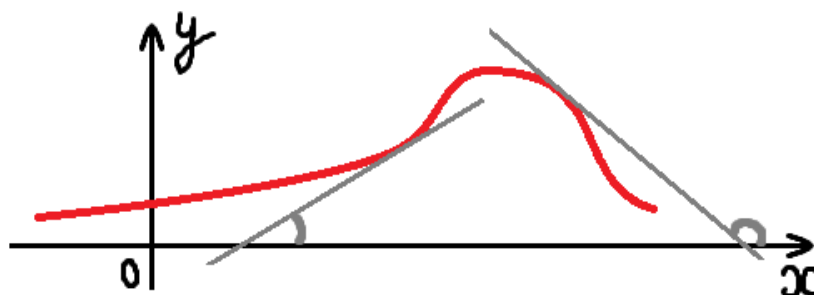


Рис. 41. Связь между знаком производной и монотонностью функции

Производная $f'(x)$ может изменить знак (но не обязательно меняет) только в точках, в которых либо $f'(x)=0$, либо $f'(x)$ не существует. Такие точки называются критическими.

Критические точки разбивают о.о.ф. на промежутки возрастания или убывания функции. Знак $f'(x)$ в каждом промежутке можно определить, вычислив значение $f'(x)$ в какой-либо точке из этого промежутка.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (или просто максимум), если существует такая окрестность точки x_0 , в которой при $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум (или просто минимум), если существует такая окрестность точки x_0 , в которой при $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием локальный экстремум или просто экстремум.

Экстремум может достигаться только в критической точке (необходимое условие).

Поэтому критические точки также называются точками возможного экстремума. В этих точках не обязательно достигается экстремум (рис. 42, 43).

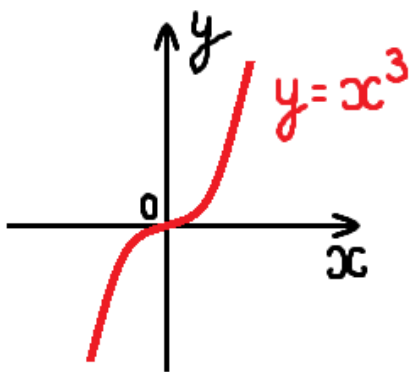


Рис. 42. При $x=0$ $f'(x)=0$, но экстремума нет

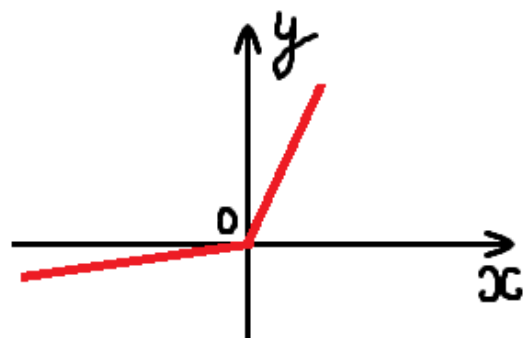


Рис. 43. При $x=0$ производная не существует, но экстремума нет

Достаточное условие экстремума. Пусть x_0 - точка возможного экстремума, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 . Тогда, если при переходе через точку x_0 , производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум; если производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный минимум. Если при переходе через точку x_0 производная не меняет знака, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет экстремума.

Замечание. Требование непрерывности в точке x_0 существенно. Если оно не выполнено, то возможны ситуации, когда производная меняет знак, но экстремума нет (рис. 44)

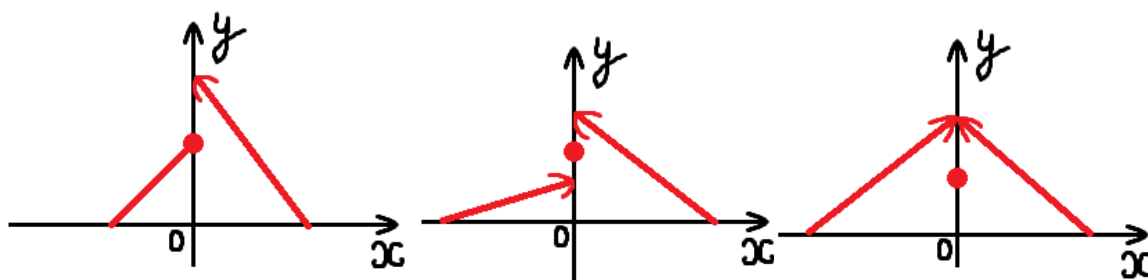


Рис. 44. Отсутствие экстремума в точках разрыва функции

Пример 16. Определить промежутки возрастания и убывания, найти экстремумы функции $y = \frac{1}{8}(-x^3 - 3x^2 + 9x + 11)$.

Ищем производную: $y' = -\frac{3}{8}(x-1)(x+3)$.

Промежутки знакопостоянства производной y' (рис. 45):

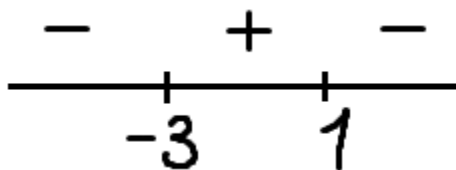


Рис. 45. Промежутки знакопостоянства y'

Промежутки возрастания и убывания функции y (рис. 46):

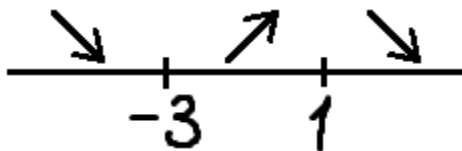


Рис. 46. Промежутки возрастания и убывания y

Таким образом, точка $x_{\min} = -3$ - точка минимума, точка $x_{\max} = 1$ - точка максимума.

Найдем значения функции в этих точках: $y_{\min} = y(-3) = -2$, $y_{\max} = y(1) = 2$ (рис. 47).

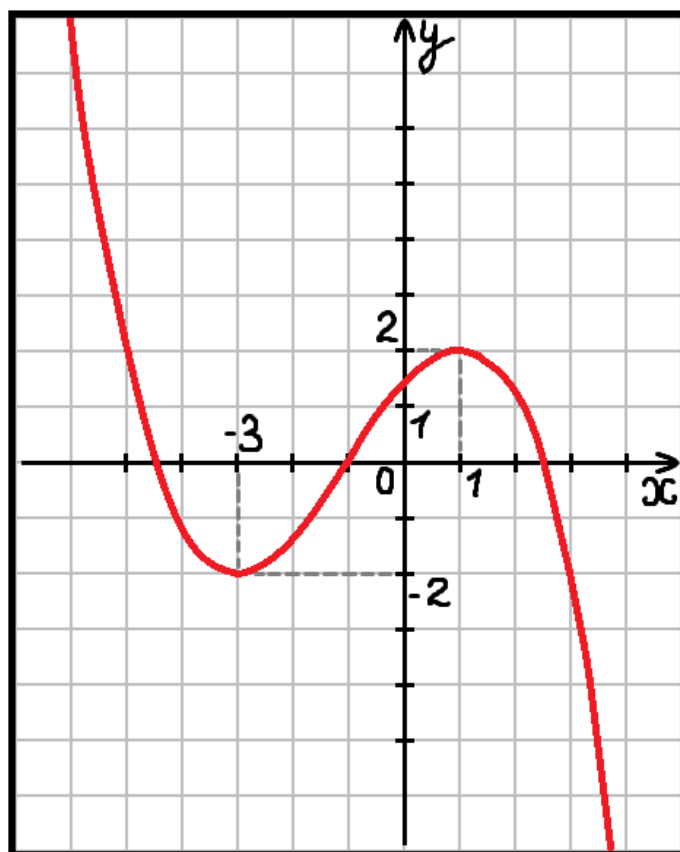


Рис. 47. График функции $y = \frac{1}{8}(-x^3 - 3x^2 + 9x + 11)$

Пример 17. Определить промежутки возрастания и убывания, найти

экстремумы функции $y = \frac{3\sqrt[3]{6(x-1)^2}}{2(x^2 + 2x + 9)}$.

Ищем производную: $y' = -2\sqrt[3]{6} \frac{(x+2)(x-3)}{\sqrt[3]{x-1}(x^2+2x+9)^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции y (рис. 48):

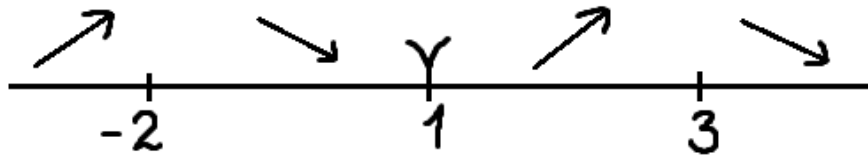


Рис. 48. Промежутки возрастания и убывания y

Таким образом, $x_{\max} = -2$, $x_{\max} = 3$ - точки максимума, $x_{\min} = 1$ - точка минимума.

Найдем значения функции в этих точках: $y_{\max} = y(-2) \approx 0,63$, $y_{\max} = y(3) \approx 0,18$, $y_{\min} = y(1) = 0$ (рис. 49).

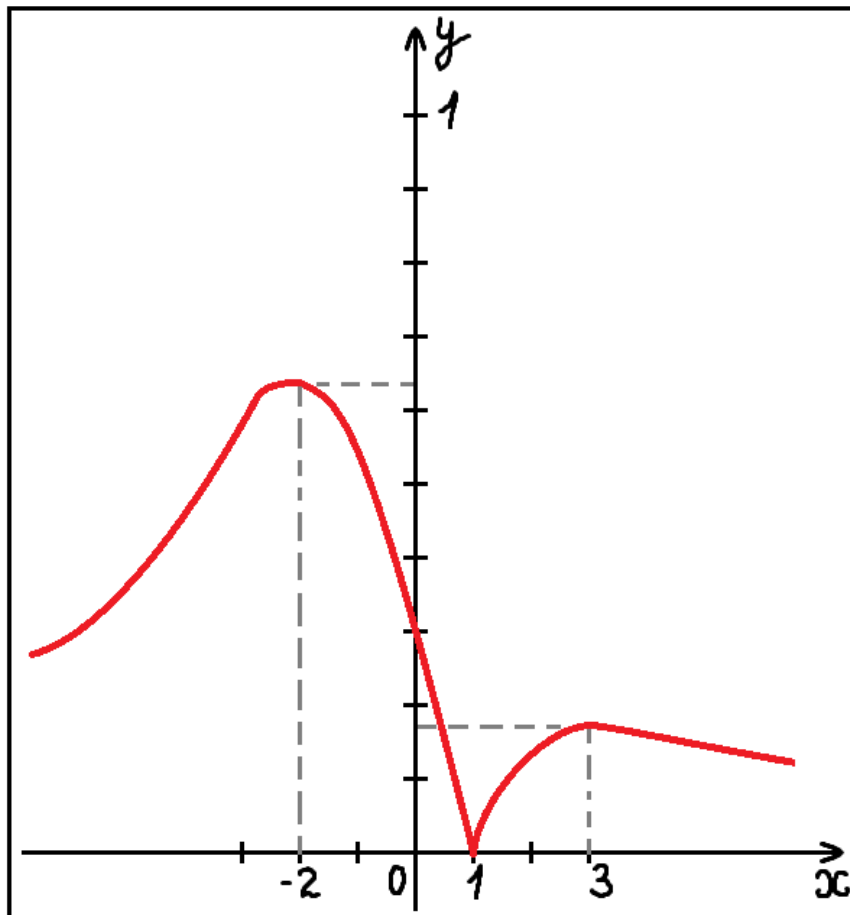


Рис. 49. График функции $y = \frac{3\sqrt[3]{6}(x-1)^2}{2(x^2+2x+9)}$

В точке $x=1$ производная не существует, причем предел производной справа равен $+\infty$, а предел производной слева равен $-\infty$. Такие точки называются точками возврата (или точками заострения).

Пусть задана непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $y = f(x)$.

Точка $x_0 \in [a,b]$ называется *точкой глобального максимума (точкой наибольшего значения)* функции $f(x)$, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Точка $x_0 \in [a,b]$ называется *точкой глобального минимума (точкой наименьшего значения)* функции $f(x)$, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

2.3. Исследование функции на экстремум по второй производной. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия существования точки перегиба

Функция на некотором промежутке выпукла вниз (вогнута), если в пределах данного промежутка график функции лежит не ниже любой касательной.

Функция на некотором промежутке выпукла вверх, если в пределах данного промежутка график функции лежит не выше любой касательной.

Также как возрастание и убывание функции $f(x)$ связано с первой ее производной $f'(x)$, выпуклость графика функции $f(x)$ связана со второй ее производной $f''(x)$.

Если на некотором промежутке $f''(x) \geq 0$, то функция выпукла вниз; если $f''(x) \leq 0$, то функция выпукла вверх (рис. 50, 51).

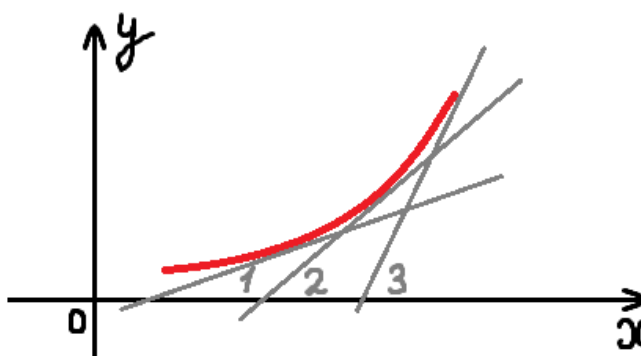


Рис. 50. График функции выпуклой
вниз

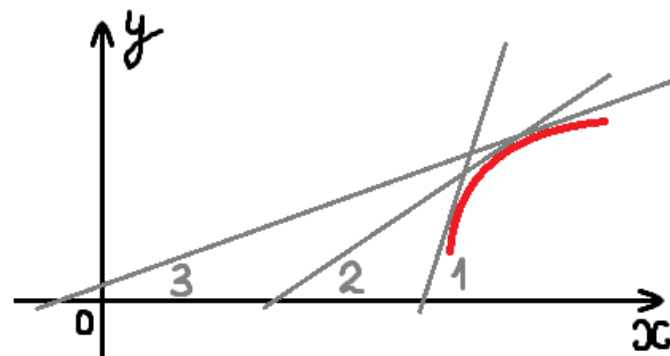


Рис. 51. График функции выпуклой
вверх

Точка x_0 является точкой перегиба функции, если она является концевой точкой промежутков выпуклости вверх и выпуклости вниз, то есть концом промежутка выпуклости вверх и началом промежутка выпуклости вниз или концом промежутка выпуклости вниз и началом промежутка выпуклости вверх (рис. 52-54).

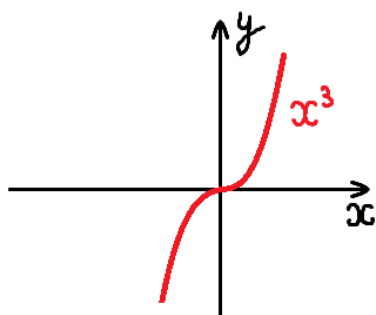


Рис. 52. Точка $x = 0$
является точкой
перегиба

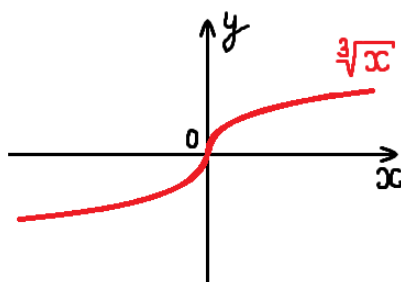


Рис. 53. Точка $x = 0$
является точкой
перегиба

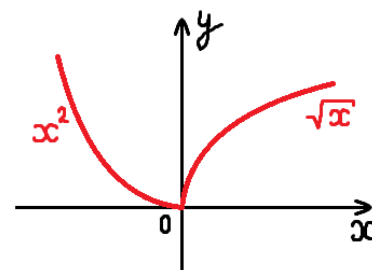


Рис. 54. Точка $x = 0$
не является точкой
перегиба, т.к. при
 $x = 0$ график не имеет
касательной

Если график функции $f(x)$ имеет перегиб в точке x_0 , то либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует (необходимое условие). Однако точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, не обязательно являются точками перегиба (рис. 55, 56).

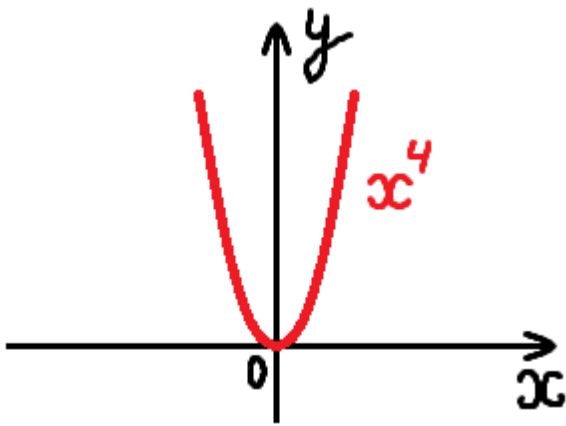


Рис. 55. Точка $x = 0$ не является точкой перегиба, хотя в этой точке $f''(x) = 0$

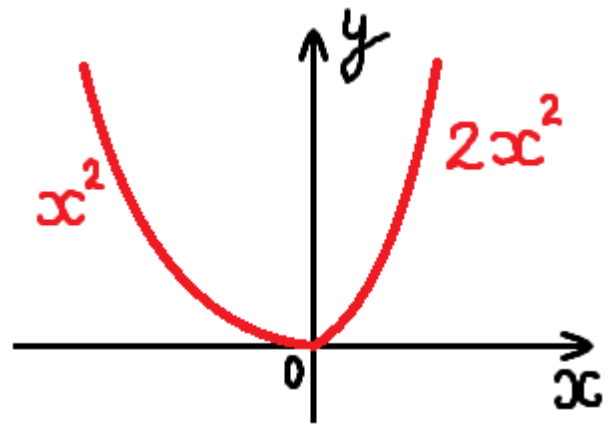


Рис. 56. Точка $x = 0$ не является точкой перегиба, хотя в этой точке $f''(x)$ не существует

Достаточное условие перегиба. Пусть в точке x_0 график функции $f(x)$ имеет касательную. Если $f''(x_0) = 0$ либо $f''(x_0)$ не существует и в некоторой окрестности точки x_0 слева и справа от точки x_0 знаки $f''(x)$ различны, то в точке x_0 график функции $f(x)$ имеет перегиб.

Пример 18. Определить промежутки выпуклости и найти точки перегиба графика функции $y = e^{-x^2}$.

Ищем первую производную: $y' = -2x \cdot e^{-x^2}$.

Ищем вторую производную: $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$.

Промежутки знакопостоянства второй производной y'' (рис. 57):

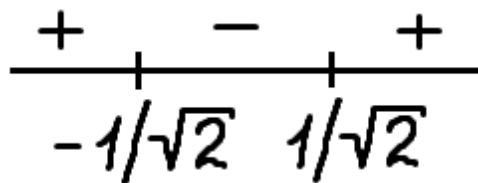


Рис. 57. Промежутки знакопостоянства y''

Промежутки выпуклости вверх и вниз функции y (рис. 58):

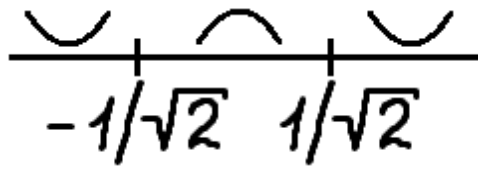


Рис. 58. Промежутки выпуклости функции y

Таким образом, при $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ график функции $y = e^{-x^2}$ имеет перегиб.

2.4. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.

Исследование графика функции вблизи вертикальной асимптоты. Общий план исследования функции и построения графика

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты подразделяются на вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ в точке $x = a$ равен $+\infty$ или $-\infty$ (рис. 60). Обычно вертикальные асимптоты — это точки разрыва второго рода.

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

Аналогично прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ (рис. 59).

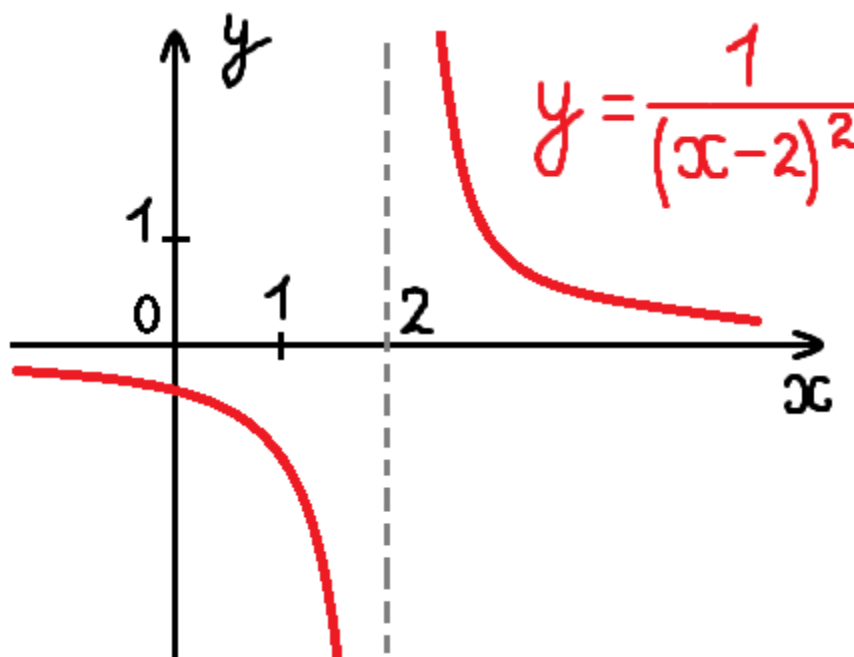


Рис. 59. Вертикальная асимптота $x = 2$, горизонтальная асимптота $y = 0$

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если существуют конечные пределы $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$.

Аналогично прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если существуют конечные пределы $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$.

Примеры, иллюстрирующие наклонные асимптоты, будут рассмотрены ниже.

График функции $y = f(x)$ может иметь не более одной наклонной или горизонтальной асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ и не более одной при $x \rightarrow -\infty$.

Пример 19. Найти асимптоты к графику функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ (рис. 60).

Проверим, будет ли прямая $x = 0$ вертикальной асимптотой.

Имеем $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = -\infty$. Условие, что хотя бы один из односторонних пределов в точке $x = 0$ равен бесконечности выполнено, значит, $x = 0$ - вертикальная асимптота.

Ищем наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = 2.$$

Значит, прямая $y = x + 2$ - наклонная асимптота.

Ищем наклонную асимптоту при $x \rightarrow -\infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = 2.$$

Значит, прямая $y = x + 2$ - наклонная асимптота.

В данном случае при $x \rightarrow \pm\infty$ имеем одну и ту же наклонную асимптоту.

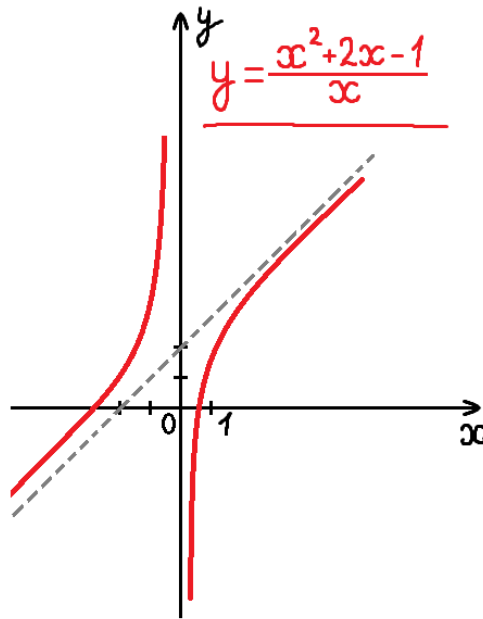


Рис. 60. Вертикальная асимптота $x = 0$, наклонная асимптота $y = x + 2$

Пример 20. Найти асимптоты к графику функции $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (рис. 61).

Проверим, будут ли прямые $x = 1$ и $x = -1$ вертикальными асимптотами.

Имеем $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ не существует, $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$. Условие, что хотя бы

один из односторонних пределов в точке $x = 1$ равен бесконечности выполнено, значит, $x = 1$ - вертикальная асимптота.

Далее $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ не существует. Условие, что хотя

бы один из односторонних пределов в точке $x = -1$ равен бесконечности выполнено, значит, $x = -1$ - вертикальная асимптота.

Ищем наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right) = 0.$$

Значит, прямая $y = x$ - наклонная асимптота.

Ищем наклонную асимптоту при $x \rightarrow -\infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} + x \right) = 0.$$

Значит, прямая $y = -x$ - наклонная асимптота.

В данном случае при $x \rightarrow \pm\infty$ имеем две различные наклонные асимптоты.

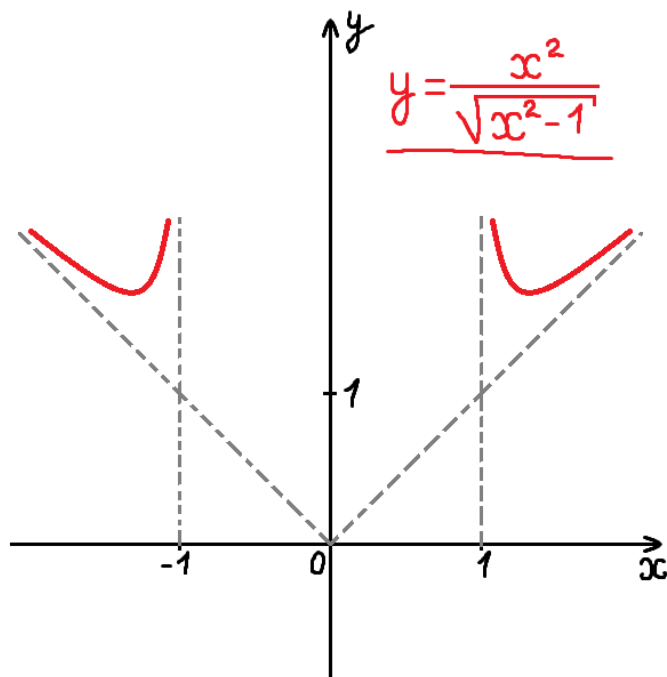


Рис. 61. Вертикальные асимптоты $x = \pm 1$, наклонные асимптоты $y = x$ и $y = -x$

Общий план исследования функции и построения графика

- 1) Найти область определения и область непрерывности функции.
- 2) Установить, является ли функция четной или нечетной, является ли функция периодической.
- 3) Найти нули функции и определить промежутки знакопостоянства. Найти точки пересечения с осью Oy .
- 4) Определить поведение функции в точках разрыва и на концах области определения. Установить, имеет ли функция вертикальные асимптоты.
- 5) Определить поведение функции при $x \rightarrow \pm\infty$. Установить, имеет ли функция горизонтальные и наклонные асимптоты.

- 6) Вычислить первую производную функции. Определить промежутки возрастания и убывания функции. Найти точки экстремума. В точках экстремума вычислить значения функции.
- 7) Вычислить вторую производную функции. Определить промежутки выпуклости вверх и вниз. Найти точки перегиба. В точках перегиба вычислить значения функции.
- 8) Результаты исследования нанести на чертеж. Вычислить значения функции в контрольных точках. Построить график.

Примеры исследования функций

Проведем исследование по изложенному выше плану и построим графики некоторых основных типов функций. Первый пример для каждого типа разберем подробно, остальные – в более сжатой форме без подробных математических выкладок.

Задание. В примерах 21–54 провести полное исследование функций и построить их графики.

Функции с многочленами

Пример 21. $y(x) = 16x^3 + 12x^2 - 5$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$ (или $D(f) = \mathbb{R}$).
- 2) Проверим функцию на четность, нечетность и периодичность.
Имеем $y(-x) = -16x^3 + 12x^2 - 5$.
Так как $y(-x) \neq y(x)$, функция не является четной, также $y(-x) \neq -y(x)$, значит, функция не является нечетной. Поэтому имеем функцию общего вида. Данная функция непериодическая.
- 3) Чтобы найти нули функции, решим уравнение $16x^3 + 12x^2 - 5 = 0$. Имеем $16x^3 + 12x^2 - 5 = (2x - 1)(8x^2 + 10x + 5)$, значит, функция обращается в нуль при $x = \frac{1}{2}$. Пересечение с осью Oy : $(0; -5)$.
- 4) Поскольку у функции нет точек разрыва, то нет и вертикальных асимптот.
- 5) Определим поведение функции при $x \rightarrow +\infty$.
Имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} (16x^3 + 12x^2 - 5) = +\infty$. Так как предел не равен конечному числу, делаем вывод, что горизонтальной асимптоты нет.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - kx).$$

Имеем $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x^3 + 12x^2 - 5}{x} = +\infty$. Так как предел не равен конечному

числу, делаем вывод, что наклонной асимптоты нет.

Определим поведение функции при $x \rightarrow -\infty$.

Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} (16x^3 + 12x^2 - 5) = -\infty$. Так как предел не равен конечному

числу, делаем вывод, что горизонтальной асимптоты нет.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - kx).$$

Имеем $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16x^3 + 12x^2 - 5}{x} = -\infty$. Так как предел не равен конечному

числу, делаем вывод, что наклонной асимптоты нет.

6) Производная $y' = 48x^2 + 24x = 24x(2x + 1)$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 62):

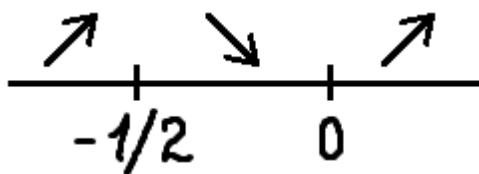


Рис. 62. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = -\frac{1}{2}$ - точка максимума; $y_{\max} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$.

Точка $x_{\min} = 0$ - точка минимума; $y_{\min} = y(0) = -5$.

7) Вторая производная $y'' = 96x + 24 = 24(4x + 1)$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 63):

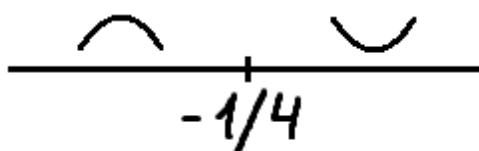


Рис. 63. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x = -\frac{1}{4}$; $y\left(-\frac{1}{4}\right) = -4,5$.

- 8) При построении графика функции начинаем с построения его асимптот, точек пересечения с координатными осями, точек экстремума и точек перегиба, при необходимости отмечаем дополнительные точки. Знание промежутков возрастания и убывания функции, а также интервалов выпуклости ее графика позволит верно построить график в соответствующих областях (рис. 64, 65).

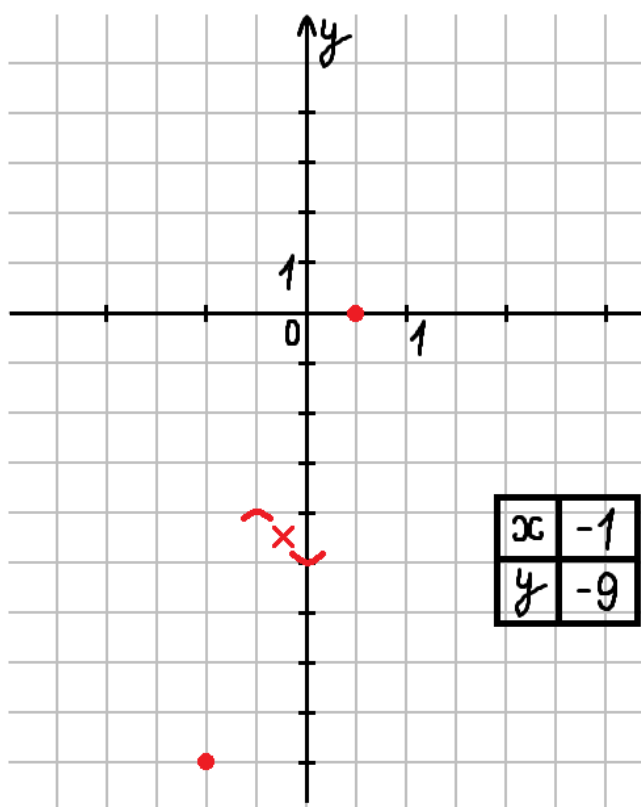


Рис. 64. Предварительный чертеж

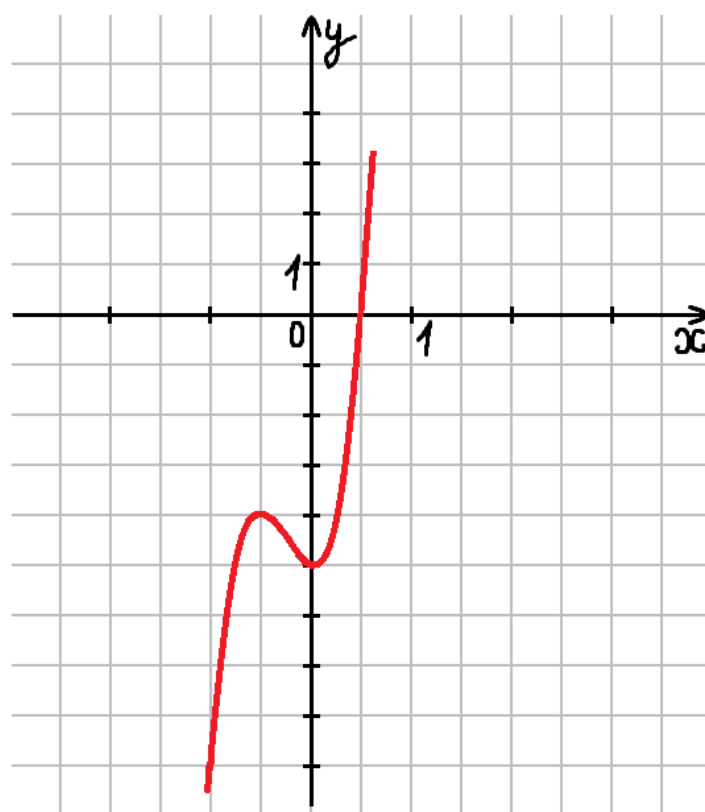


Рис. 65. График функции

$$y(x) = 16x^3 + 12x^2 - 5$$

Пример 22. $y(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = \mathbb{R}$.
- 2) Функция нечетная. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x=0$ и $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \approx \pm 1,3$. Промежутки знакопостоянства (рис. 66):

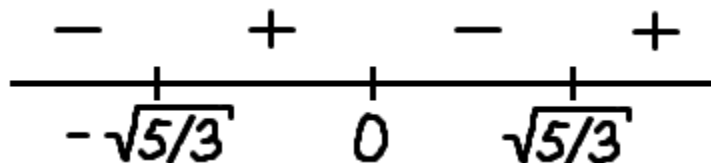


Рис. 66. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0;0)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.
- 5) Поведение функции при $x \rightarrow \pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty$. Значит, горизонтальных и наклонных асимптот нет.
- 6) Производная $y' = x^2(x-1)(x+1)$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 67):

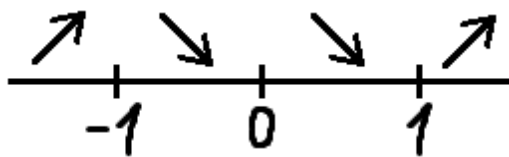


Рис. 67. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = -1$ - точка максимума; $y_{\max} = y(-1) \approx 0,13$.

Точка $x_{\min} = 1$ - точка минимума; $y_{\min} = y(1) \approx -0,13$.

- 7) Вторая производная $y'' = 4x \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 68):

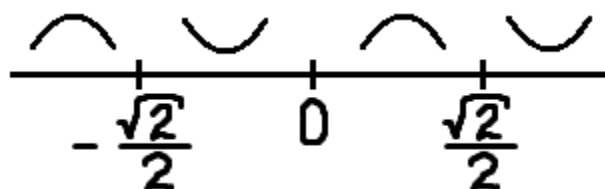


Рис. 68. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точки перегиба: $x = 0$, $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,7$; $y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0,08$, $y(0) = 0$,

$$y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx -0,08.$$

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 69, 70).

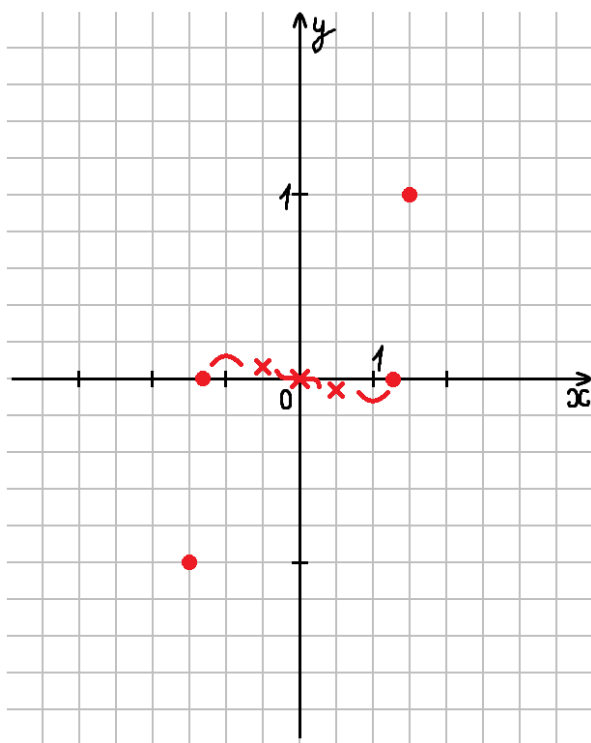


Рис. 69. Предварительный чертеж

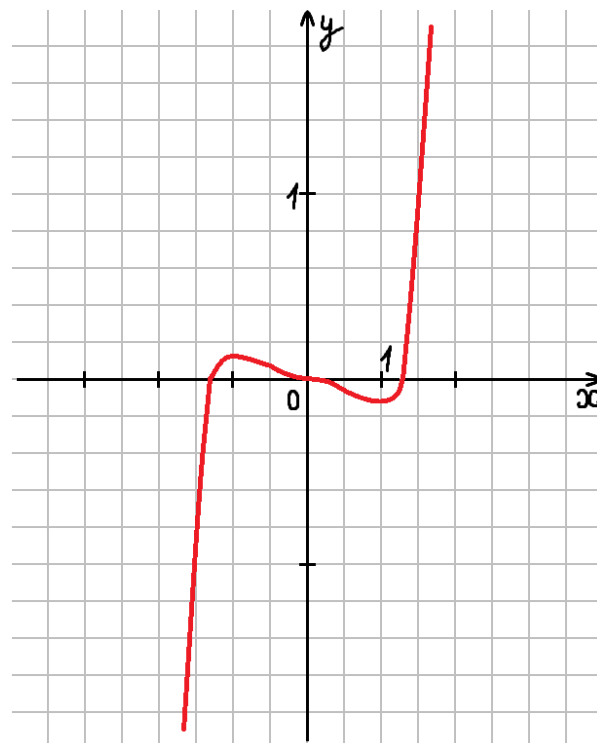


Рис. 70. График функции

$$y(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$$

Пример 23. $y(x) = -\frac{1}{16}(x+1)^2(x-3)^2$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = \mathbb{R}$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.

- 3) Функция обращается в нуль при $x = -1$, $x = 3$. Промежутки знакопостоянства (рис. 71):

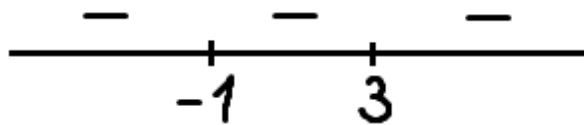


Рис. 71. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(-1; 0)$ и $(3; 0)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.

- 5) Поведение функции при $x \rightarrow \pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = -\infty$. Значит, горизонтальных и наклонных асимптот нет.

- 6) Производная $y' = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3)(x-1)$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 72):

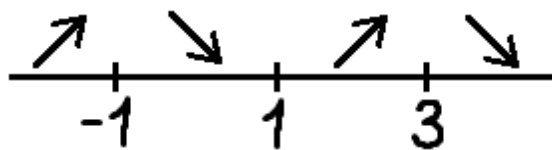


Рис. 72. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = -1$ - точка максимума; $y_{\max} = y(-1) = 0$.

Точка $x_{\min} = 1$ - точка минимума; $y_{\min} = y(1) = -1$.

Точка $x_{\max} = 3$ - точка максимума; $y_{\max} = y(3) = 0$.

- 7) Вторая производная $y'' = -\frac{1}{4}(3x^2 - 6x - 1)$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 73):

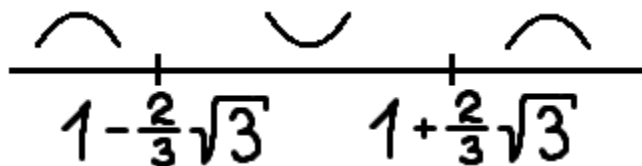


Рис. 73. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точки перегиба: $x = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 2,2$, $x = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx -0,2$;

$$y\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = y\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \approx 0,4.$$

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 74, 75).

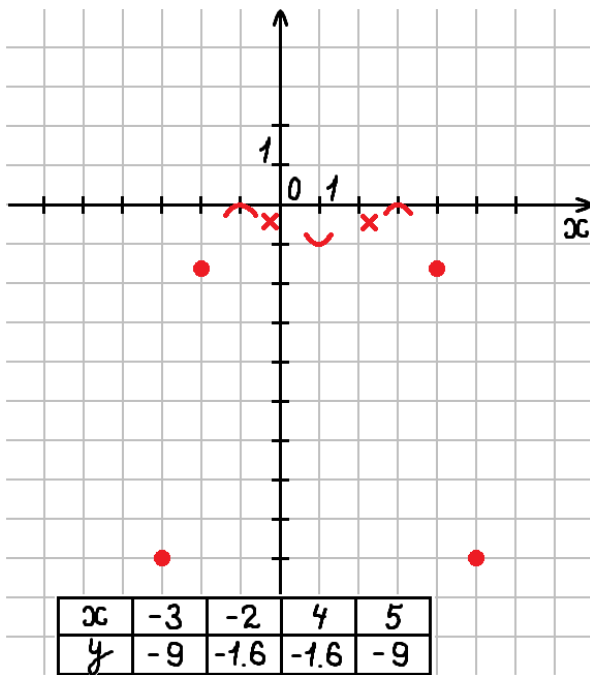


Рис. 74. Предварительный чертеж

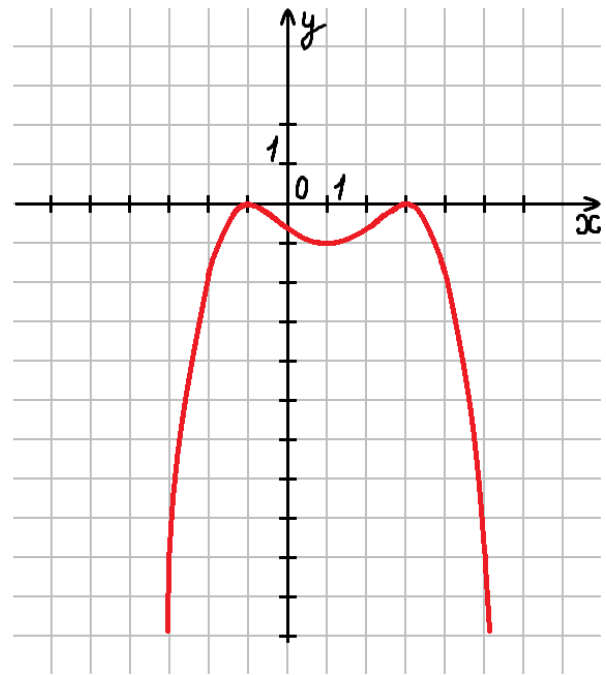


Рис. 75. График функции

$$y(x) = -\frac{1}{16}(x+1)^2(x-3)^2$$

Пример 24. $y(x) = x^3 + \frac{x^4}{4}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = \mathbb{R}$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x = -4$ и $x = 0$. Промежутки знакопостоянства (рис. 76):

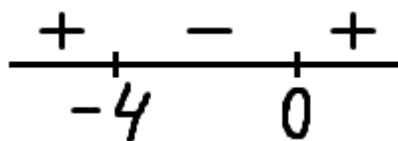


Рис. 76. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0;0)$.

4) Вертикальных асимптот нет.

5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \pm\infty$. Значит, горизонтальных и наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = x^2(3+x)$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 77):

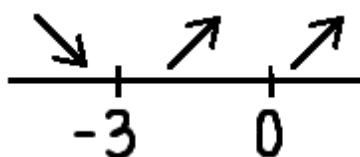


Рис. 77. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\min} = -3$ - точка минимума; $y_{\min} = y(-3) = -6,75$.

7) Вторая производная $y'' = 3x(2+x)$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 78):

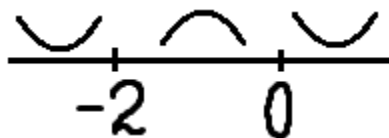


Рис. 78. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точки перегиба: $x = -2$, $x = 0$; $y(-2) = -4$, $y(0) = 0$.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 79, 80).

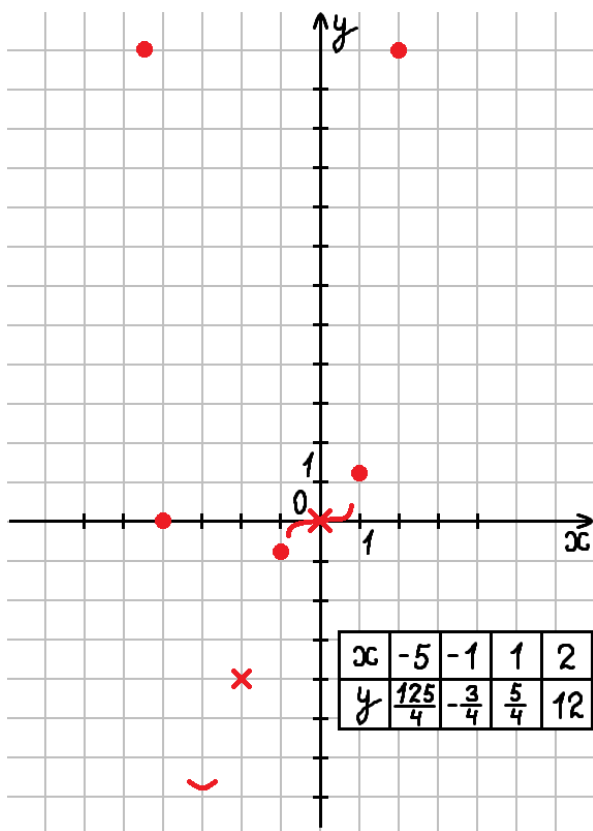


Рис. 79. Предварительный чертеж

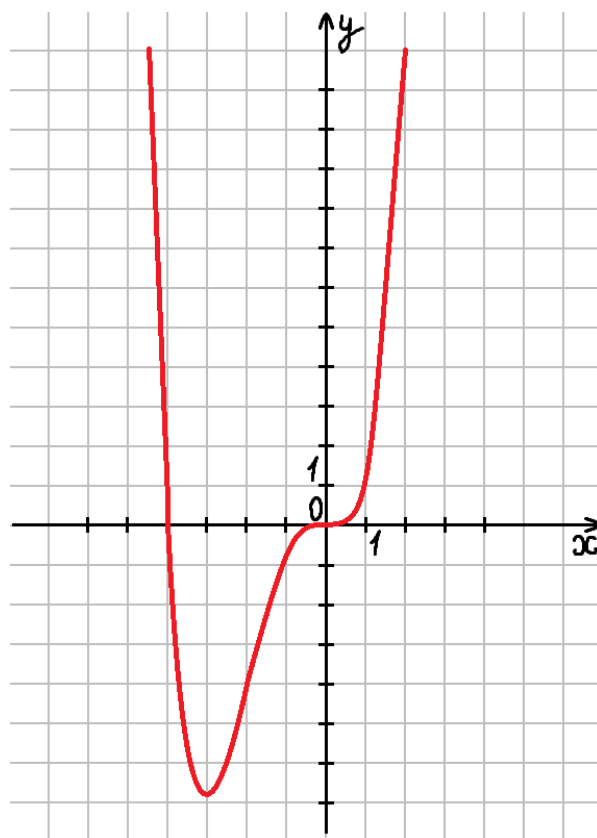


Рис. 80. График функции

$$y(x) = x^3 + \frac{x^4}{4}$$

Дробно-рациональные функции

Пример 25. $y(x) = \frac{3}{1-2x}$.

- 1) Поскольку знаменатель не должен равняться нулю, функция определена и непрерывна при $x \neq \frac{1}{2}$, т.е. $D(f) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

- 2) Проверим функцию на четность, нечетность и периодичность.

Имеем $y(-x) = \frac{3}{1-2 \cdot (-x)} = \frac{3}{1+2x}$.

Так как $y(-x) \neq y(x)$, функция не является четной, также $y(-x) \neq -y(x)$, значит, функция не является нечетной. Поэтому имеем функцию общего вида. Функция не является периодической.

- 3) Чтобы найти нули функции, решим уравнение $\frac{3}{1-2x}=0$. Данное уравнение корней не имеет, значит, нулей у функции нет. Промежутки знакопостоянства (рис. 81):

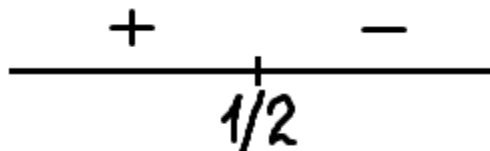


Рис. 81. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0;3)$.

- 4) Проверим, будет ли прямая $x = \frac{1}{2}$ вертикальной асимптотой.

Имеем $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} \frac{3}{1-2x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} \frac{3}{1-2x} = -\infty$, поскольку хотя бы один из

пределов равен бесконечности, прямая $x = \frac{1}{2}$ является вертикальной асимптотой к графику функции.

- 5) Определим поведение функции при $x \rightarrow +\infty$.

Имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1-2x} = 0$.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - kx).$$

Имеем $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-2x^2} = 0$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1-2x} = 0$, значит, $y = 0$ - горизонтальная

асимптота. Наклонных асимптот нет.

Определим поведение функции при $x \rightarrow -\infty$.

Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1-2x} = 0$.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x}$,
 $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - kx)$.

Имеем $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x - 2x^2} = 0$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1 - 2x} = 0$, значит, $y = 0$ -

горизонтальная асимптота. Наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = \frac{6}{(1 - 2x)^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 82):

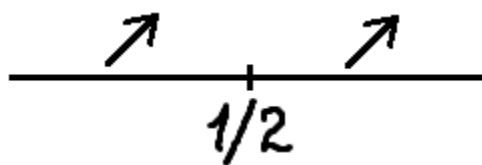


Рис. 82. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Экстремумов нет.

7) Вторая производная $y'' = \frac{24}{(1 - 2x)^3}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 83):

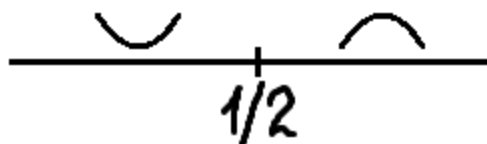


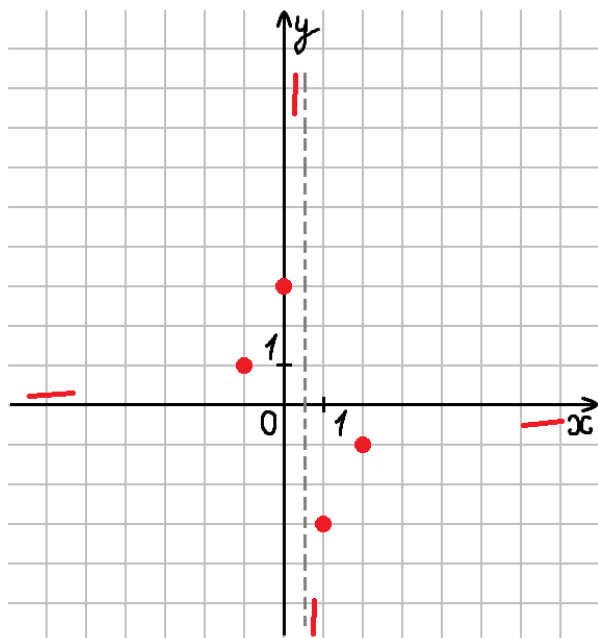
Рис. 83. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

Замечание. При $x = \frac{1}{2}$ график функции $y(x)$ не будет иметь перегиба, поскольку исходная функция $y(x)$ при $x = \frac{1}{2}$ не определена.

8) При построении графика функции начинаем с построения его асимптот, точек пересечения с координатными осями, точек экстремума и точек

перегиба, при необходимости отмечаем дополнительные точки. Знание промежутков возрастания и убывания функции, а также интервалов выпуклости ее графика позволит верно построить график в соответствующих областях (рис. 84, 85)



x	-1	0	1	2
y	1	3	-3	-1

Рис. 84. Предварительный чертёж

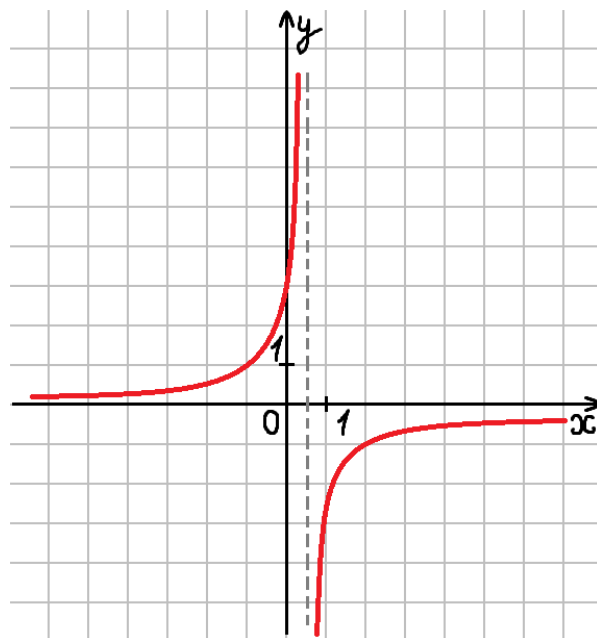


Рис. 85. График функции

$$y(x) = \frac{3}{1-2x}$$

Пример 26. $y(x) = \frac{3x+2}{2x-3}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq \frac{3}{2}$, т.е.

$$D(f) = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.

- 3) Функция обращается в нуль при $x = -\frac{2}{3}$. Промежутки знакопостоянства

(рис. 86):

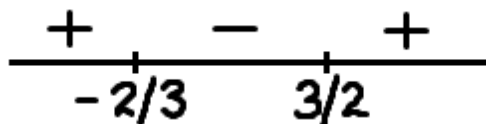


Рис. 86. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}+0} y(x) = +\infty$, значит, прямая $x = \frac{3}{2}$ - вертикальная асимптота.

- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \frac{3}{2}$. Прямая $y = \frac{3}{2}$ - горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот нет.

- 6) Производная $y' = -\frac{13}{(2x-3)^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 87):

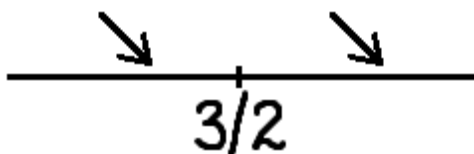


Рис. 87. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Экстремумов нет.

- 7) Вторая производная $y'' = \frac{52}{(2x-3)^3}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 88):

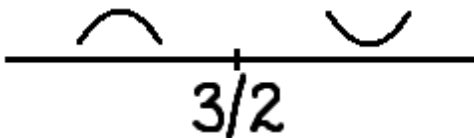


Рис. 88. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 89, 90)

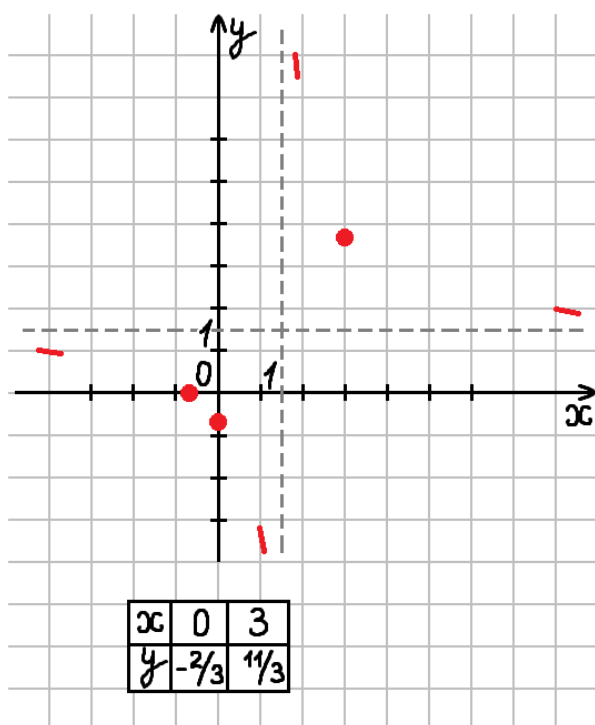


Рис. 89. Предварительный чертеж

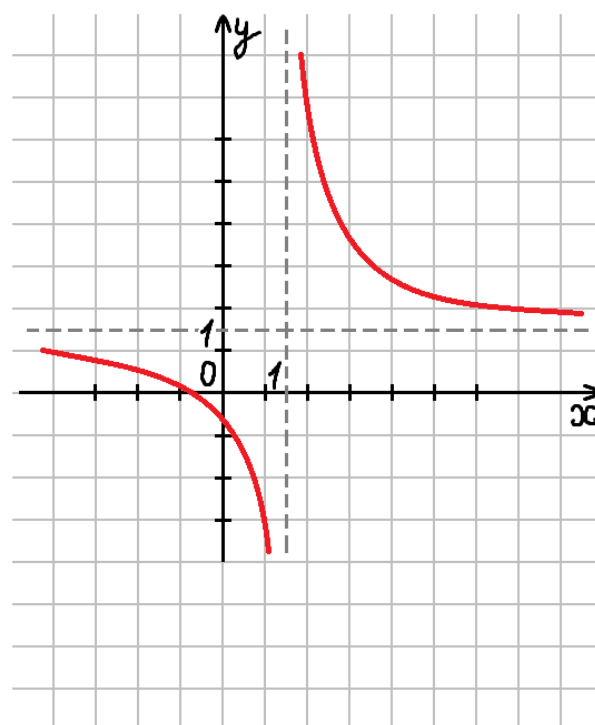


Рис. 90. График функции

$$y(x) = \frac{3x + 2}{2x - 3}$$

Пример 27. $y(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq -1, x \neq 2$ т.е.
 $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Нулей функция не имеет. Промежутки знакопостоянства (рис. 91):

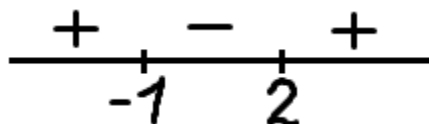


Рис. 91. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow -1-0} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+0} y(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} y(x) = +\infty$
 значит, прямые $x = -1$, $x = 2$ - вертикальные асимптоты.

- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$. Прямая $y = 0$ - горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = \frac{1-2x}{(x+1)^2(x-2)^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 92):

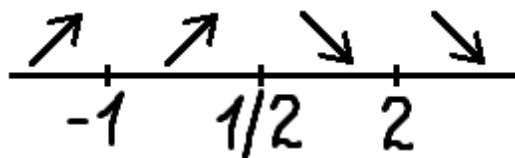


Рис. 92. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = \frac{1}{2}$ - точка максимума, $y_{\max} = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{9}$.

7) Вторая производная $y'' = \frac{6(x^2 - x + 1)}{(x+1)^3(x-2)^3}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 93):

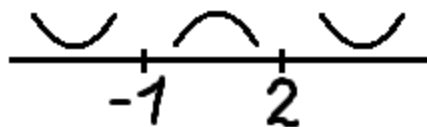


Рис. 93. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 94, 95)

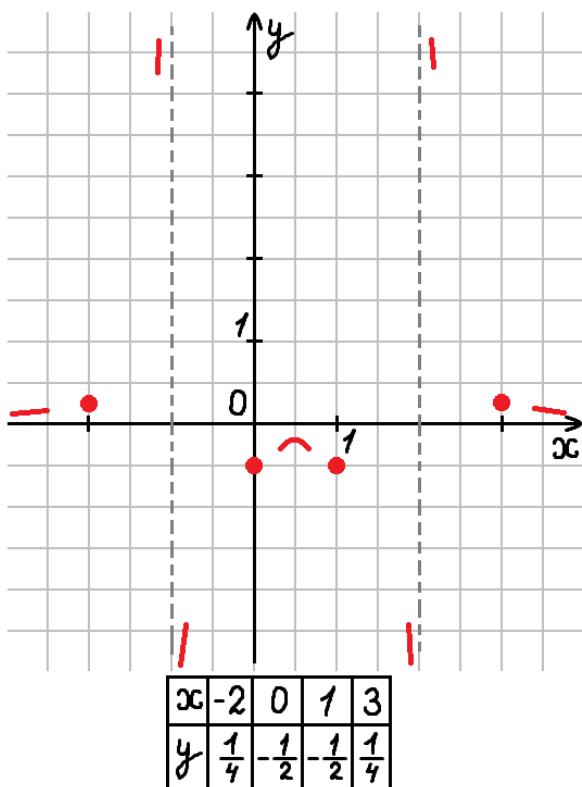


Рис. 94. Предварительный чертёж

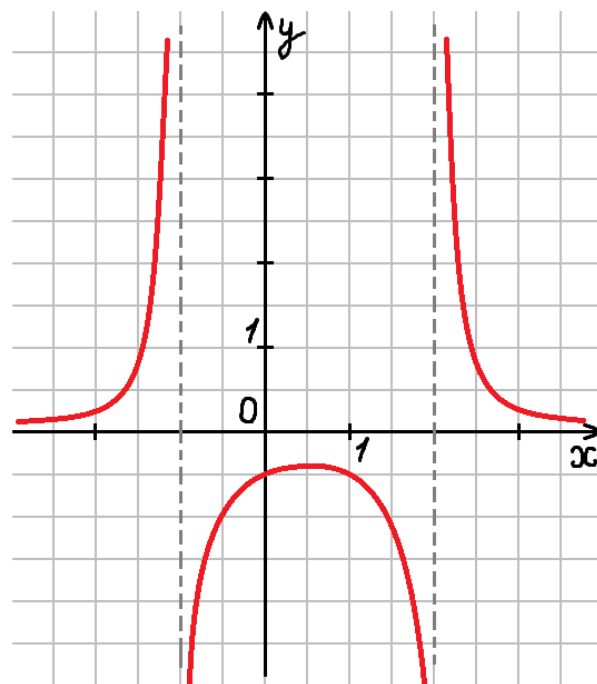


Рис. 95. График функции

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

Пример 28. $y(x) = \frac{x^3}{x^4 - 1}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq \pm 1$, т.е. $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.
- 2) Функция нечетная. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x = 0$. Промежутки знакопостоянства (рис. 96):

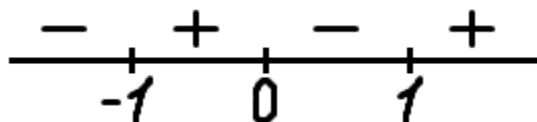


Рис. 96. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0; 0)$.

4) Имеем $\lim_{x \rightarrow -1-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+0} y(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = +\infty$ значит, прямые $x = -1$, $x = 1$ - вертикальные асимптоты.

5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$. Прямая $y = 0$ - горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = -\frac{x^2(x^4 + 3)}{(x^4 - 1)^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 97):

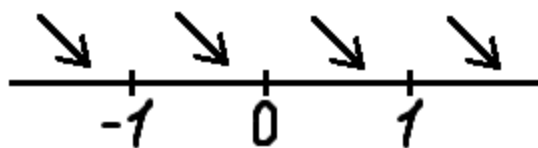


Рис. 97. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Экстремумов нет.

7) Вторая производная $y'' = \frac{2x(x^8 + 12x^4 + 3)}{(x^4 - 1)^3}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 98):

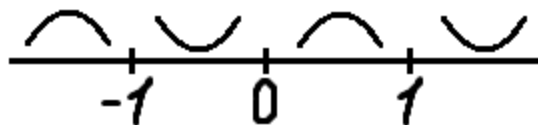


Рис. 98. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x = 0$, $y(0) = 0$.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 99, 100)

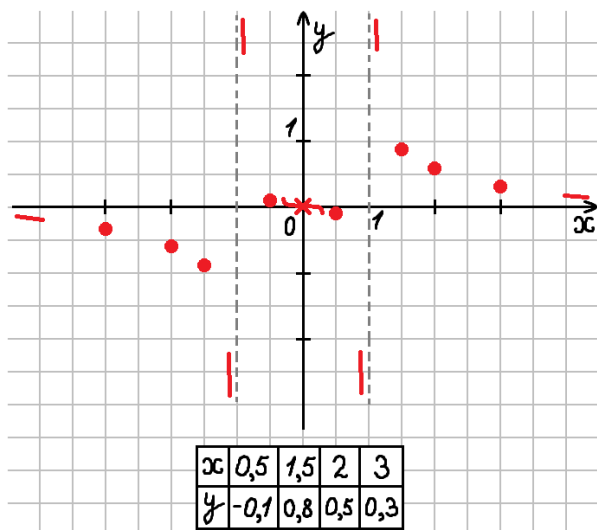


Рис. 99. Предварительный чертёж

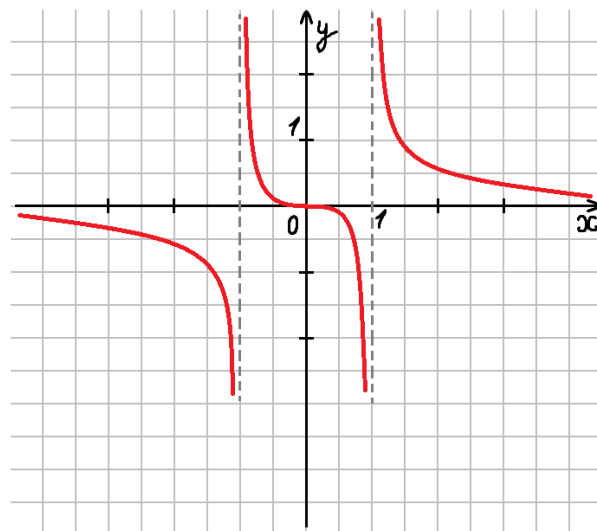


Рис. 100. График функции

$$y(x) = \frac{x^3}{x^4 - 1}$$

Пример 29. $y(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = \mathbb{R}$.
- 2) Функция нечетная. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x=0$. Промежутки знакопостоянства (рис. 101):

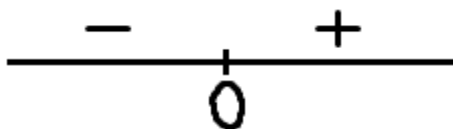


Рис. 101. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0;0)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$. Прямая $y=0$ - горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот нет.

- 6) Производная $y' = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 102):

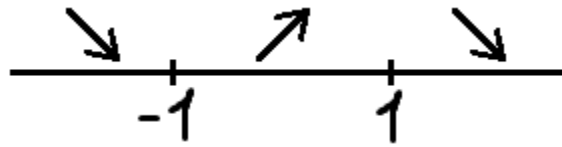


Рис. 102. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\min} = -1$ - точка минимума, $y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{2}$.

Точка $x_{\max} = 1$ - точка максимума, $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{2}$.

7) Вторая производная $y'' = \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(1 + x^2)^3}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 103):

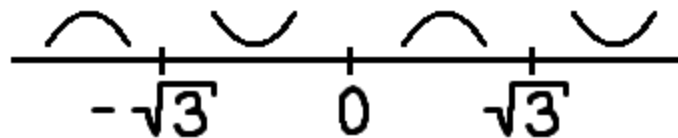


Рис. 103. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точки перегиба: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$; $y(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \approx -0,43$, $y(0) = 0$,

$$y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,43.$$

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 104, 105)

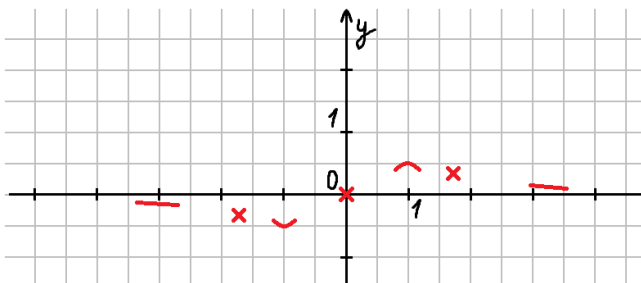


Рис. 104. Предварительный чертеж

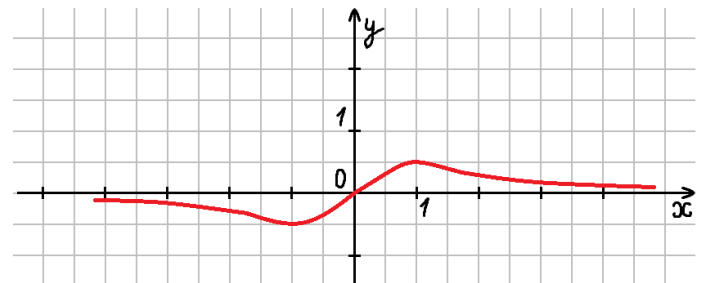


Рис. 105. График функции

$$y(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

Пример 30. $y(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq 1$, т.е. $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x = \frac{1}{2}$. Промежутки знакопостоянства

(рис. 106):

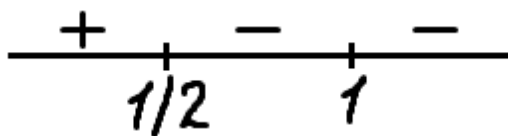


Рис. 106. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0; 1)$.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow 1-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = -\infty$, значит, прямая $x = 1$ - вертикальная асимптота.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$. Прямая $y = 0$ - горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот нет.

- 6) Производная $y' = \frac{2x}{(x-1)^3}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 107):

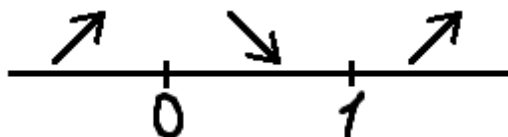


Рис. 107. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = 0$ - точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 1$.

- 7) Вторая производная $y'' = -\frac{2(1+2x)}{(x-1)^4}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 108):

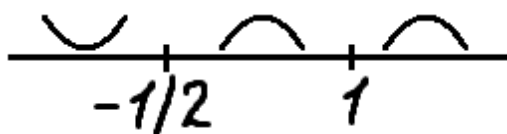


Рис. 108. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x = -\frac{1}{2}; y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{9}$.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 109, 110)

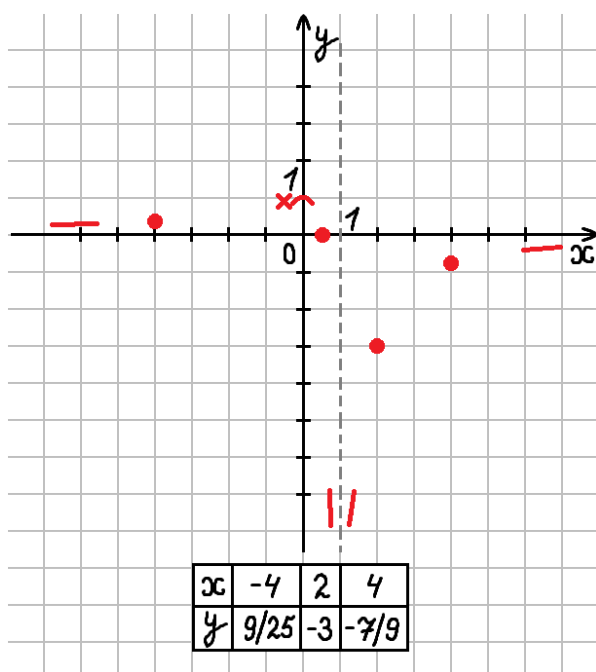


Рис. 109. Предварительный чертеж

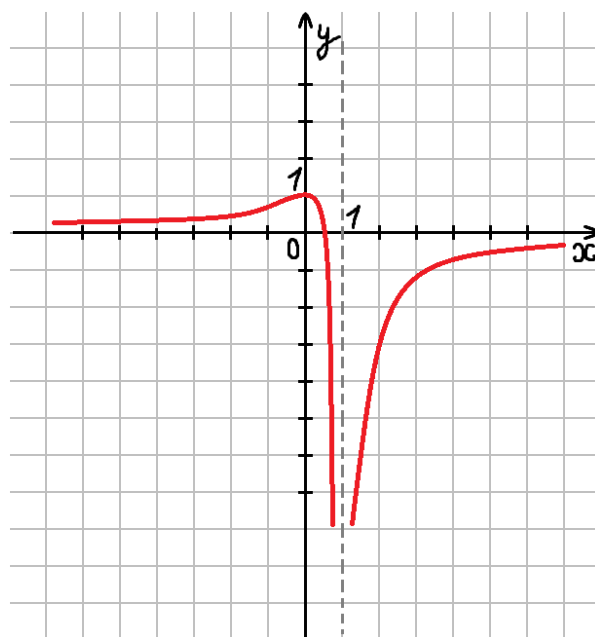


Рис. 110. График функции

$$y(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$$

Пример 31. $y(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x + 1}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq 1$, т.е. $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x = 3$. Промежутки знакопостоянства (рис. 111):

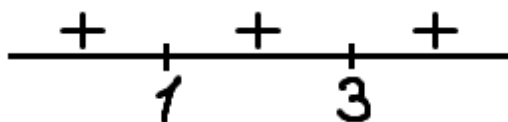


Рис. 111. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0;9)$.

4) Имеем $\lim_{x \rightarrow 1-0} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = +\infty$, значит, прямая $x=1$ - вертикальная асимптота.

5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 1$. Прямая $y=1$ - горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = \frac{4(x-3)}{(x-1)^3}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 112):

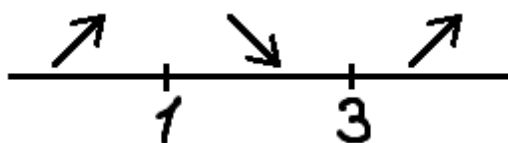


Рис. 112. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\min} = 3$ - точка минимума, $y_{\min} = y(3) = 0$.

7) Вторая производная $y'' = -\frac{8(x-4)}{(x-1)^4}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 113):



Рис. 113. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x=4$; $y(4) \approx 0,1$.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 114, 115)

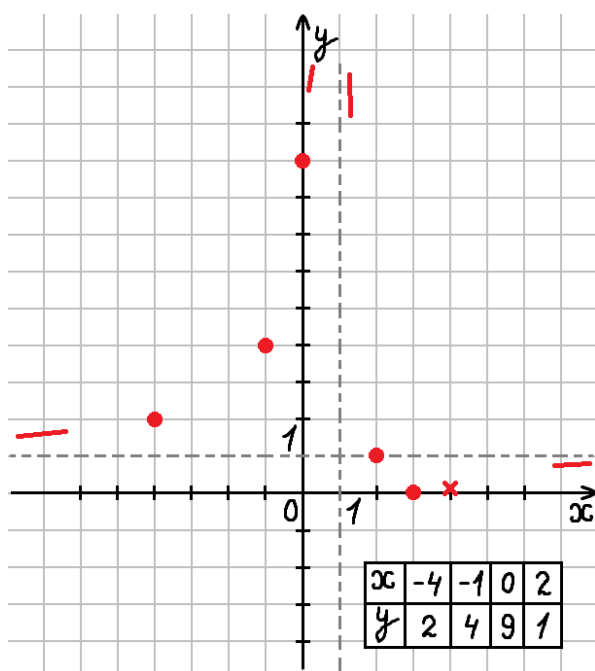


Рис. 114. Предварительный чертёж

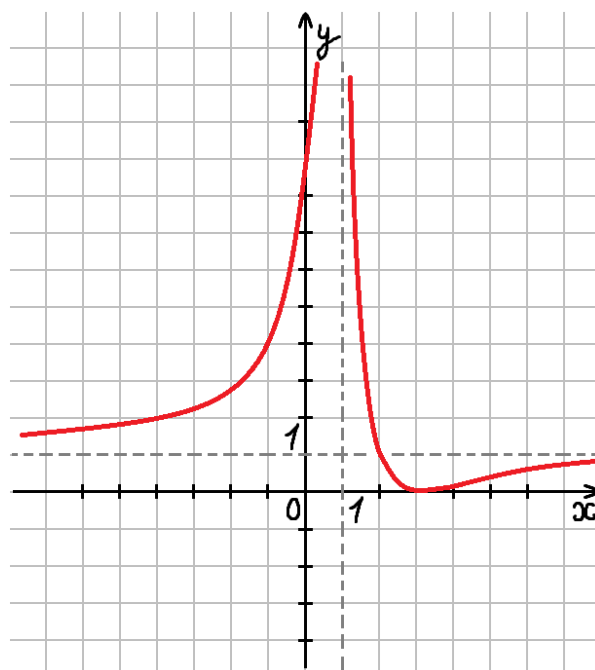


Рис. 115. График функции

$$y(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x + 1}$$

Пример 32. $y(x) = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq 0$, т.е. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x = -6$, $x = 3$. Промежутки знакопостоянства (рис. 116):

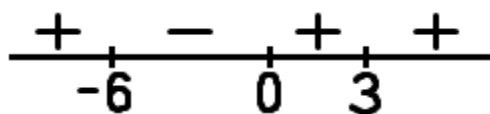


Рис. 116. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечения с осью Oy нет.

Замечание. Чтобы найти корни уравнения $x^3 - 27x + 54 = 0$, мы воспользовались следствием из теоремы Безу: если у многочлена старший коэффициент равен 1, то его целочисленные корни будут делителями свободного члена.

4) Имеем $\lim_{x \rightarrow 0-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} y(x) = +\infty$, значит, прямая $x=0$ - вертикальная асимптота.

5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 1$. Прямая $y=1$ - горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = \frac{54(x-3)}{x^4}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 117):

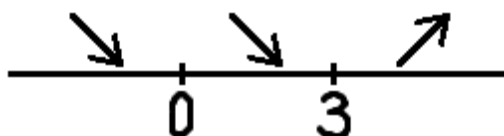


Рис. 117. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\min} = 3$ - точка минимума, $y_{\min} = y(3) = 0$.

7) Вторая производная $y'' = \frac{162(4-x)}{x^5}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 118):



Рис. 118. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x=4$; $y(4) \approx 0,2$.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 119, 120)

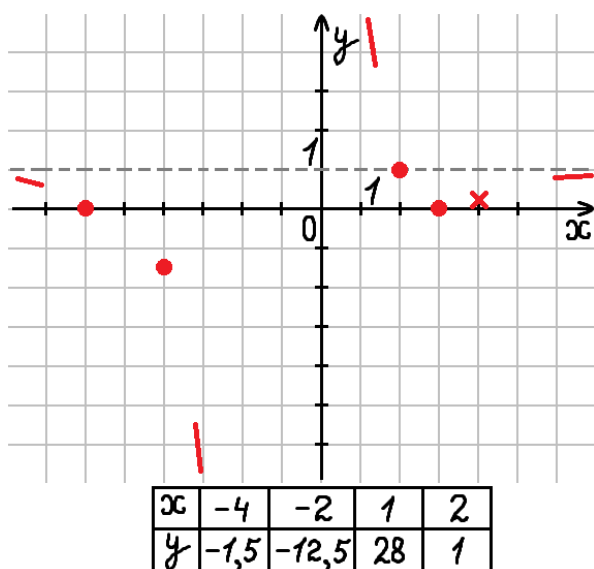


Рис. 119. Предварительный чертёж

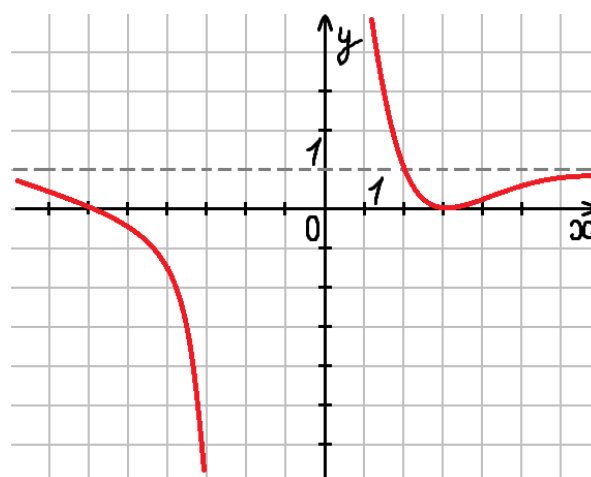


Рис. 120. График функции

$$y(x) = \frac{x^3 - 27x + 54}{x^3}$$

Пример 33. $y(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq 0$, т.е. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x = \sqrt[3]{4} \approx 1,6$. Промежутки знакопостоянства (рис. 121):

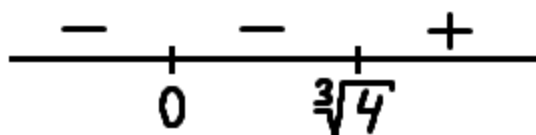


Рис. 121. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечения с осью Oy нет.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow 0-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} y(x) = -\infty$, значит, прямая $x = 0$ - вертикальная асимптота.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$. Значит, горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - x) = 0$. Значит, прямая $y = x$ - наклонная асимптота.

6) Производная $y' = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 122):

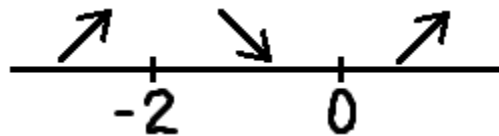


Рис. 122. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = -2$ - точка максимума, $y_{\max} = y(-2) = -3$.

7) Вторая производная $y'' = -\frac{24}{x^4}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 123):

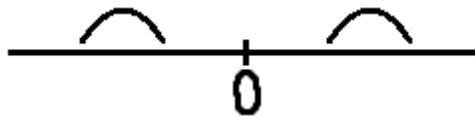


Рис. 123. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 124, 125)

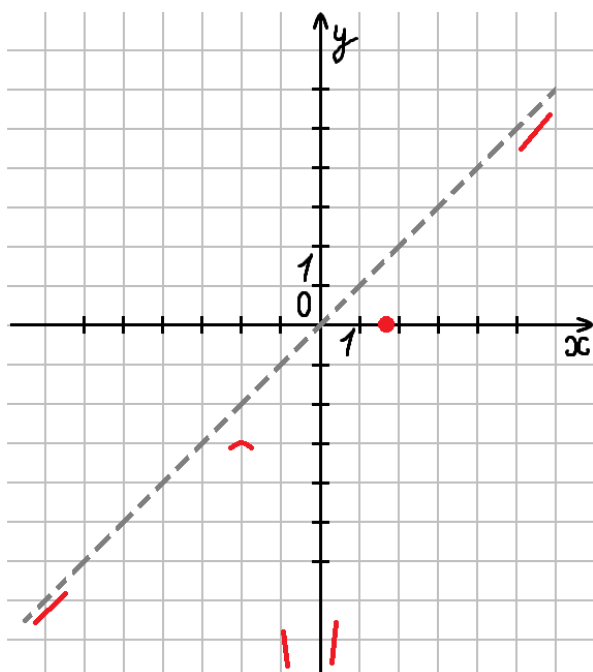


Рис. 124. Предварительный чертёж

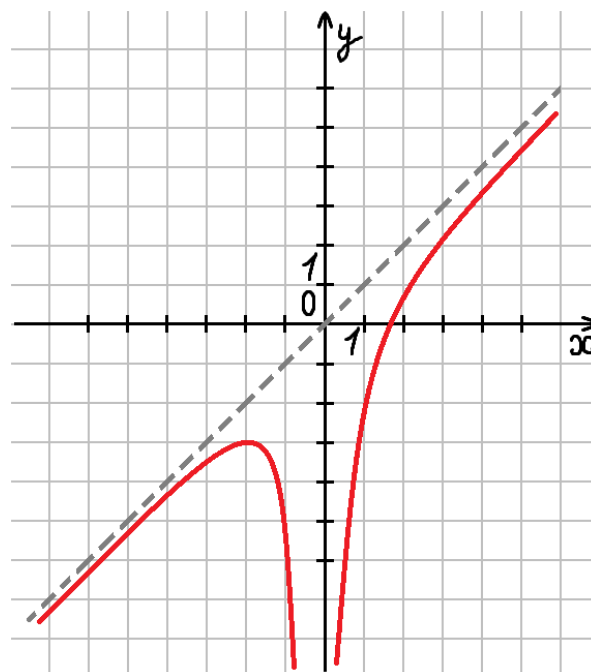


Рис. 125. График функции

$$y(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$$

Пример 34. $y(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq -2$, т.е.
 $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция нулей не имеет, т.к. $x^2 + 4x + 5 > 0$. Промежутки знакопостоянства (рис. 126):

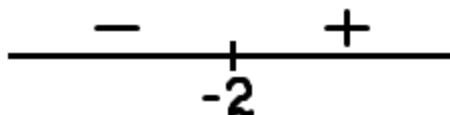


Рис. 126. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0; 2,5)$.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow -2-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2+0} y(x) = +\infty$, значит, прямая $x = -2$ - вертикальная асимптота.

- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$. Значит, горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - x) = 2$. Значит, прямая $y = x + 2$ - наклонная асимптота.

6) Производная $y' = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 127):

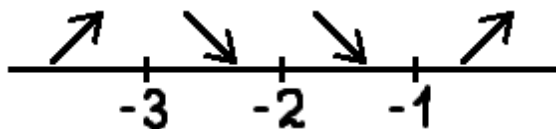


Рис. 127. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = -3$ - точка максимума, $y_{\max} = y(-3) = -2$.

Точка $x_{\min} = -1$ - точка минимума, $y_{\min} = y(-1) = 2$.

7) Вторая производная $y'' = \frac{2}{(x+2)^3}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 128):

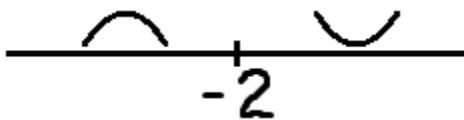


Рис. 128. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 129, 130)

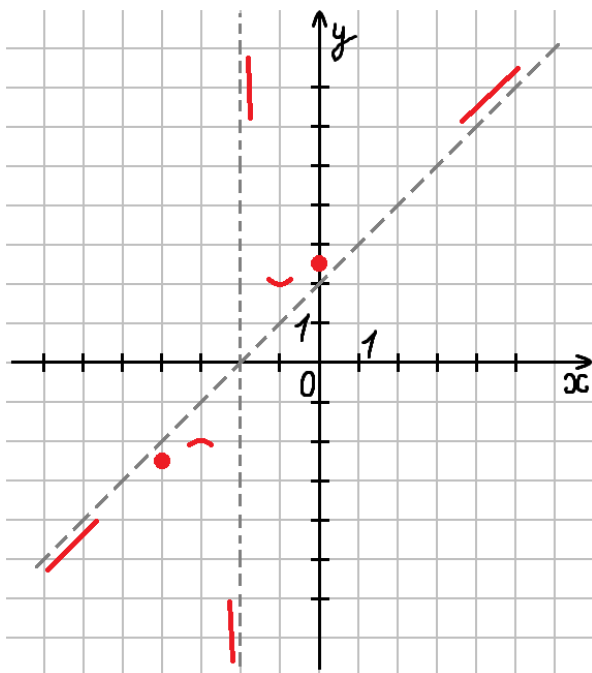


Рис. 129. Предварительный чертёж

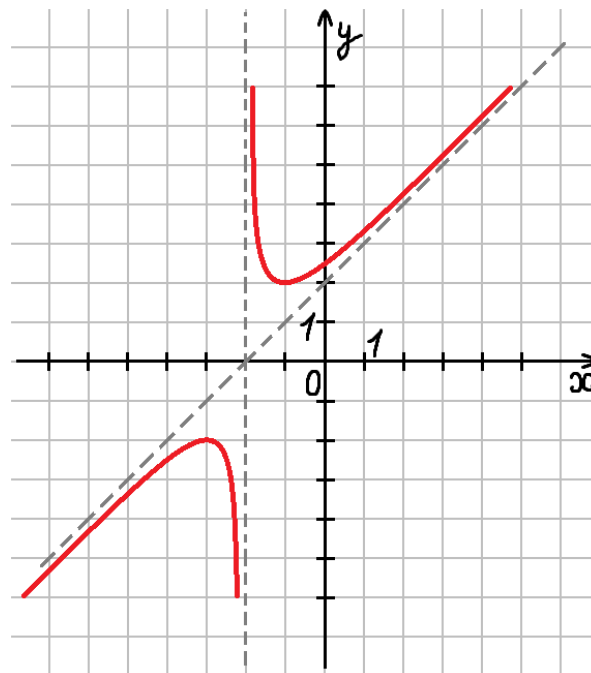


Рис. 130. График функции

$$y(x) = \frac{x^3 + 4x + 5}{x + 2}$$

Пример 35. $y(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq \pm 1$, т.е.
 $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.
- 2) Функция нечетная. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x = 0$. Промежутки знакопостоянства (рис. 131):

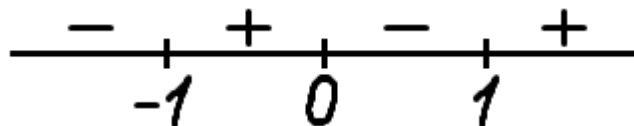


Рис. 131. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0; 0)$.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow -1-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+0} y(x) = +\infty$, значит, прямая $x = -1$ - вертикальная асимптота. Так как функция нечетная, то вертикальной асимптотой является также прямая $x = -1$.

- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$. Значит, горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - x) = 0$. Значит, прямая $y = x$ - наклонная асимптота.

6) Производная $y' = \frac{x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 132):

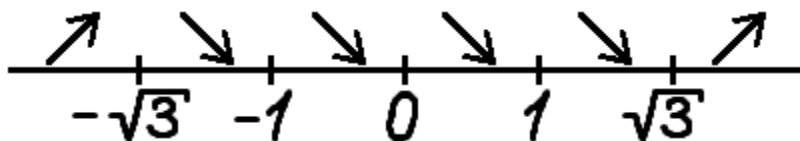


Рис. 132. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = -\sqrt{3}$ - точка максимума, $y_{\max} = y(-\sqrt{3}) \approx -2,6$.

Точка $x_{\min} = \sqrt{3}$ - точка минимума, $y_{\min} = y(\sqrt{3}) \approx 2,6$.

7) Вторая производная $y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x - 1)^3(x + 1)^3}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 133):

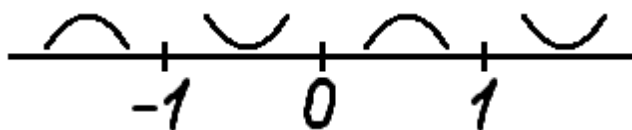


Рис. 133. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x = 0$, $y(0) = 0$.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 134, 135)

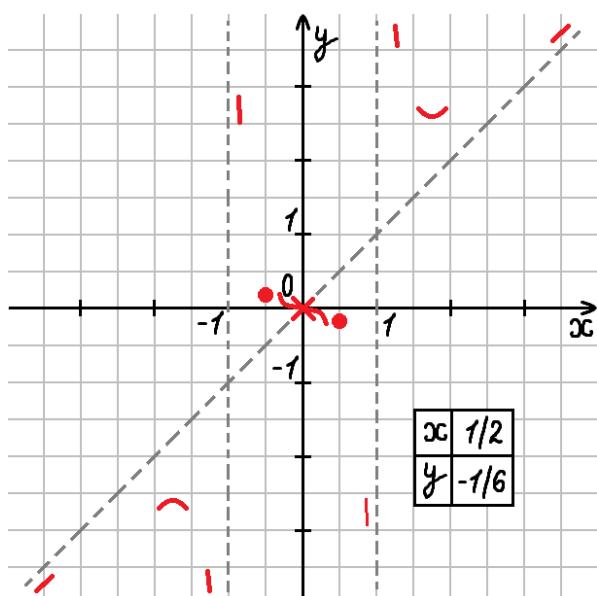


Рис. 134. Предварительный чертеж

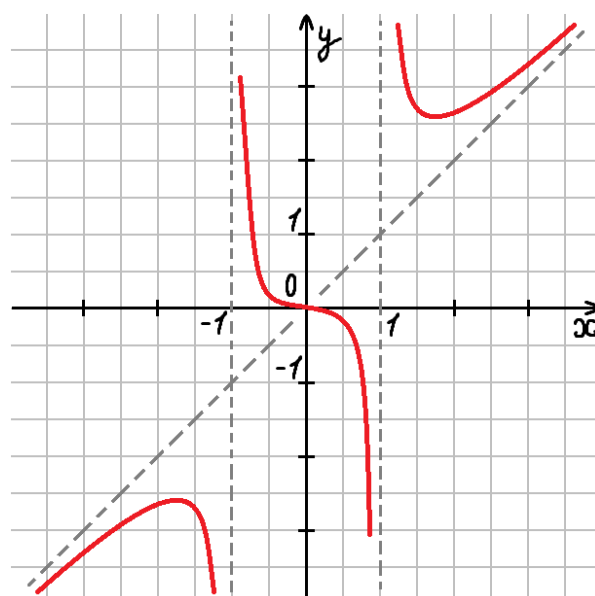


Рис. 135. График функции

$$y(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Пример 36. $y(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq 0$, т.е. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x=1$, $x=2$. Промежутки знакопостоянства (рис. 136):

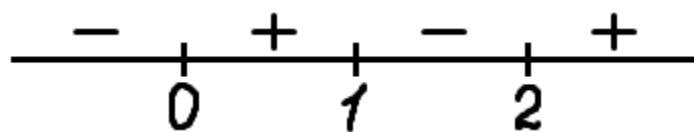


Рис. 136. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечения с осью Oy нет.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow 0-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} y(x) = +\infty$, значит, прямая $x=0$ - вертикальная асимптота.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$. Значит, горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - x) = -3$. Значит, прямая $y = x - 3$ - наклонная асимптота.

6) Производная $y' = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 137):

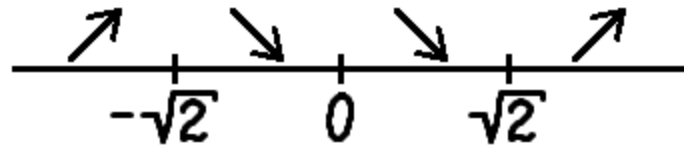


Рис. 137. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = -\sqrt{2}$ - точка максимума, $y_{\max} = y(-\sqrt{2}) \approx -5,8$.

Точка $x_{\min} = \sqrt{2}$ - точка минимума, $y_{\min} = y(\sqrt{2}) \approx -0,2$.

7) Вторая производная $y'' = \frac{4}{x^3}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 138):

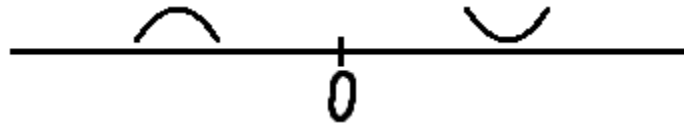


Рис. 138. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 139, 140)

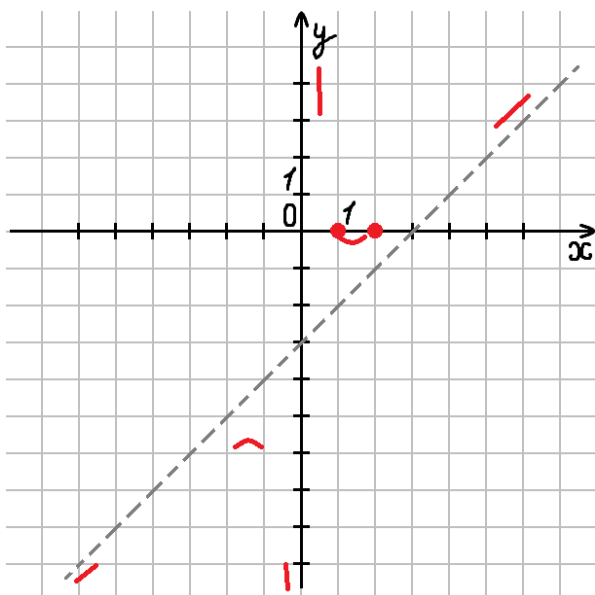


Рис. 139. Предварительный чертёж

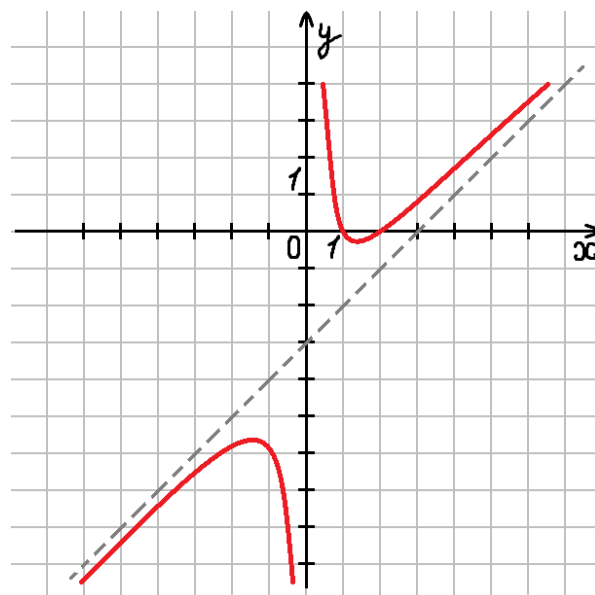


Рис. 140. График функции

$$y(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

Пример 37. $y(x) = \frac{2 + x - x^2}{2x - 3}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq \frac{3}{2}$, т.е.

$$D(f) = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.

- 3) Функция обращается в нуль при $x = -1$, $x = 2$. Промежутки знакопостоянства (рис. 141):

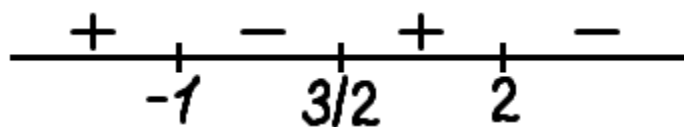


Рис. 141. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

4) Имеем $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}+0} y(x) = +\infty$, значит, прямая $x = \frac{3}{2}$ - вертикальная асимптота.

5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$. Значит, горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(y(x) + \frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{4}$. Значит, прямая $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ - наклонная асимптота.

6) Производная $y' = \frac{(-2x^2 + 6x - 7)}{(2x - 3)^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 142):

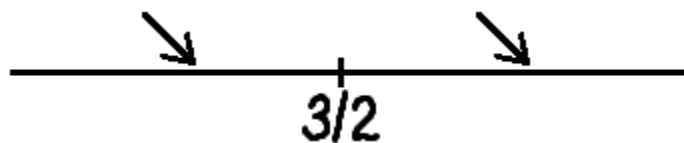


Рис. 142. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Экстремумов нет.

7) Вторая производная $y'' = \frac{10}{(2x - 3)^3}$.

Промежутки выпуклости графика функции вверх и вниз (рис. 143):

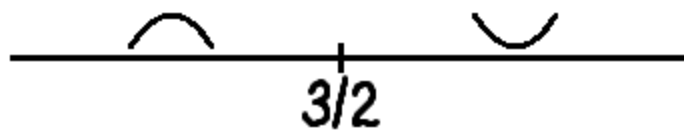
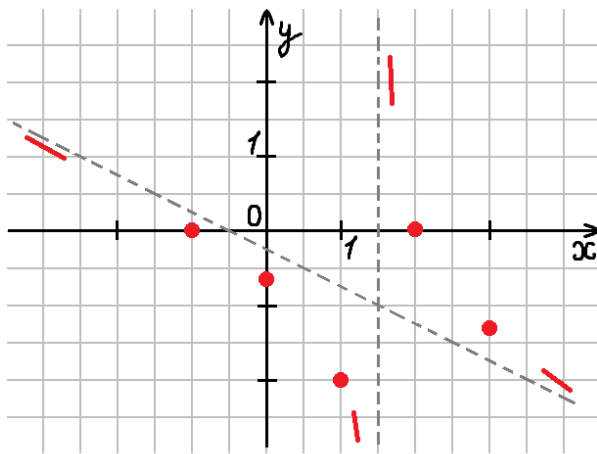


Рис. 143. Промежутки выпуклости графика функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 144, 145)



x	0	1	3
y	$-2/3$	-2	$-4/3$

Рис. 144. Предварительный чертёж

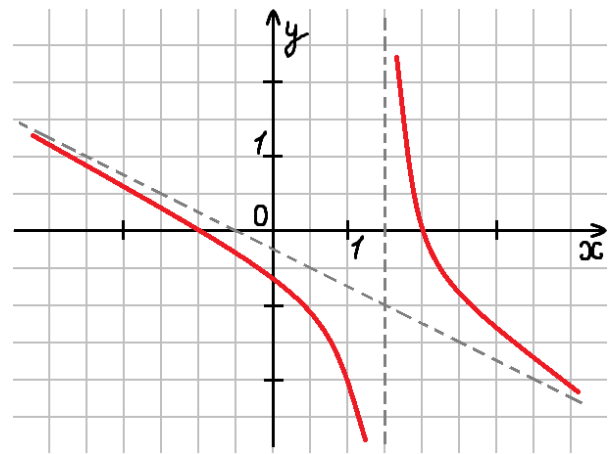


Рис. 145. График функции

$$y(x) = \frac{2 + x - x^2}{2x - 3}$$

Функции от дробей, содержащих радикалы

Пример 38. $y(x) = \frac{-8 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x^2 - 4 > 0$, т.е.
 $D(f) = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
- 2) Проверим функцию на четность, нечетность и периодичность.

Имеем $y(-x) = \frac{-8 - (-x)^2}{\sqrt{(-x)^2 - 4}} = \frac{-8 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = y(x)$.

Так как $y(-x) = y(x)$, функция является четной. Данная функция неперiodическая.

- 3) Функция нулей не имеет. Промежутки знакопостоянства (рис. 146):



Рис. 146. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечения с осью Oy нет.

- 4) Проверим, будут ли прямые $x=2$ и $x=-2$ вертикальными асимптотами.

Имеем $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}}$ не существует. Поскольку хотя бы один из пределов равен бесконечности, прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой к графику функции. Так как функция $y(x)$ четная, то $x=-2$ также будет вертикальной асимптотой.

- 5) Определим поведение функции при $x \rightarrow +\infty$.

Имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty$. Так как предел не равен конечному числу, делаем вывод, что горизонтальной асимптоты нет.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y=kx+b$, где $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$,
 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - kx)$.

Имеем $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8-x^2}{x\sqrt{x^2-4}} = -1$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}} + x \right) = 0$. Значит, прямая $y=-x$ - наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$.

Определим поведение функции при $x \rightarrow -\infty$.

Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty$. Так как предел не равен конечному числу, делаем вывод, что горизонтальной асимптоты нет.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y=kx+b$, где $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x}$,
 $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - kx)$.

Имеем $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8-x^2}{x\sqrt{x^2-4}} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-8-x^2}{\sqrt{x^2-4}} - x \right) = 0$. Значит, прямая $y=x$ - наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

- 6) Производная $y' = \frac{x(4-x)(4+x)}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 147):



Рис. 147. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = -4$ - точка максимума; $y_{\max} = y(-4) \approx -7$.

Точка $x_{\max} = 4$ - точка максимума; $y_{\max} = y(4) \approx -7$.

7) Вторая производная $y'' = \frac{-20x^2 - 64}{(x^2 - 4)^{\frac{5}{2}}}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 148):



Рис. 148. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) При построении графика функции начинаем с построения его асимптот, точек пересечения с координатными осями, точек экстремума и точек перегиба, при необходимости отмечаем дополнительные точки. Знание промежутков возрастания и убывания функции, а также интервалов выпуклости ее графика позволит верно построить график в соответствующих областях (рис. 149, 150).

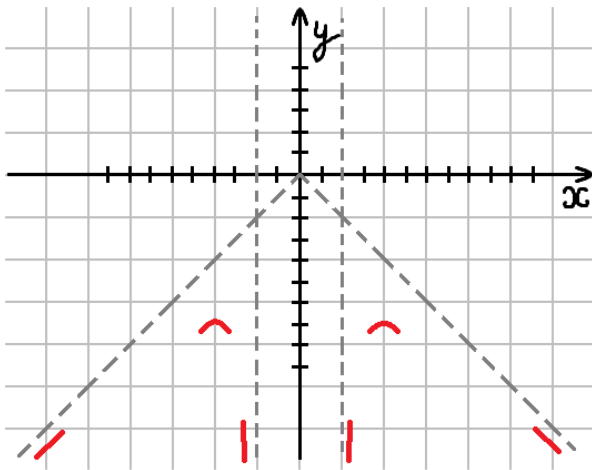


Рис. 149. Предварительный чертеж

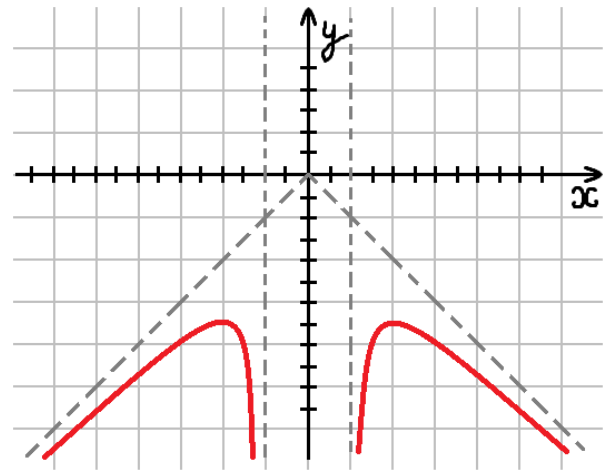


Рис. 150. График функции

$$y(x) = \frac{-8 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Пример 39. $y(x) = \frac{9 - 10x^2}{\sqrt{4x^2 - 1}}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $4x^2 - 1 > 0$, т.е.

$$D(f) = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

- 2) Функция четная. Функция не является периодической.

- 3) Функция обращается в нуль при $x = \pm\sqrt{\frac{10}{9}} \approx \pm 1,1$. Промежутки

знакопостоянства (рис. 151):

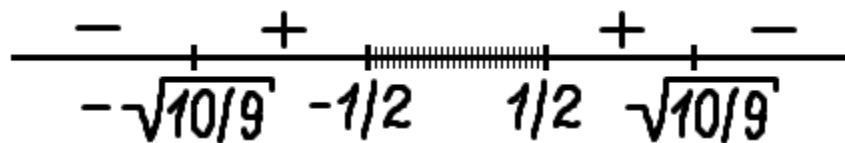


Рис. 151. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечения с осью Oy нет.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}-0} y(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} y(x) = +\infty$, значит, прямые $x = \pm \frac{1}{2}$ - вертикальные

асимптоты.

- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$. Значит, горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = -5$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) + 5x) = 0$. Значит, прямая $y = -5x$ - наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$. Так как функция $y(x)$ четная, то прямая $y = 5x$ является наклонной асимптотой при $x \rightarrow -\infty$.

6) Производная $y' = \frac{-8x(5x^2 + 2)}{(4x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 152):



Рис. 152. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Экстремумов нет.

7) Вторая производная $y'' = \frac{248x^2 + 16}{(4x^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 153):



Рис. 153. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 154, 155)

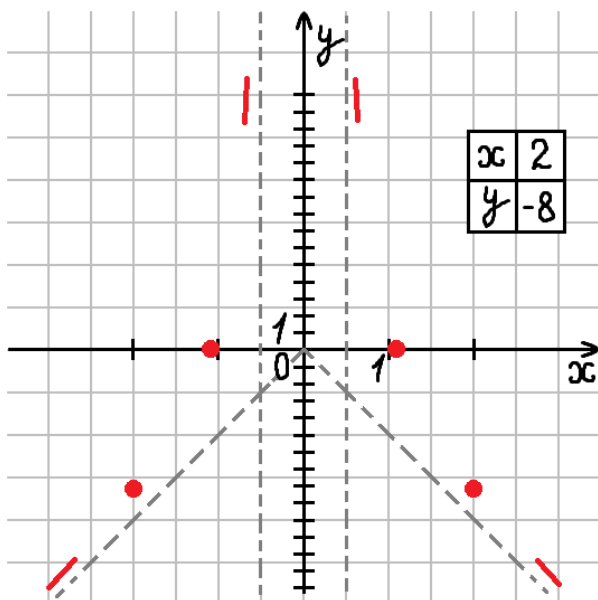


Рис. 154. Предварительный чертеж

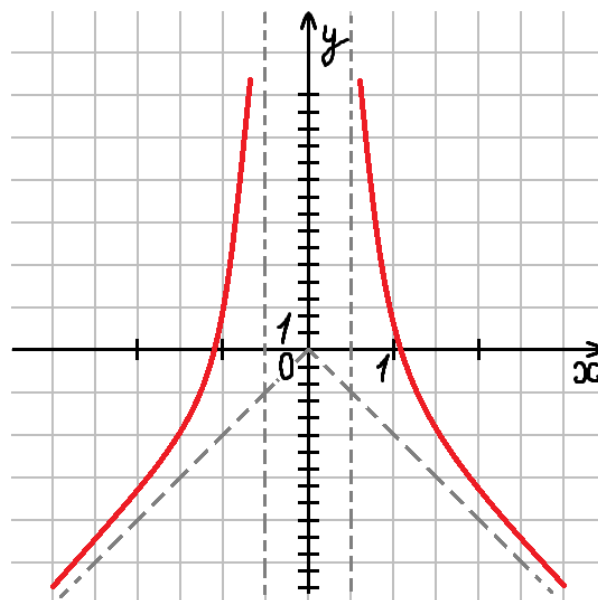


Рис. 155. График функции

$$y(x) = \frac{9 - 10x^2}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

Функции с экспонентами

Пример 40. $y(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

1) Функция определена и непрерывна при $x \neq 0$, т.е. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Проверим функцию на четность, нечетность и периодичность.

Имеем $y(-x) = -xe^{-\frac{1}{x}}$.

Так как $y(-x) \neq y(x)$, функция не является четной, также $y(-x) \neq -y(x)$, значит, функция не является нечетной. Поэтому имеем функцию общего вида. Функция не является периодической.

3) Функция нулей не имеет. Промежутки знакопостоянства (рис. 156):

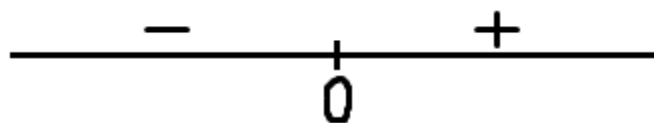


Рис. 156. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечения с осью Oy нет.

- 4) Проверим, будет ли прямая $x=0$ вертикальной асимптотой.

Имеем $\lim_{x \rightarrow 0-0} xe^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$, поскольку хотя бы один из пределов равен бесконечности, прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой к графику функции.

- 5) Определим поведение функции при $x \rightarrow +\infty$.

Имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Так как предел не равен конечному числу, делаем вывод, что горизонтальной асимптоты нет.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y=kx+b$, где $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - kx).$$

Имеем $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = 1$. Значит, прямая $y = x + 1$ -

наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$.

Определим поведение функции при $x \rightarrow -\infty$.

Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty$. Так как предел не равен конечному числу, делаем вывод, что горизонтальной асимптоты нет.

Наклонную асимптоту ищем в виде $y=kx+b$, где $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y(x) - kx).$$

Имеем $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = 1$. Значит, прямая $y = x + 1$ -

наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

- 6) Производная $y' = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 157):

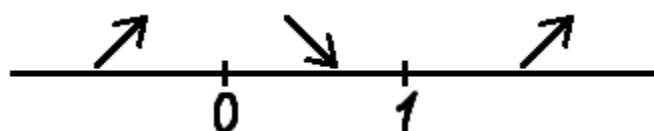


Рис. 157. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\min} = 1$ - точка минимума; $y_{\min} = y(1) = e$.

- 7) Вторая производная $y'' = \frac{e^x}{x^3}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 158):

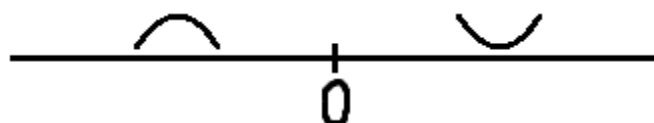


Рис. 158. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) При построении графика функции начинаем с построения его асимптот, точек пересечения с координатными осями, точек экстремума и точек перегиба, при необходимости отмечаем дополнительные точки. Знание промежутков возрастания и убывания функции, а также интервалов выпуклости ее графика позволит верно построить график в соответствующих областях (рис. 159, 160).

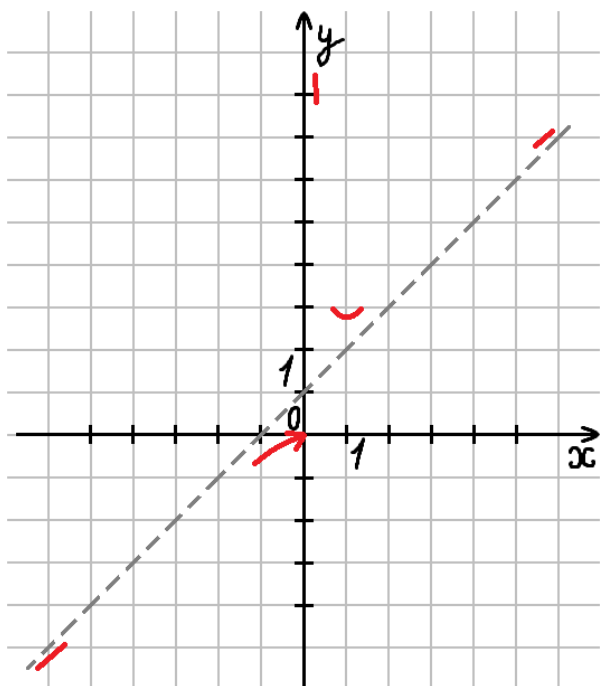


Рис. 159. Предварительный чертёж

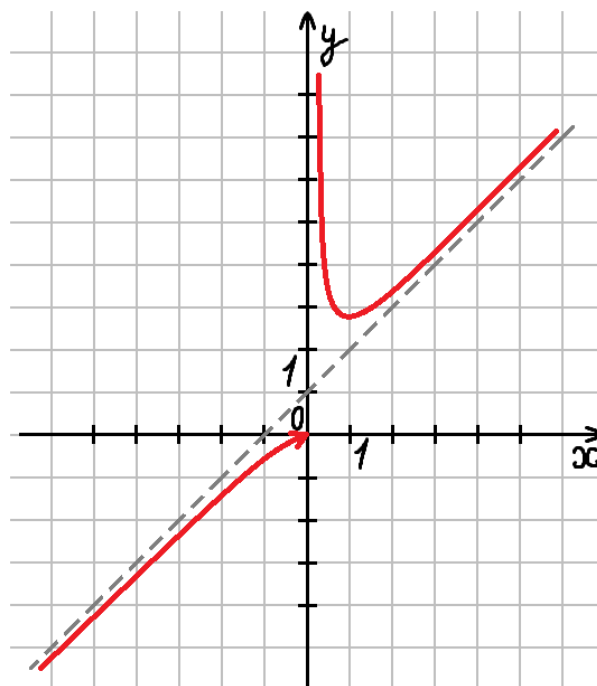


Рис. 160. График функции $y(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

Пример 41. $y(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq 0$, т.е. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция принимает только положительные значения, т.к. $x^2 e^{\frac{1}{x}} > 0$ при любом x из области определения.

Пересечения с осью Oy нет.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow 0-0} y(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} y(x) = +\infty$, значит, прямая $x = 0$ - вертикальная асимптота.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$. Значит, горизонтальных асимптот нет.

Наклонных асимптот нет.

- 6) Производная $y' = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{(2x-1)}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 161):

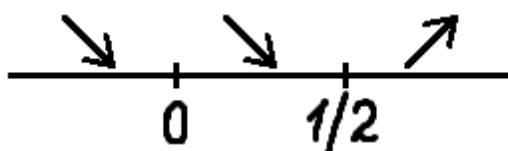


Рис. 161. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\min} = \frac{1}{2}$ - точка минимума; $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1,8$.

7) Вторая производная $y'' = \frac{e^{\frac{1}{x}}(2x^2 - 2x + 1)}{x^2}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 162):

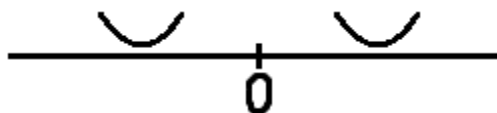


Рис. 162. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 163, 164)

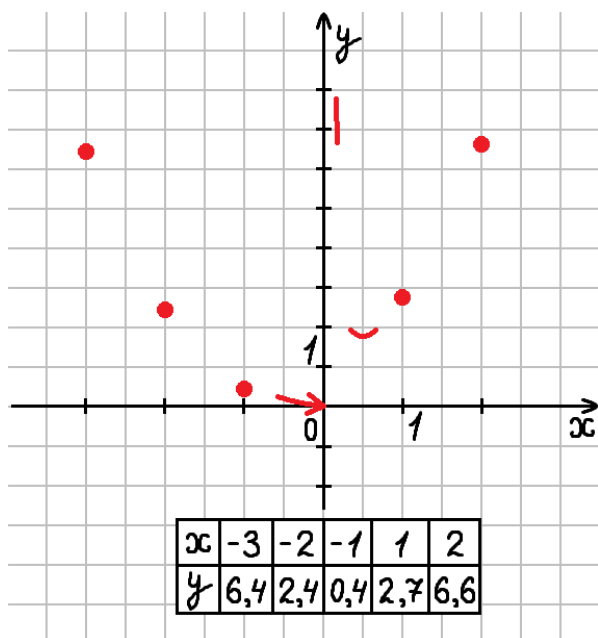


Рис. 163. Предварительный чертеж

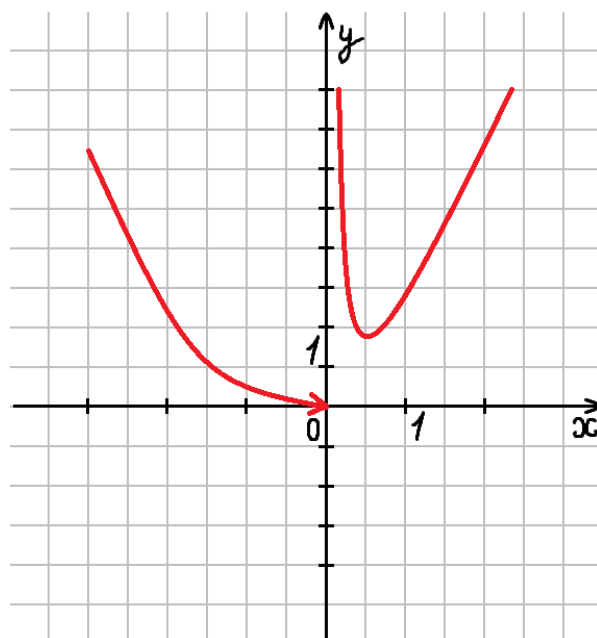


Рис. 164. График функции

$$y(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

Пример 42. $y(x) = \frac{e^{x-3}}{x-3}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $x \neq 3$, т.е. $D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция нулей не имеет. Промежутки знакопостоянства (рис. 165):

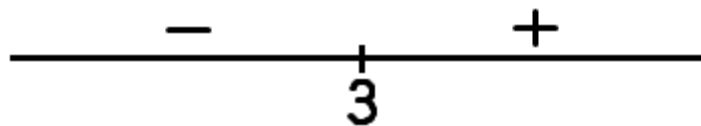


Рис. 165. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечения с осью Oy нет.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow 3-0} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3+0} y(x) = +\infty$, значит, прямая $x = 3$ - вертикальная асимптота.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$. Значит, прямая $y = 0$ - горизонтальная асимптота при $x \rightarrow -\infty$.

Наклонных асимптот нет.

- 6) Производная $y' = \frac{e^{x-3}(x-4)}{(x-3)^2}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 166):

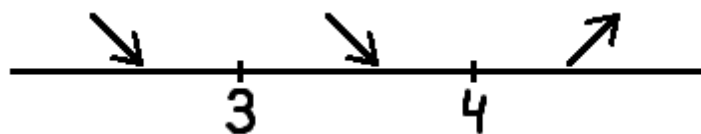


Рис. 166. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\min} = 4$ - точка минимума; $y_{\min} = y(4) = e$.

- 7) Вторая производная $y'' = \frac{e^{x-3}(x^2 - 8x + 17)}{(x-3)^3}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 167):

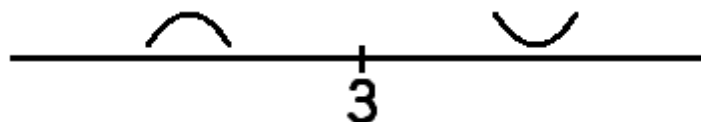


Рис. 167. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 168, 169)

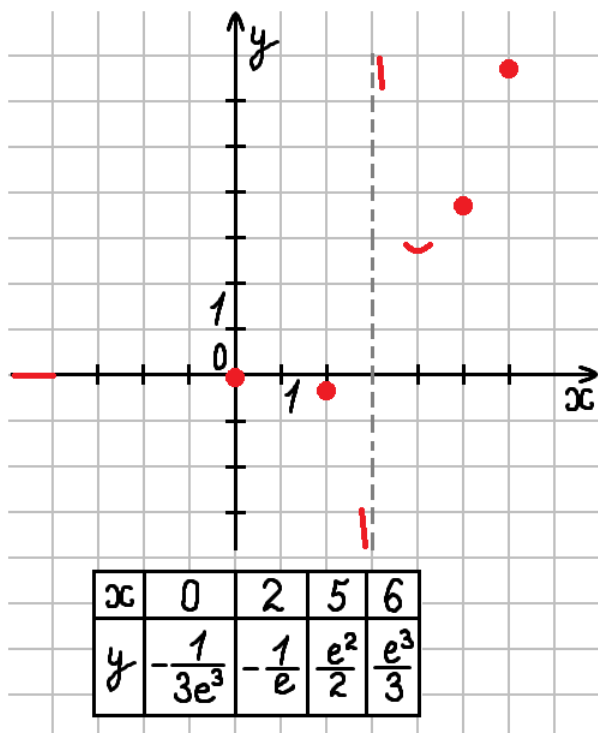


Рис. 168. Предварительный чертеж

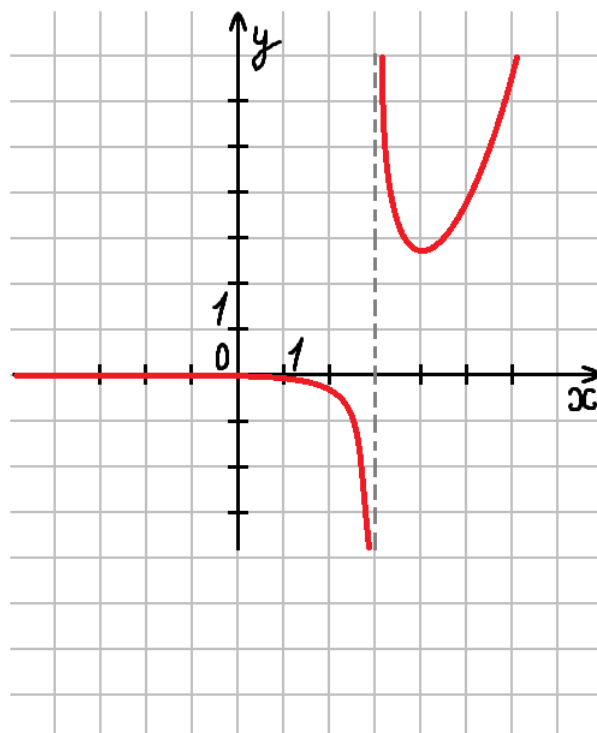


Рис. 169. График функции

$$y(x) = \frac{e^{x-3}}{x-3}$$

Функции с логарифмами, другие функции

Пример 43. $y(x) = \ln \frac{x+6}{x} - 1$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $\frac{x+6}{x} > 0$, т.е.

$$D(f) = (-\infty; -6) \cup (0; +\infty).$$

- 2) Проверим функцию на четность, нечетность и периодичность.

Имеем $y(-x) = \ln \frac{-x+6}{-x} - 1 = \ln \frac{x-6}{x} - 1$.

Так как $y(-x) \neq y(x)$, функция не является четной, также $y(-x) \neq -y(x)$, значит, функция не является нечетной. Поэтому имеем функцию общего вида. Функция не является периодической.

- 3) Чтобы найти нули функции, решим уравнение $\ln \frac{x+6}{x} - 1 = 0$. Получаем, что функция обращается в нуль при $x = \frac{6}{e-1} \approx 3,5$. Промежутки знакопостоянства (рис. 170):

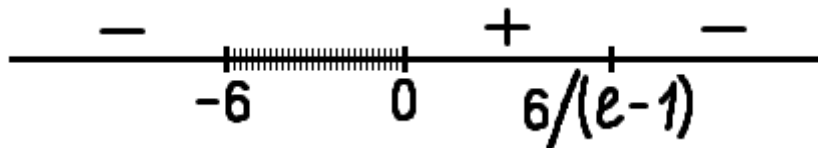


Рис. 170. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечения с осью Oy нет.

- 4) Проверим, будут ли прямые $x = -6$ и $x = 0$ вертикальными асимптотами.

Имеем $\lim_{x \rightarrow -6-0} \left(\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -6+0} \left(\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right)$ не существует;

$\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right)$ не существует, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right) = +\infty$, поскольку хотя бы

один из пределов для каждой из точек равен бесконечности, делаем вывод, что прямые $x = -6$ и $x = 0$ являются вертикальными асимптотами к графику функции.

- 5) Определим поведение функции при $x \rightarrow +\infty$.

Имеем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right) = -1$, значит, прямая $y = -1$ - горизонтальная

асимптота. Раз существует горизонтальная асимптота, то наклонной асимптоты при $x \rightarrow +\infty$ не будет.

Убедимся в этом, попробовав найти наклонную асимптоту по формулам

$$y = kx + b, \text{ где } k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - kx).$$

$$\text{Имеем } k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+6}{x} - 1}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right) = -1. \text{ Получили, что}$$

прямая $y = -1$ - горизонтальная асимптота при $x \rightarrow +\infty$.

Определим поведение функции при $x \rightarrow -\infty$.

Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln \frac{x+6}{x} - 1 \right) = -1$, значит, прямая $y = -1$ - горизонтальная асимптота. Раз существует горизонтальная асимптота, то наклонной асимптоты при $x \rightarrow -\infty$ не будет.

6) Производная $y' = -\frac{6}{x(x+6)}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 171):



Рис. 171. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Экстремумов нет.

7) Вторая производная $y'' = \frac{12(x+3)}{x^2(x+6)^2}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 172):



Рис. 172. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) При построении графика функции начинаем с построения его асимптот, точек пересечения с координатными осями, точек экстремума и точек перегиба, при необходимости отмечаем дополнительные точки. Знание промежутков возрастания и убывания функции, а также интервалов выпуклости ее графика позволит верно построить график в соответствующих областях (рис. 173, 174).

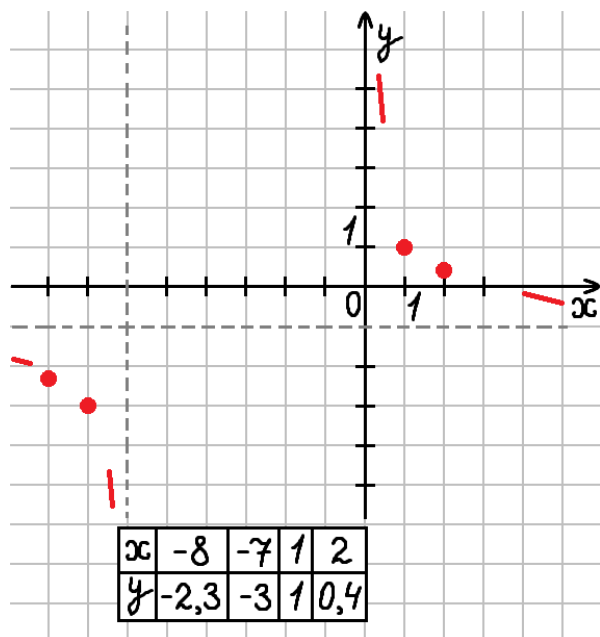


Рис. 173. Предварительный чертеж

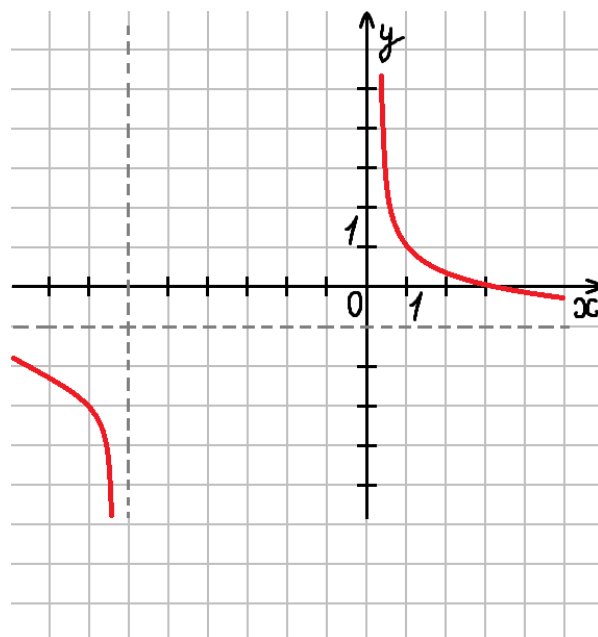


Рис. 174. График функции

$$y(x) = \ln \frac{x+6}{x} - 1$$

Пример 44. $y(x) = 2 \ln \frac{x-1}{x} + 1$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $\frac{x-1}{x} > 0$, т.е.

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty).$$

- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.

- 3) Функция обращается в нуль при $x = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \approx 2,5$. Промежутки

знакопостоянства (рис. 175):

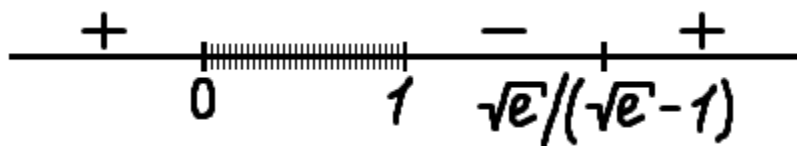


Рис. 175. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечения с осью Oy нет.

- 4) Имеем $\lim_{x \rightarrow 0-0} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = -\infty$, значит, прямые $x=0$ и $x=1$ - вертикальные асимптоты.

- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 1$. Значит, прямая $y=1$ - горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот нет.

- 6) Производная $y' = \frac{2}{x(x-1)}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 176):



Рис. 176. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Экстремумов нет.

- 7) Вторая производная $y'' = -\frac{4\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x^2(x-1)^2}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 177):



Рис. 177. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 178, 179)

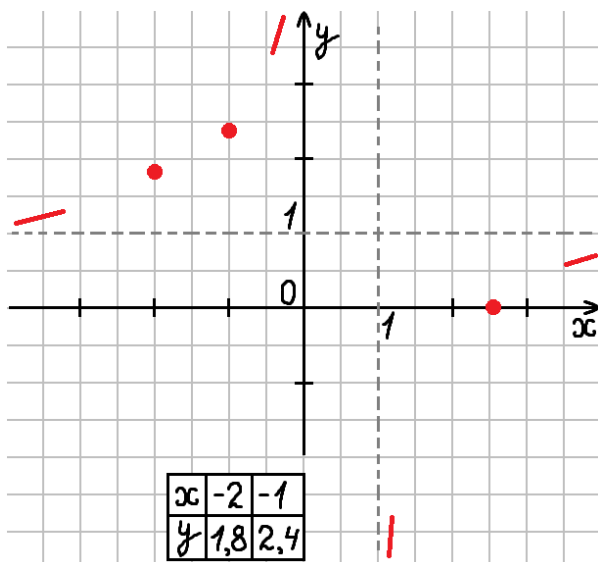


Рис. 178. Предварительный чертеж

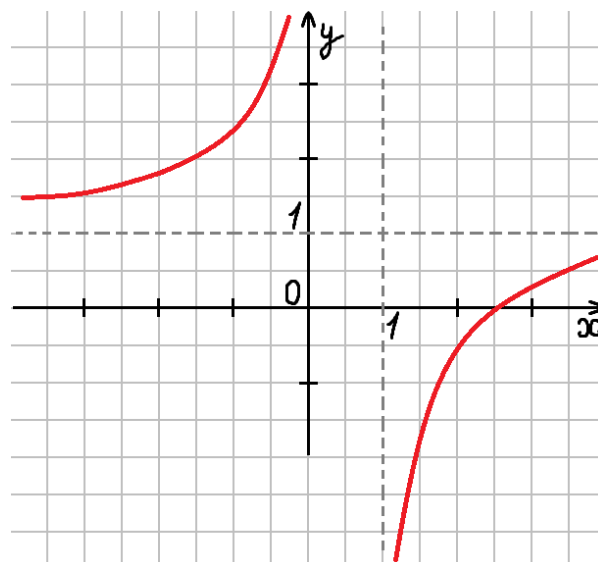


Рис. 179. График функции

$$y(x) = 2 \ln \frac{x-1}{x} + 1$$

Пример 45. $y(x) = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x = -6$ и $x = 0$. Промежутки знакопостоянства (рис. 180):

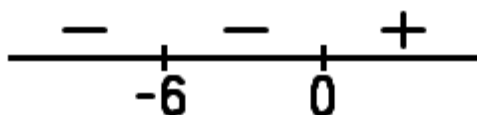


Рис. 180. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0; 0)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$. Горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x(x+6)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x+6)^2 - x^3}{\sqrt[3]{x^2(x+6)^4} + x\sqrt[3]{x(x+6)^2} + x^2} = 4.$$

Значит, прямая $y = x + 4$ - наклонная асимптота при $x \rightarrow \pm\infty$.

6) Производная $y' = \frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}(x+6)^{\frac{1}{3}}}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 181):

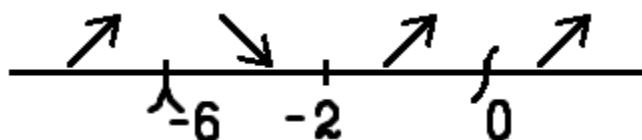


Рис. 181. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x = -6$ - точка максимума, $y(-6) = 0$.

Точка $x = -2$ - точка минимума, $y(-2) \approx -3,2$.

7) Вторая производная $y'' = -\frac{8}{x^{\frac{5}{3}}(x+6)^{\frac{4}{3}}}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 182):



Рис. 182. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x = 0$, $y(0) = 0$.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 183, 184)

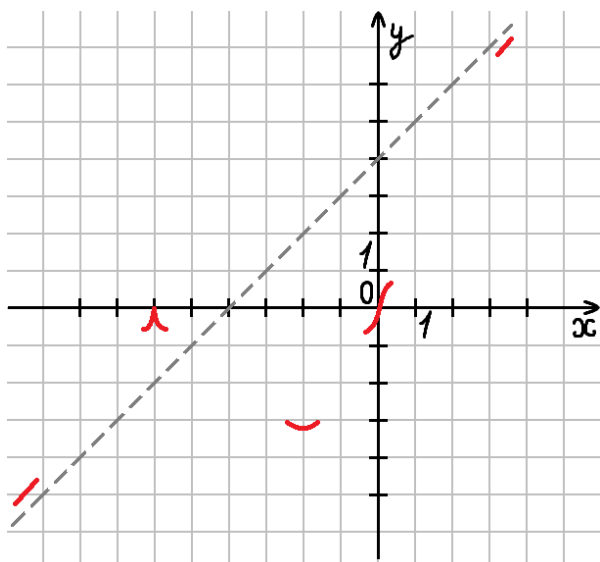


Рис. 183. Предварительный чертёж

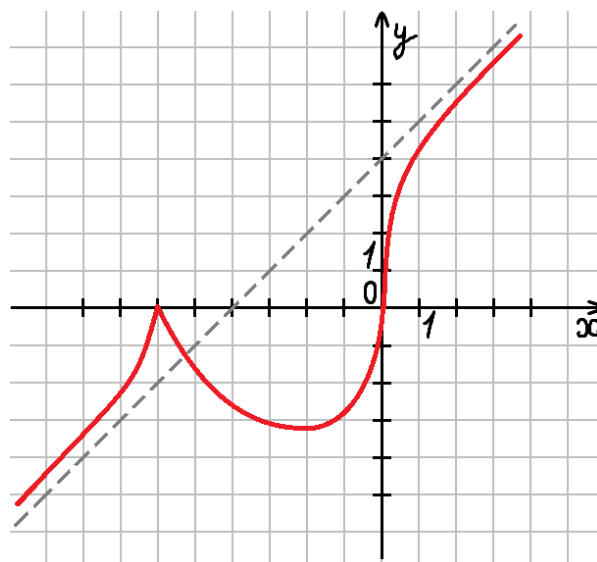


Рис. 184. График функции

$$y(x) = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$$

Пример 46. $y(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x=0$ и $x=1$. Промежутки знакопостоянства (рис. 185):

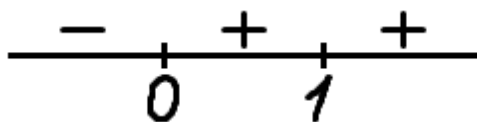


Рис. 185. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0;0)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$. Горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x-1)^2 - x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4} + x\sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2} = -\frac{2}{3}.$$

Значит, прямая $y = x - \frac{2}{3}$ - наклонная асимптота при $x \rightarrow \pm\infty$.

6) Производная $y' = \frac{x - \frac{1}{3}}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 186):

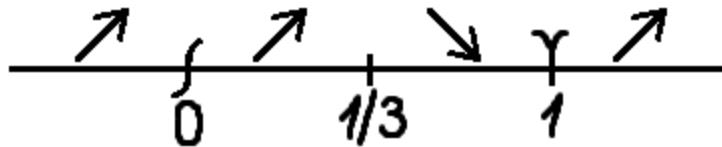


Рис. 186. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x = \frac{1}{3}$ - точка максимума, $y\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,5$.

Точка $x = 1$ - точка минимума, $y(1) = 0$.

7) Вторая производная $y'' = -\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 187):

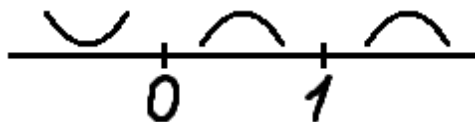


Рис. 187. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x = 0$, $y(0) = 0$.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 188, 189)

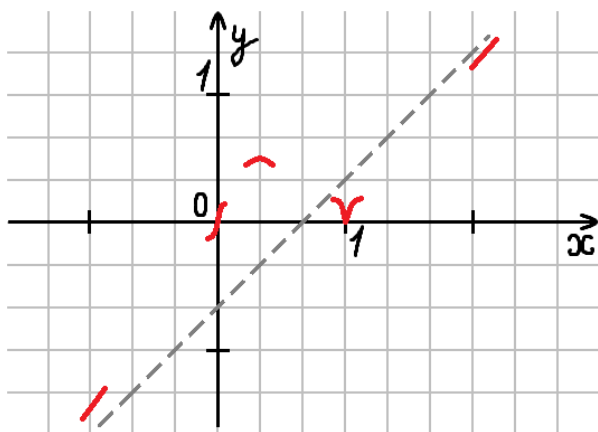


Рис. 188. Предварительный чертеж

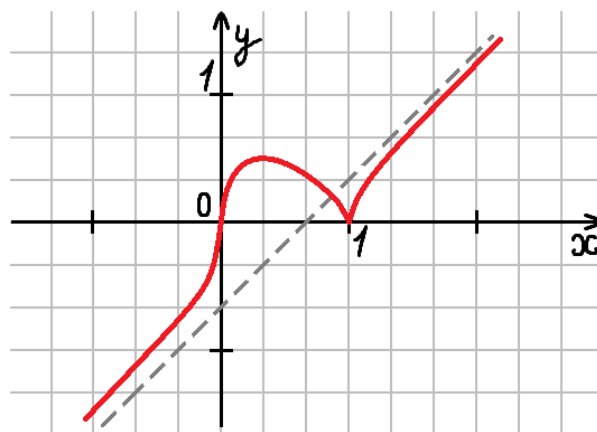


Рис. 189. График функции

$$y(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$

Пример 47. $y(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x=0$ и $x = -\frac{27}{8} = -3,375$. Промежутки знакопостоянства (рис. 190):

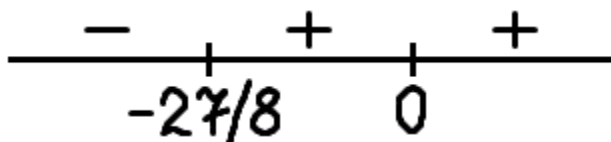


Рис. 190. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0;0)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$. Горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - 2x) = +\infty$. Наклонных асимптот нет.

- 6) Производная $y' = \frac{2(\sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x}}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 191):

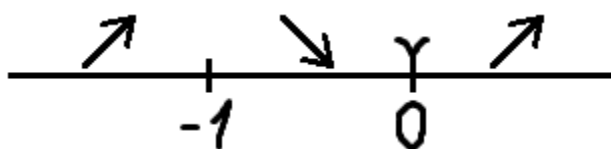


Рис. 191. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x = -1$ - точка максимума, $y(-1) = 1$.

Точка $x = 0$ - точка минимума, $y(0) = 0$.

7) Вторая производная $y'' = -\frac{2}{3x^3\sqrt{x}}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 192):

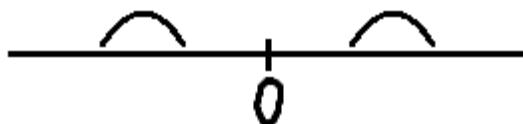


Рис. 192. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 193, 194)

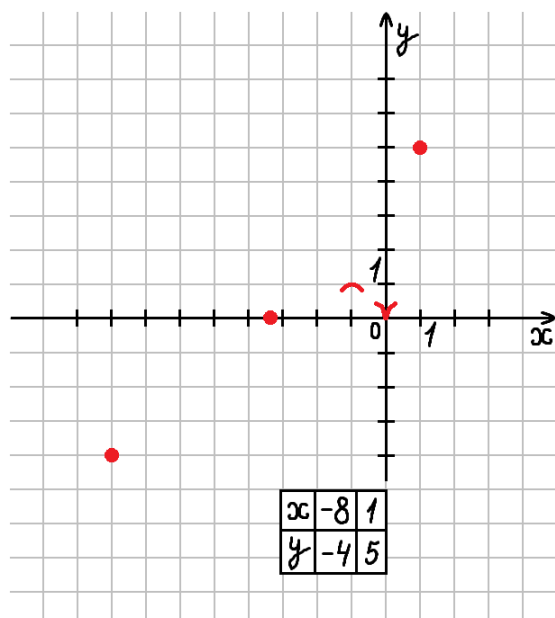


Рис. 193. Предварительный чертеж

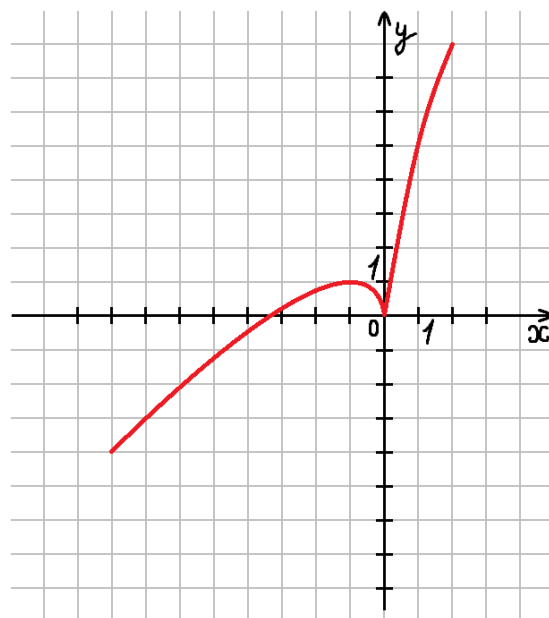


Рис. 194. График функции

$$y(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$$

Пример 48. $y(x) = 12\sqrt[3]{(x+2)^2} - 8x - 16$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Для определения нулей функции решим уравнение
 $12\sqrt[3]{(x+2)^2} - 8(x+2) = 0$; $x_1 = -2$ и $x_2 = \frac{11}{8} = 1,375$. Промежутки

знакопостоянства (рис. 195):

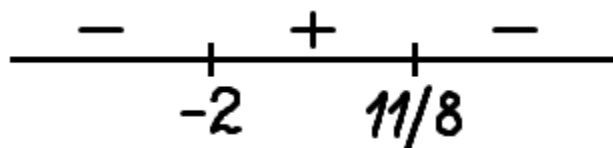


Рис. 195. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0; 3,05)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$. Горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = -8$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) + 8x) = \infty$. Наклонных асимптот нет.

- 6) Производная $y' = \frac{8(1 - \sqrt[3]{x+2})}{\sqrt[3]{x+2}}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 196):

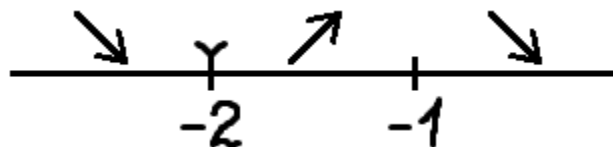


Рис. 196. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x = -2$ - точка минимума, $y(-2) = 0$.

Точка $x = -1$ - точка максимума, $y(-1) = 4$.

7) Вторая производная $y'' = -\frac{8}{3(x+2)^{\frac{4}{3}}}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 197):

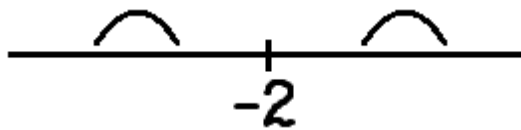


Рис. 197. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 198, 199)

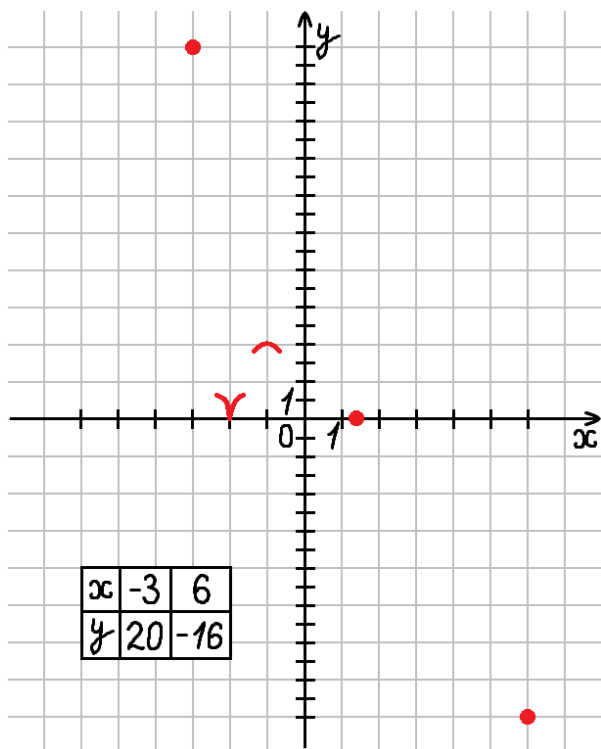


Рис. 198. Предварительный чертеж

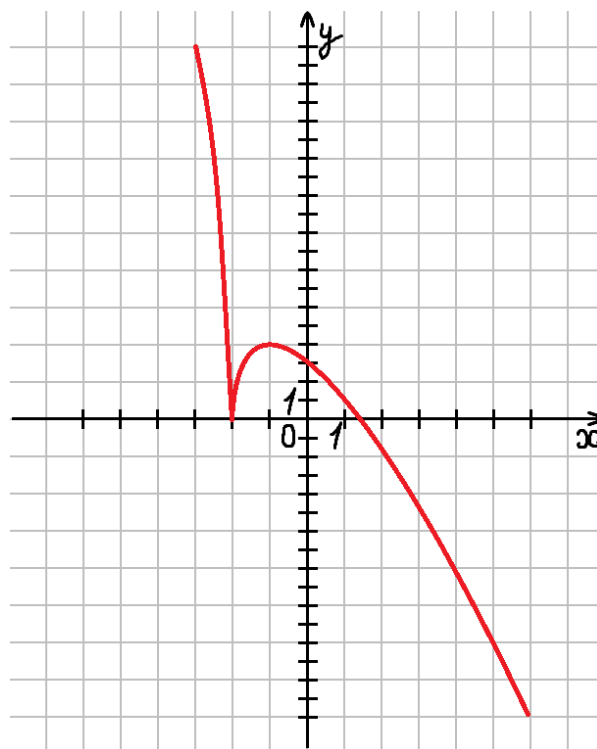


Рис. 199. График функции

$$y(x) = 12\sqrt[3]{(x+2)^2} - 8x - 16$$

Пример 49. $y(x) = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.

- 3) Для определения нулей функции решим уравнение

$$3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2(x+4) = 0; \quad x_1 = -4 \text{ и } x_2 = -\frac{5}{8} = -0,625. \quad \text{Промежутки}$$

знакопостоянства (рис. 200):

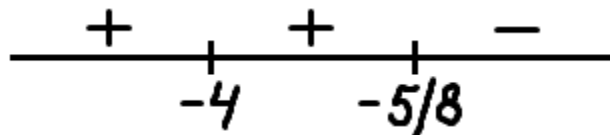


Рис. 200. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0; -0,44)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.
 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$. Горизонтальных асимптот нет.

Далее $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = -2$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) + 2x) = \infty$. Наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = \frac{2(1 - \sqrt[3]{x+4})}{\sqrt[3]{x+4}}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 201):

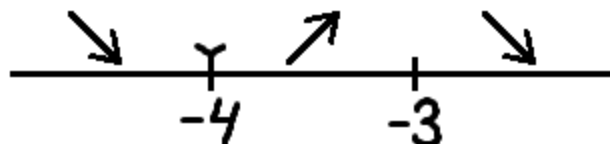


Рис. 201. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x = -4$ - точка минимума, $y(-4) = 0$.

Точка $x = -3$ - точка максимума, $y(-3) = 1$.

7) Вторая производная $y'' = -\frac{2}{3(x+4)^{\frac{4}{3}}}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 202):

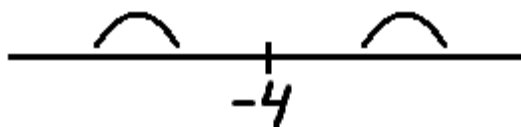


Рис. 202. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 203, 204)

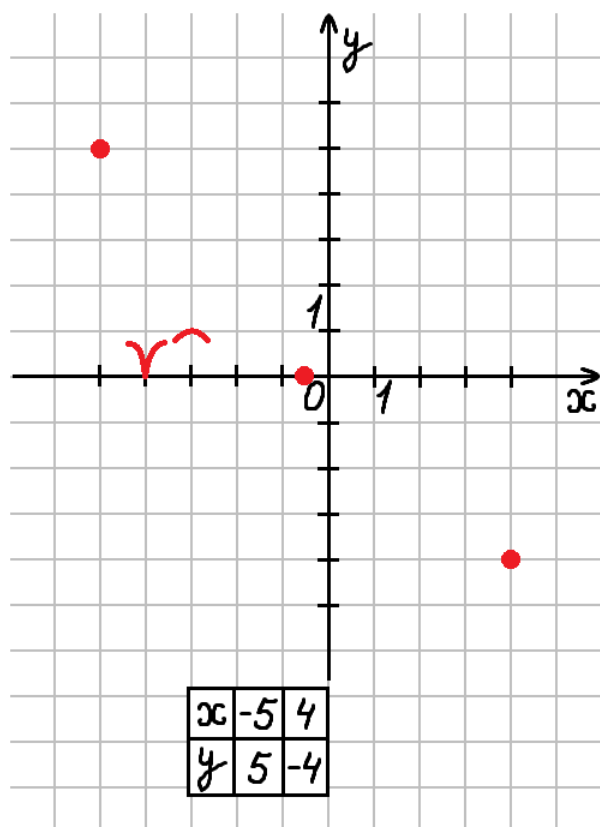


Рис. 203. Предварительный чертеж

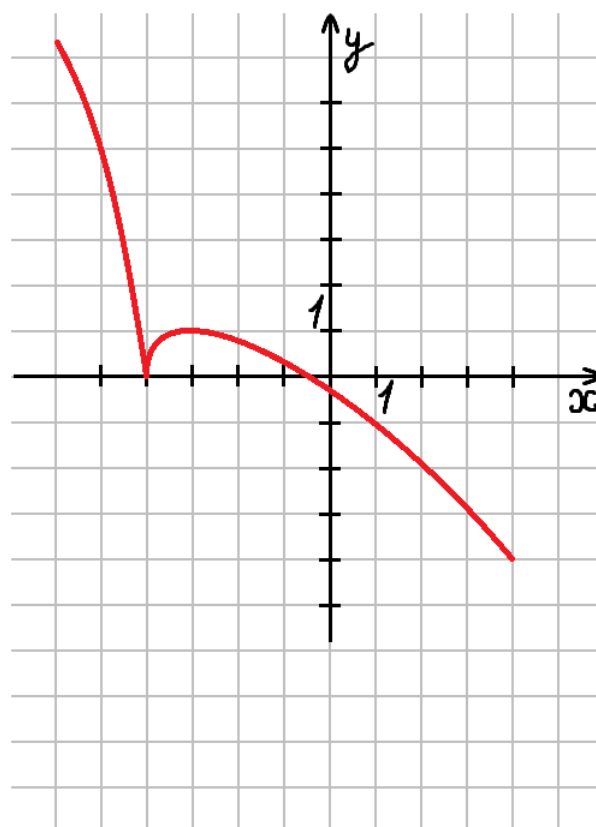


Рис. 204. График функции

$$y(x) = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8$$

Пример 50. $y(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Функция четная. Функция не является периодической.
- 3) Функция принимает только положительные значения.
Пересечение с осью Oy : $(0; 2)$.
- 4) Вертикальных асимптот нет.

- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = 0$. Горизонтальных и наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = \frac{2(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1})}{3\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1}}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 205):

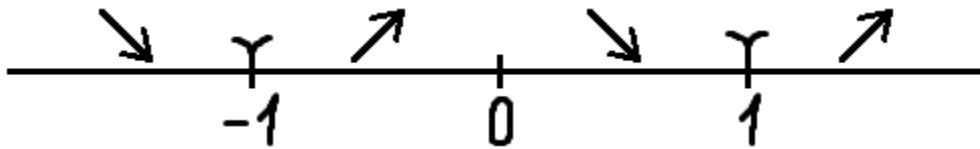


Рис. 205. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x = -1$ - точка минимума, $y(-1) \approx 1,6$.

Точка $x = 0$ - точка максимума, $y(0) = 2$.

Точка $x = 1$ - точка минимума, $y(1) \approx 1,6$.

7) Вторая производная $y'' = -\frac{2(\sqrt[3]{(x-1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^4})}{9\sqrt[3]{(x+1)^4} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 206):



Рис. 206. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точек перегиба нет.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 207, 208)

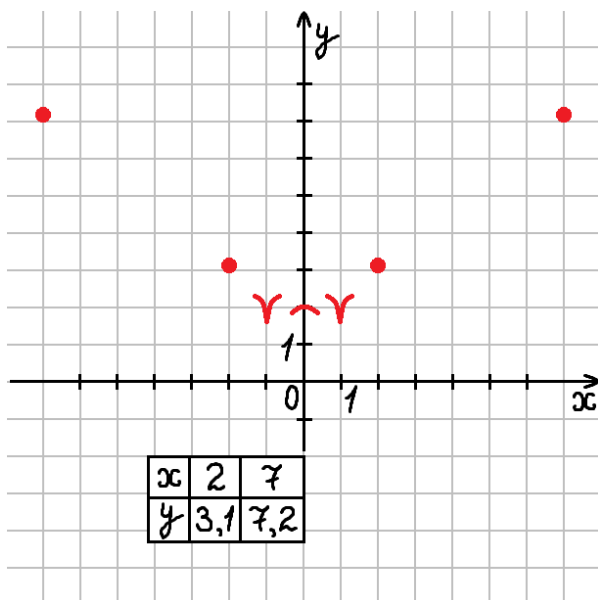


Рис. 207. Предварительный чертеж

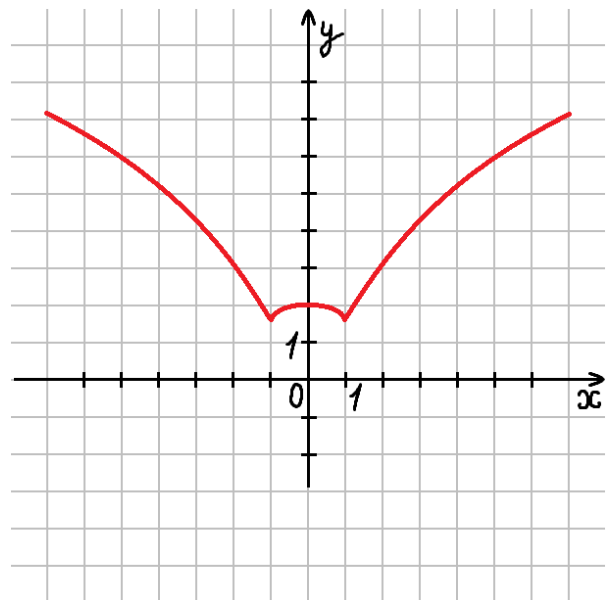


Рис. 208. График функции

$$y(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

Пример 51. $y(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Функция общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x = -1,5$. Промежутки знакопостоянства (рис. 209):

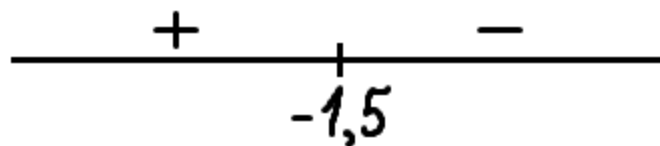


Рис. 209. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0; -0,6)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.

- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^2 - (x+2)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^2(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^4}} = 0$. Прямая

$y = 0$ - горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = \frac{2(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x+1})}{3\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x+2}}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 210):

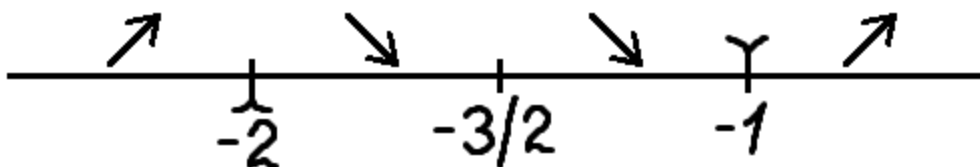


Рис. 210. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x = -2$ - точка максимума, $y(-2) = 1$.

Точка $x = -1$ - точка минимума, $y(-1) = -1$.

7) Вторая производная $y'' = -\frac{2(\sqrt[3]{(x+2)^4} - \sqrt[3]{(x+1)^4})}{9\sqrt[3]{(x+1)^4} \cdot \sqrt[3]{(x+2)^4}}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 211):

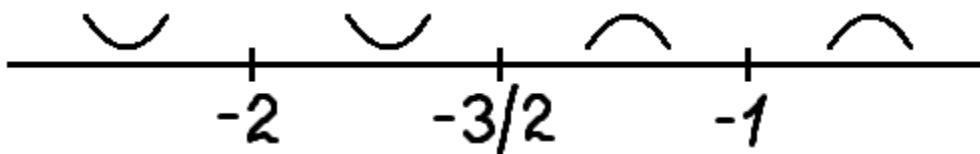


Рис. 211. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x = -1,5$, $y(-1,5) = 0$.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 212, 213)

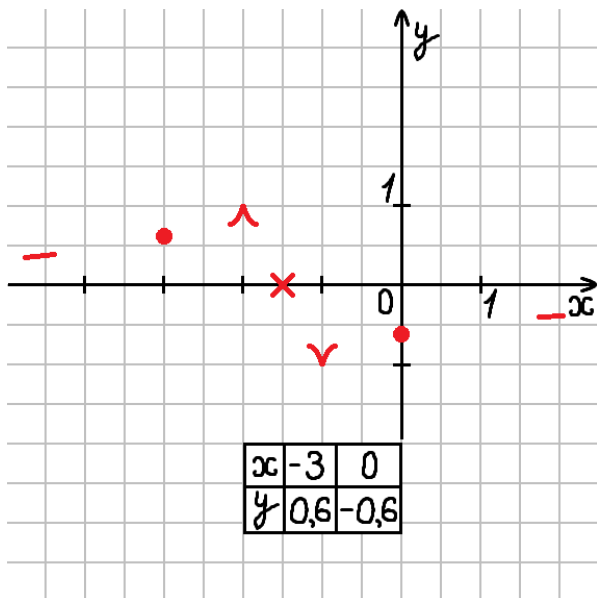


Рис. 212. Предварительный чертеж

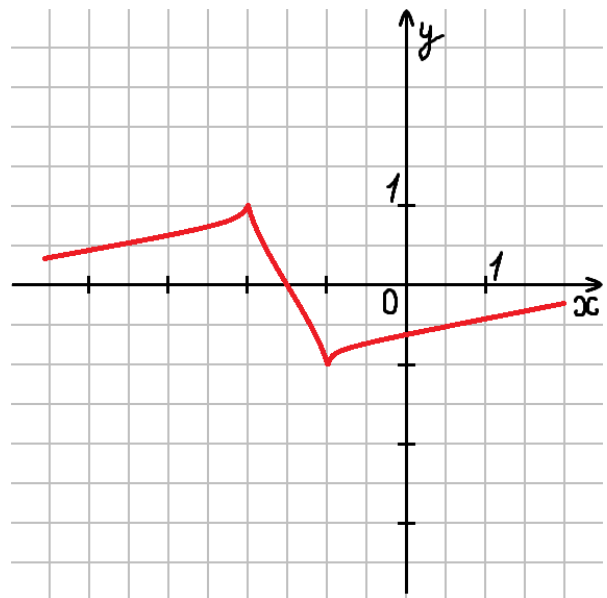


Рис. 213. График функции

$$y(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$$

Пример 52. $y(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

- 1) Функция определена и непрерывна при $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, т.е. при всех x ,
 $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Функция нечетная. Функция не является периодической.
- 3) Функция обращается в нуль при $x=0$. Промежутки знакопостоянства (рис. 214):

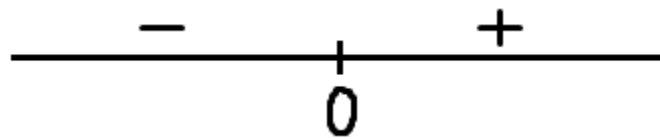


Рис. 214. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0;0)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.
- 5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$. Прямая $y=0$ - горизонтальная асимптота.

Наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = \left(\arcsin \frac{2x}{1+x^2} \right)' = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}}} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1) \cdot |1-x^2|}$.

Тогда $y' = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & |x| < 1, \\ \text{не существует при } x = \pm 1, \\ -\frac{2}{1+x^2}, & |x| > 1. \end{cases}$

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 215):

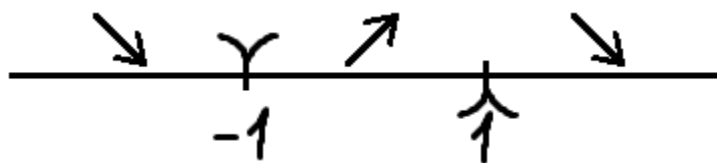


Рис. 215. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x = -1$ - точка минимума, $y(-1) = -\frac{\pi}{2} \approx -1,57$.

Точка $x = 1$ - точка максимума, $y(1) = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$.

7) Вторая производная $y'' = \begin{cases} -\frac{4}{(1+x^2)^2}, & |x| < 1, \\ \text{не существует при } x = \pm 1, \\ \frac{4}{(1+x^2)^2}, & |x| > 1. \end{cases}$

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 216):

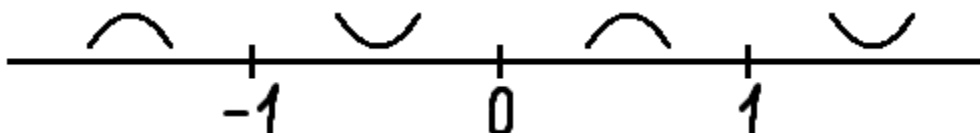


Рис. 216. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x = 0$, $y(0) = 0$.

- 8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 217, 218)

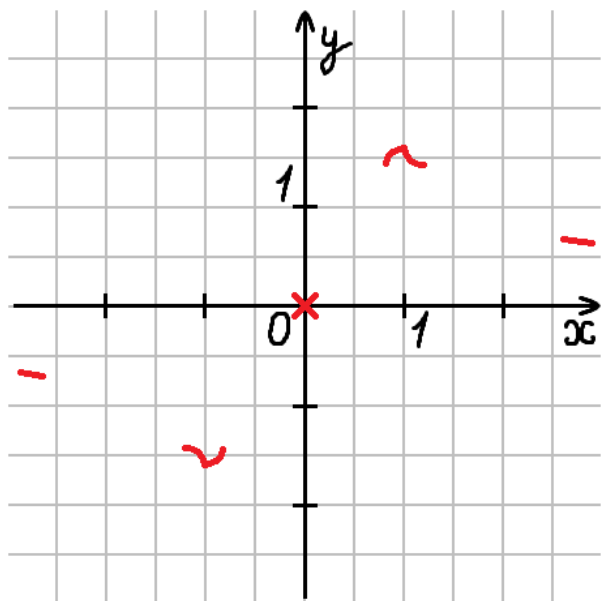


Рис. 217. Предварительный чертеж

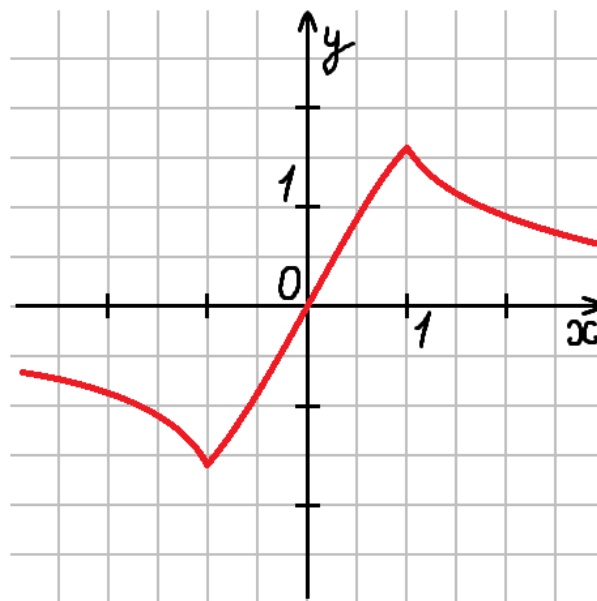


Рис. 218. График функции

$$y(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

Пример 53. $y(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right)$.

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Проверим функцию на четность и нечетность:

$$y(-x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(-x) + \cos(-x)}{\sqrt{2}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{-\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right), \quad y(-x) \neq y(x),$$

$y(-x) \neq -y(x)$, значит, имеем функцию общего вида.

Проверим функцию на периодичность:

$$y(x + 2\pi) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi)}{\sqrt{2}} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right) = y(x),$$

значит, имеем периодическую функцию с периодом $T = 2\pi$.

Далее для удобства будем анализировать только один период: $[0; 2\pi]$.

3) Для определения нулей функции решим уравнение

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right) = 0 \Rightarrow \sin x + \cos x = 0; \quad x_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{7\pi}{4}$$

.Промежутки знакопостоянства (рис. 219):

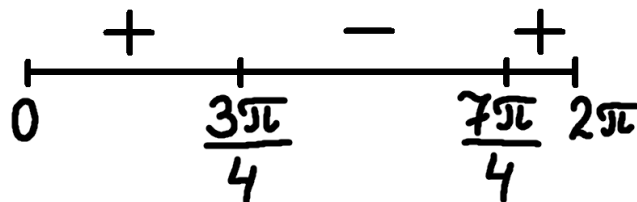


Рис. 219. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0; 0,6)$.

4) Вертикальных асимптот нет.

5) Имеем $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)$ не существует,

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)}{x} = 0$. Значит, горизонтальных и наклонных асимптот нет.

6) Производная $y' = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right) \right)' = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{3 + \sin 2x}$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 220):

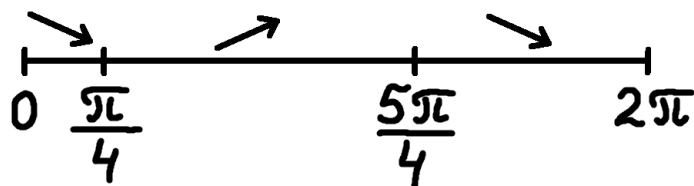


Рис. 220. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x = \frac{\pi}{4}$ - точка максимума, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Точка $x = \frac{5\pi}{4}$ - точка минимума, $y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

7) Вторая производная $y'' = -\frac{\sqrt{2}(\sin x + \cos x)(5 - \sin 2x)}{(3 + \sin 2x)^2}$.

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 221):

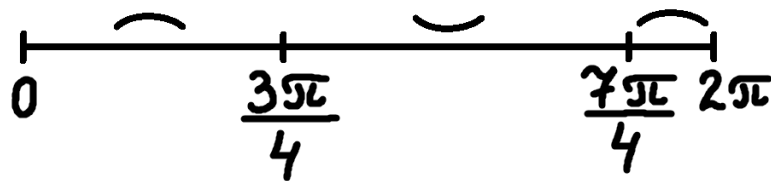


Рис. 221. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точки перегиба: $x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}, y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = y\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0$.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 222, 223)

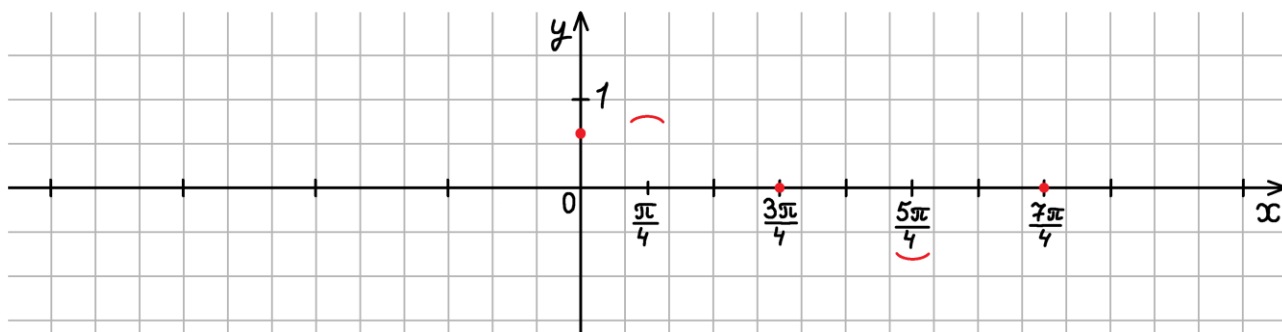


Рис. 222. Предварительный чертеж

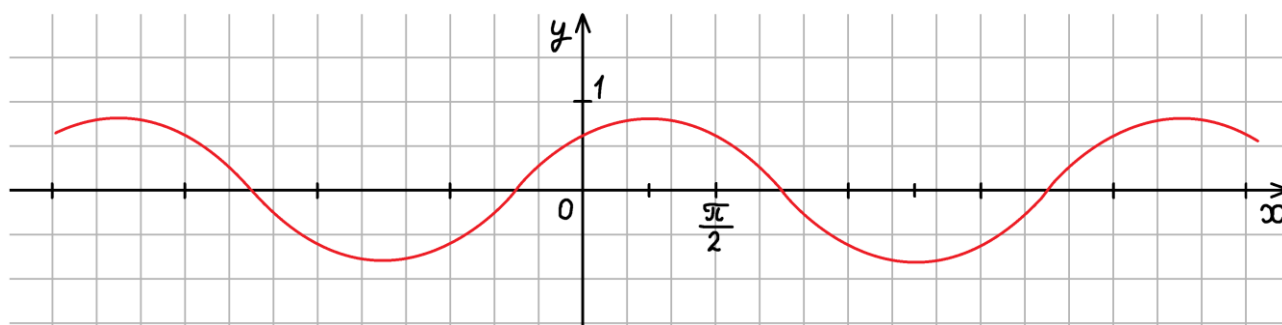


Рис. 223. График функции $y(x) = \arctg\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)$

Пример 54. $y(x) = x^3 + |x|$.

Исходную функцию можно переписать в виде $y(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \geq 0, \\ x^3 - x, & x < 0. \end{cases}$

- 1) Функция определена и непрерывна при всех x , т.е. $D(f) = \mathbb{R}$.
- 2) Проверим функцию на четность и нечетность:
 $y(-x) = (-x)^3 + |-x| = -x^3 + |x|$, $y(-x) \neq y(x)$, $y(-x) \neq -y(x)$, значит, имеем функцию общего вида. Функция не является периодической.
- 3) Для определения нулей функции решим уравнение
 $x^3 + |x| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 + x = 0, & x \geq 0, \\ x^3 - x = 0, & x < 0. \end{cases} \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0.$ Промежутки

знакопостоянства (рис. 224):

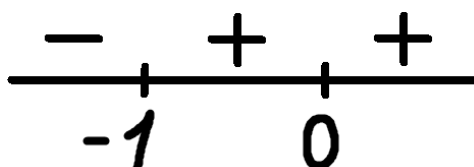


Рис. 224. Промежутки знакопостоянства функции $y(x)$

Пересечение с осью Oy : $(0;0)$.

- 4) Вертикальных асимптот нет.
- 5) Поведение функции при $x \rightarrow \pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty$. Значит, горизонтальных и наклонных асимптот нет.
- 6) Производная $y' = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x \geq 0, \\ 3x^2 - 1, & x < 0. \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0$.

Промежутки возрастания и убывания функции (рис. 225):

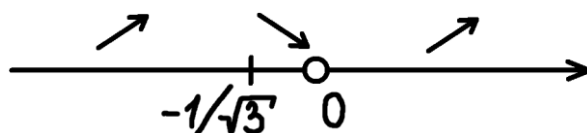


Рис. 225. Промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$

Точка $x_{\max} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ - точка максимума; $y_{\max} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,38$.

7) Вторая производная $y'' = \begin{cases} 6x, & x \geq 0, \\ 6x, & x < 0. \end{cases}$

Промежутки выпуклости функции вверх и вниз (рис. 226):

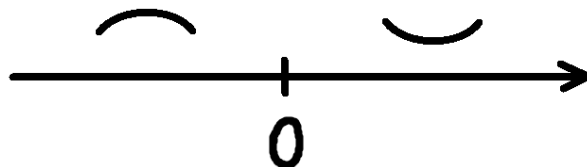


Рис. 226. Промежутки выпуклости функции $y(x)$

Точка перегиба $x = 0, y(0) = 0$.

8) Делаем предварительный чертеж и строим график функции (рис. 227, 228).

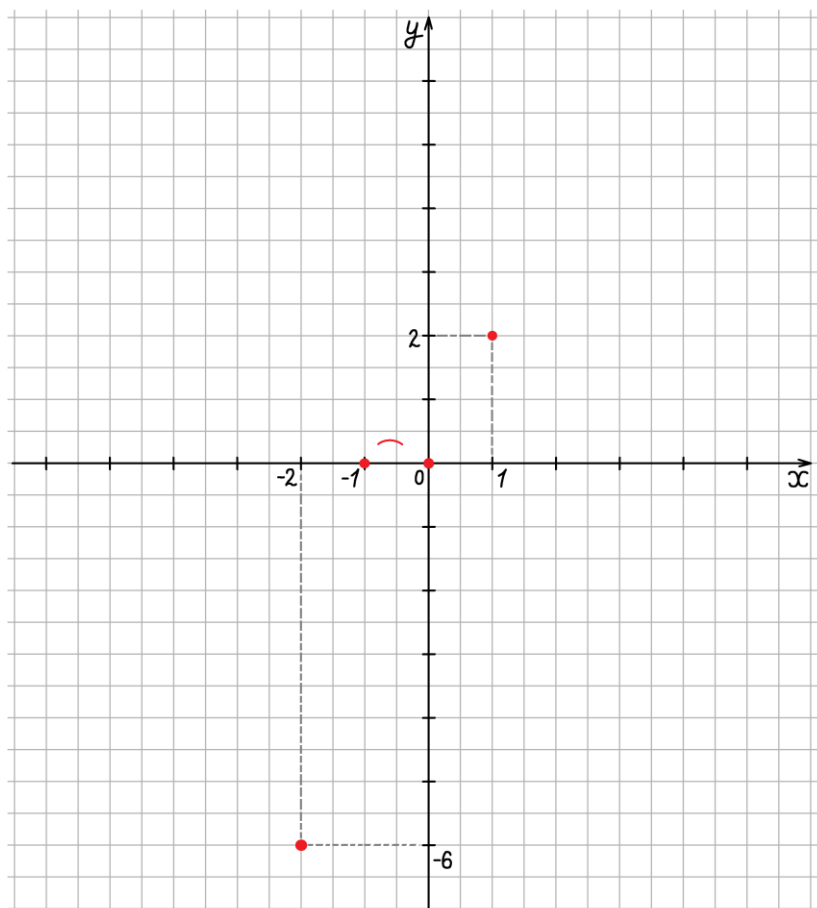


Рис. 227. Предварительный чертеж

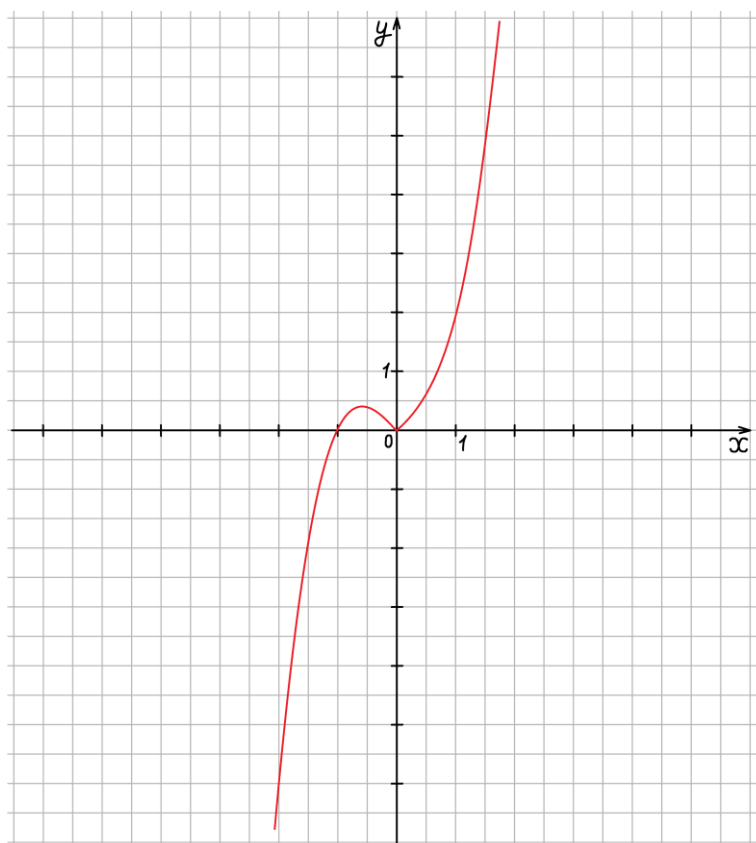


Рис. 228. График функции $y(x) = x^3 + |x|$

Упражнения

Провести полное исследование функций и построить их графики:

1. $y(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$;
2. $y(x) = 6x - 8x^3$;
3. $y(x) = 16x^2(x-1)^2$;
4. $y(x) = \frac{2x+3}{3x-5}$;
5. $y(x) = \frac{5}{4x+7}$;
6. $y(x) = \frac{4x^2}{3+x^2}$;
7. $y(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$;

8. $y(x) = \frac{12x}{9+x^2};$
9. $y(x) = \frac{x^3-4x}{3x^2-4};$
10. $y(x) = (2x^2-9)\sqrt{x^2-1};$
11. $y(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}};$
12. $y(x) = \sqrt[3]{x(x-2)};$
13. $y(x) = \sqrt[3]{x^2+6x+8};$
14. $y(x) = 2x+6-3\sqrt[3]{(x+3)^2};$
15. $y(x) = \sqrt[3]{(x-6)x^2};$
16. $y(x) = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2};$
17. $y(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2};$
18. $y(x) = \frac{e^{2-x}}{2-x};$
19. $y(x) = (2x+3)e^{-2(x+1)};$
20. $y(x) = 3\ln \frac{x}{x-3} - 1.$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение функции.
2. На какие классы делятся основные элементарные функции?
3. Дайте определение обратной и сложной функции.
4. Дайте определение непрерывной функции.
5. Перечислите виды точек разрыва функции.
6. Дайте определение производной функции. Каков геометрический смысл производной функции?
7. Сформулируйте необходимое условие локального экстремума функции.
8. Сформулируйте достаточное условие локального экстремума функции.
9. Сформулируйте достаточное условие существования точки перегиба графика функции.
10. Дайте определение асимптоты графика функции.
11. На какие виды подразделяются асимптоты?
12. По каким формулам вычисляются коэффициенты k и b для наклонной асимптоты?
13. Приведите схему полного исследования функции.

Литература

Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие / Г.Н. Берман. — 9-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2020. — 492 с. — ISBN 978-5-8114-4862-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/126705>. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Бугров Я.С. Сборник задач по высшей математике: учебник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — 4-е изд. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 304 с. — ISBN 5-9221-0177-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2124>. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Бугров Я.С. Высшая математика в 3 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление в 2 кн. Книга 2: учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — 7-е изд., стер. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 246 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02150-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/452427>. — Режим доступа: для авториз. пользователей.

Гельфанд И.М. Функции и графики. (основные приемы) / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, Э.Э. Шноль — М.: МЦНМО, 2015. — 120 с.

Полещук О.М. Основные понятия дифференциального исчисления: учебно-методическое пособие / Полещук О.М., Тумор С.В.; МГТУ им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский ун-т).- М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2023.- 42 с.: рис., табл.-ISBN 978-5-7038-6062-5.

Райхмист Р.Б. Графики функций. Справ. пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1991. — 160 с.: ил.