

Московский государственный университет леса

Кафедра физики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 19

УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАЯТНИК

## Лабораторная работа № 19

## Универсальный маятник

Цель работы: изучение математического и физического маятника, определение ускорения свободного падения.

## Методика эксперимента

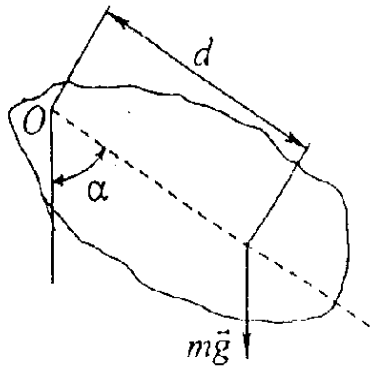


Рис. 1

Физический маятник — твердое тело, которое может совершать колебания под действием силы тяжести  $mg$  относительно оси, не проходящей через центр тяжести тела (рис. 1). При отклонении маятника на угол  $\alpha$  возникает вращательный момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен

$$M = -mgd \sin \alpha, \quad (1)$$

где  $d$  — расстояние между точкой подвеса и центром тяжести тела.

В отсутствие сил трения в подвесе уравнение движения маятника, момент инерции которого относительно оси вращения равен  $I$ , имеет вид

$$M = I \frac{d^2 \alpha}{dt^2}, \quad (2)$$

При малых колебаниях маятника  $\sin \alpha \approx \alpha$  уравнение движения маятника (2) с учетом (1) имеет вид

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \alpha = 0, \quad (3)$$

то есть угол  $\alpha$  удовлетворяет дифференциальному уравнению гармонических колебаний.

Таким образом, в отсутствие трения малые колебания физического маятника являются гармоническими:  $\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi)$ . Здесь  $\alpha_0$ ,  $\varphi$  — амплитуда и начальная фаза колебаний, а

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \text{и} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (4)$$

— циклическая частота и период колебаний физического маятника.

Математический маятник — материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити и совершающая колебания под действием силы тяжести. Математический маятник представляет собой предельный случай физического маятника, вся масса которого сосредоточена в его центре масс так, что  $d = \ell$  — длина математического маятника. Момент

инерции такого маятника относительно оси качания  $I = m\ell^2$ . Тогда с учетом (4), период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (5)$$

### Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 2. К основанию 1 крепится колонка 2, на которой расположены верхний кронштейн 3 и нижний кронштейн 4 с фотоэлектрическим датчиком. Вороток 5 позволяет поворачивать верхний кронштейн вокруг колонки. С одной стороны кронштейна 3 расположен математический маятник 6, а с другой стороны физический маятник в виде однородного стержня 7. Длину математического маятника можно изменять при помощи воротка 8, а

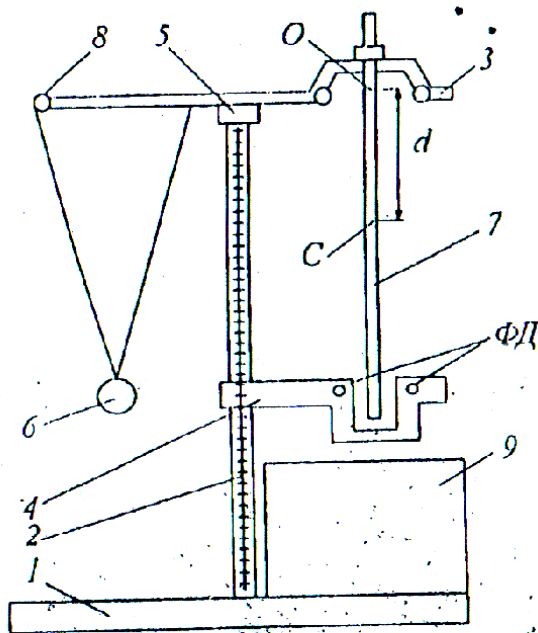


Рис. 1

измерить её можно по шкале, расположенной на колонке 2. На стержне физического маятника 7 через каждые 10 мм сделаны кольцевые нарезки (для определения расстояния от точки подвеса до центра масс). По стержню может перемещаться лёгкая опорная призма. Стержень колеблется относительно горизонтальной оси, опираясь нижним ребром призмы на закрепленную на штативе опорную площадку. Фиксируя призму в различных точках стержня, можно менять расстояние от оси качания маятника до его центра масс  $C$ .

Момент инерции стержня  $I$  относительно оси качания определяется по теореме Штейнера

$$I = I_c + md^2 \quad (6)$$

где  $I_c = \frac{1}{12} m\ell^2$  — момент инерции однородного стержня массы  $m$  и длины  $\ell$ , относительно оси, проходящей через центр масс стержня  $C$ .

Поэтому период колебаний стержня согласно (4), (6) равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell^2 / 12 + md^2}{mgd}} \quad (7)$$

Нижний кронштейн 4 можно перемещать вдоль колонки 2 и фиксировать его в произвольном, положении. На основании 1 укреплен универсальный электронный миллисекундомер 9, позволяющий определять периоды колебаний математического и физического маятников.

#### Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь с экспериментальной установкой. Нажмите клавишу «Сеть» и проверьте, все ли индикаторы измерителя показывают цифру «0» и горит ли лампочка фотоэлектрического датчика ФД.
2. Для определения периода колебаний математического маятника отверните вороток 5 и поверните верхний кронштейн так, чтобы над фотоэлектрическим датчиком расположился математический маятник. Зафиксируйте это положение. Вращая вороток 8, установите длину математического маятника такой, чтобы черта на шарике маятника была продолжением черты на корпусе фотодатчика. Для определения периода  $T$  колебаний математического маятника отклоните маятник на небольшой угол от положения равновесия, отпустите его и нажмите на клавишу «Сброс». После подсчета измерителем нескольких колебаний (удобно после девятого) нажмите на клавишу «Стоп». По времени  $t$ , в течение которого совершено  $N$  полных колебаний, определите период  $T=t/N$ .
3. Для определения периода колебаний физического маятника с помощью воротка 5 зафиксируйте верхний кронштейн так, чтобы стержень находился над фотоэлектрическим датчиком. Отклонив маятник на небольшой угол от положения равновесия, отпустите его и нажмите на клавишу «Сброс». После подсчета измерителем нескольких колебаний нажмите на клавишу «Стоп». Зная время  $t$  для  $N$  полных колебаний, определите период  $T=t/N$ .

Задание 1. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника постоянной длины

Таблица 1

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$T, c$							

Вычислите средние значения  $\langle T \rangle =$

$$и S_{\langle T \rangle} = \frac{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}{n-1} \quad \langle T^2 \rangle =$$

$$S_{\langle T \rangle} =$$

1. Подготовьте установку согласно пунктам 1, 2. Установите длину маятника по заданию преподавателя. Выполните 5 ÷ 7 измерений периода колебаний маятника. Результаты измерений запишите в табл. 1
2. По формуле (5) рассчитайте среднее значение:  $\langle g \rangle = (2\pi / \langle T \rangle)^2 \cdot \ell$ .
3. Рассчитайте среднеквадратичную погрешность:

$$S_{\langle g \rangle} = \langle g \rangle \cdot \sqrt{\left(2 \frac{S_{\langle T \rangle}}{\langle T \rangle}\right)^2 + \left(\frac{S_{\langle \ell \rangle}}{\langle \ell \rangle}\right)^2}, \text{ где}$$

среднеквадратичная погрешность отсчета длины маятника  $S_{\langle \ell \rangle} = 1 \text{ мм}$ .

4. Результат представьте в виде  $g = \langle g \rangle \pm t_{n-l, P} \cdot S_{\langle g \rangle}$ , где  $t_{n-l, P}$  коэффициент Стьюдента при  $P=0,9$ .

Задание 2. Определение ускорения свободного падения из зависимости

$$T^2 = f(\ell)$$

1. Установите максимальную длину маятника 50 см.
2. Укорачивая воротком 8 длину маятника в пределах 50÷35см, определите период колебаний маятника для каждой его длины. Результаты измерений запишите в табл. 2.

Таблица 2

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$\ell, \text{ м}$							
$T, \text{ с}$							
$T^2, \text{ с}^2$							

#### Обработка экспериментальных данных

1. Формулу (3) представим в виде уравнения прямой линии  $y = A + Bx$ :

$$T^2 = (4\pi^2 / g) \cdot \ell,$$

где  $y = T^2$ ;  $x = \ell$ ;  $B = 4\pi^2 / g$ . (8)

2. Постройте график зависимости  $T^2 = f(\ell)$ . Покажите этот график преподавателю и дальнейшую обработку экспериментальных данных проведите по его указанию.

#### А. Графический метод

1. Определите угловой коэффициент  $B$ .
2. По формуле (8) вычислите среднее значение:  $\langle g \rangle = 4\pi^2 / B$ .

## Б. Аналитический метод

1. Методом наименьших квадратов вычислите  $B$  и  $S_B$ .
2. По формуле (8) вычислите среднее значение:  $\langle g \rangle = 4\pi^2 / B$ .
3. Результат представьте в виде  $g = \langle g \rangle \pm \frac{S_B}{B} \cdot \langle g \rangle$ .

Задание 3. Определение ускорения свободного падения с помощью физического маятника постоянной длины

1. Измерьте длину стержня  $\ell$ . Закрепите маятник на вкладыше верхнего кронштейна и измерьте расстояние от оси качания маятника до его центра масс  $d = 10 \div 20$  см. Запишите  $\ell = \dots$ ,  $d = \dots$ .
2. Выполните  $5 \div 7$  измерений периода колебаний маятника. Результаты запишите в табл. 3.

Таблица 3

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$T, \text{с}$							

Вычислите средние значения  $\langle T \rangle =$

$$\text{и } S_{\langle T \rangle} = \sqrt{\frac{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}{n-1}} \quad \langle T^2 \rangle =$$

$$S_{\langle T \rangle} =$$

3. По формуле (7) рассчитайте среднее значение ускорения свободного падения:  $\langle g \rangle = \frac{4\pi^2(\ell^2 / 12 + d^2)}{d \cdot \langle T \rangle^2}$ .

4. Рассчитайте среднеквадратичную погрешность:

$$S_{\langle g \rangle} = \langle g \rangle \cdot \sqrt{\left(2 \frac{S_{\langle T \rangle}}{\langle T \rangle}\right)^2 + \left(\frac{S_{\langle \ell \rangle}}{\langle \ell \rangle}\right)^2}, \text{ где } S_{\langle \ell \rangle} = 1 \text{ мм.}$$

5. Результат представьте в виде  $g = \langle g \rangle \pm t_{n-1, P} \cdot S_{\langle g \rangle}$ , где  $t_{n-1, P}$  коэффициент Стьюдента при  $P=0,9$ .

Задание 4. Определение ускорения свободного падения из зависимости периода колебаний физического маятника от точки качания

1. Измерьте длину стержня  $\ell$ , закрепите его на вкладыше верхнего кронштейна и определите положение центра масс стержня.
2. Меняя точку подвеса ( $5 \div 7$  положений,  $d = 10 \div 22$  см) перемещением призмы к центру масс маятника, определите период колебаний

маятника для каждого расстояния  $d$  от точки подвеса до центра масс. Результаты всех измерений запишите в табл. 4.

Таблица 4

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$d, \text{м}$							
$d^2, \text{м}^2$							
$T, \text{с}$							
$T^2 d$							

### Обработка экспериментальных результатов

Формулу (7) представьте в виде уравнения прямой линии  $y=A+Bx$ :

$$T^2 d = \frac{\pi^2 \ell}{3g} + \frac{4\pi^2}{g} d^2,$$

где  $y = T^2 d$ ;  $x = d^2$ ;  $A = (\pi \ell)^2 / (3g)$ ;  $B = 4\pi^2 / g$ . (9)

Постройте график зависимости  $T^2 d$  от  $d^2$  и представьте его преподавателю, дальнейшую обработку экспериментальных данных проведите по его указанию.

#### А. Графический метод

1. Из графика определите угловой коэффициент  $B$ .
2. Определите ускорения свободного падения:  $\langle g \rangle = 4\pi^2 / B$ .

#### Б. Аналитический метод

1. Методом наименьших квадратов вычислите  $A$ ,  $B$  и  $S_B$ .
2. Определите ускорение свободного падения:  $\langle g \rangle = 4\pi^2 / B$ .
3. Результат представьте в виде  $g = \langle g \rangle \pm \frac{S_{\langle B \rangle}}{B} \langle g \rangle$ .
4. По значению  $A$  из (9) вычислите длину стержня:  $\langle \ell \rangle = 3Ag / \pi$ .

#### Контрольные вопросы

1. Что такое гармонические колебания? Составьте дифференциальные уравнения свободных колебаний, совершаемых математическим маятником, физическим маятником. Приведите их решения.
2. Что такое момент инерции тела? Как найти момент инерции однородного стержня? Сформулируйте теорему Штейнера.
3. Объясните методику определения ускорения свободного падения с помощью математического и физического маятников.