

## Лабораторная работа № 20

### Исследование собственных колебаний струны методом резонанса

Цель работы: изучение распространения волн в упругой среде, вынужденных колебаний струны и явления резонанса. Определение плотности струны и скорости распространения звуковых волн в струне.

#### Методика эксперимента

Рассмотрим, какие колебания возникают в натянутой между двумя точками  $A$  и  $B$  струне при действии в точке  $C$  силы  $F$  (рис.1), которая раскачивает струну в вертикальном направлении. Приложенная сила периодична и изменяется по закону

$$F = F_0 \sin 2\pi \nu t, \quad (1)$$

где  $F_0$  и  $\nu$ ,  $F_0$  и  $\nu$  – амплитуда и частота силы.

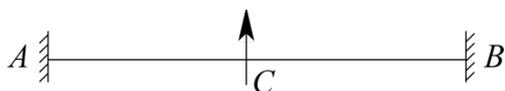


Рис. 1

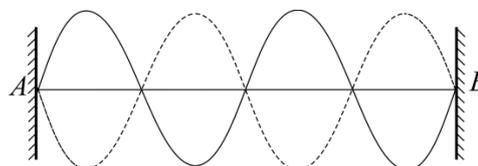


Рис. 2

Такая сила возбуждает поперечные волны, которые распространяются по струне до точек  $A$  и  $B$ , отражаются и, складываясь, друг с другом, создают сложную картину колебаний. Однако при некоторых частотах силы картина стабилизируется – в струне возбуждаются стоячие волны. Все точки стоячей волны колеблются с одинаковой фазой, но с различными амплитудами. Форма, которую приобретает струна, в любой момент времени представляет собой синусоиду (рис. 2), размах которой зависит от времени. В стоячей волне различают узлы колебаний – точки, в которых смещения отсутствуют, и пучности – точки, в которых амплитуда колебаний максимальна. Расстояние между соседними узлами или пучностями стоячей волны называют длиной стоячей волны. Длина стоячей волны равна половине бегущей:

$$\lambda_{cm} = \lambda / 2 \quad (2)$$

Так как точки закрепления струны являются узлами стоячих волн, то в струне возбуждаются колебания лишь таких частот, при которых на длине струны  $l$  укладывается целое число полуволен  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Это условие можно записать так:

$$l = k\lambda / 2 \quad (3)$$

Учитывая связь скорости распространения колебаний  $v$  с частотой и длиной волны  $\nu = v\lambda / 2$ , имеем:

$$\nu_k = \frac{kv}{2l}. \quad (4)$$

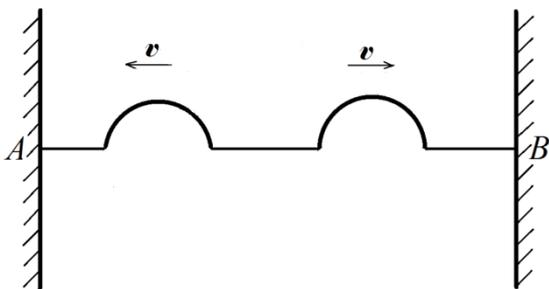


Рис. 3

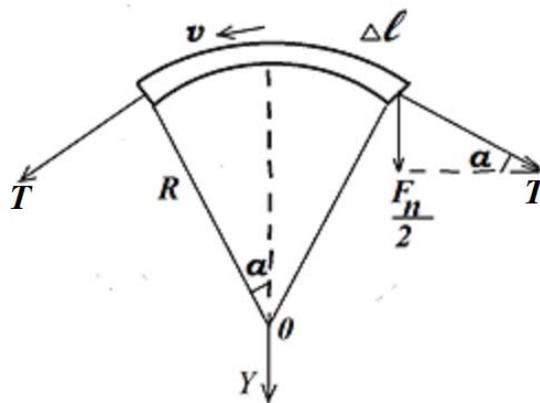


Рис. 4

Определим скорость распространения поперечных колебаний в струне.  
 Дано:  $\tilde{\rho}$ , кг/м - линейная плотность струны;  $T$  - сила натяжения.

На рисунке 3 представлены два поперечных возмущения. Правый горб перемещается со скоростью  $v$  к преграде "В", после отражения левый горб перемещается к преграде "А".

Рассмотрим правый горб. Перейдём в систему отсчета, связанную с горбом (рис. 4). В этой системе горб неподвижен, а струна движется со скоростью  $v$ . Рассмотрим участок горба, опирающийся на малый угол  $2\alpha$ . Этот участок движется с центростремительным ускорением под действием силы  $F_n = 2T \sin \alpha$ . Масса участка  $\Delta m = \tilde{\rho} \cdot \Delta l$ ,  $\Delta l = R \cdot 2\alpha$ ,  $\Delta m = \tilde{\rho} \cdot R \cdot 2\alpha$ .

Уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось  $Oy$ :  $F_n = \Delta m v^2 / R$ .  
 Для малых углов  $\alpha \rightarrow 0$  имеем  $\sin \alpha \approx \alpha$  (рад),  $\tilde{\rho} \cdot 2\alpha v^2 = 2T\alpha$ . Связь между линейной плотностью  $\tilde{\rho}$  и объемной плотностью  $\rho$ :  $\tilde{\rho} = \rho \cdot \pi d^2 / 4$ .

Тогда скорость распространения поперечных колебаний в струне

$$v = \sqrt{\frac{T}{\tilde{\rho}}} = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \quad (5)$$

где  $T$ ,  $d$ , и  $\rho$  - натяжение, диаметр и плотность (кг/м<sup>3</sup>) материала струны соответственно.

Подставляя значение скорости в формулу (4), получаем выражение для собственных частот колебаний струны:

$$v_k = \frac{k}{ld} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \quad (6)$$

Наименьшая собственная частота колебаний струны, определяемая по формуле (6)  $v_1 = \frac{1}{ld} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}}$ , называется основной частотой, или основным тоном.

Более высокие частоты, кратные  $v_1$ , называются обертонами или гармониками. Основная частота называется первой гармоникой, удвоенная основная частота или первый обертоном - второй гармоникой и так далее.

В работе собственные колебания струны исследуются методом резонанса. Явление резонанса заключается в следующем: если частота вынуждающей силы, становится равной одной из собственных частот струны, то в ней устанавливаются стоячие волны с максимальной амплитудой колебаний. При этом необходимо, чтобы участок приложения вынуждающей силы совпадал с одной из пучностей соответствующей стоячей волны.

### Описание установки

В схеме установки, представленной на рис. 5, струна 1 натянута на некоторой высоте между стойками подставки. Один конец закреплен неподвижно, а к другому концу, перекинутому через блок, прикреплена чашка 2 с грузами, с помощью которых в струне создается натяжение. Сила натяжения равна  $T = \sqrt{mg}$ .

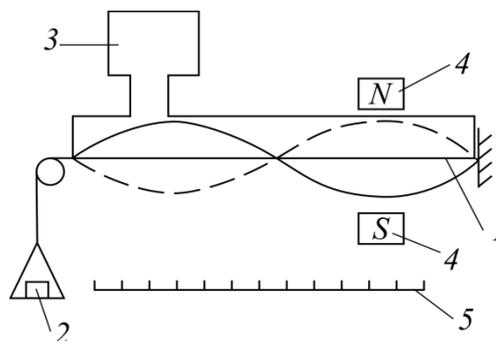


Рис. 5

В установку входит генератор электрических колебаний звуковой частоты 3 (ГЗ-33), обеспечивающий переменный ток в струне. С выхода генератора можно снимать переменное напряжение заданной частоты.

Вдоль струны по подставке, на которой она укреплена, свободно перемещается магнит 4. Струна проходит через зазор магнита. На участок струны  $\Delta l$  с текущим по нему переменным током  $I$ , в поле постоянного магнита действует сила Ампера, изменяющаяся по гармоническому закону  $F = IB\Delta l \sin 2\pi \nu t$ .

Частота изменения этой силы равна частоте, задаваемой генератором. Когда частота генератора будет совпадать с одной из собственных частот струны, наблюдается явление резонанса: в струне устанавливается стоячая волна. Масштабная линейка 5 предназначена для измерения длины стоячей волны.

### Порядок выполнения работы

1. Включите генератор звуковых частот (время прогрева прибора примерно 5 минут).
2. Создайте натяжение в струне, поместив на чашку 2 груз.
3. Измерьте длину струны.
4. Плавно изменяя частоту вращением лимба генератора, добейтесь устойчивых колебаний основного тона. Затем получите устойчивые колебания последующих обертонов.

**Частота колебаний струны тем выше, чем сильнее она натянута. Чем больше длина струны и её масса (или плотность), тем меньше частота.**

### ЗАДАНИЕ 1. Определение плотности материала струны

Определение плотности материала струны в данном задании проводится при фиксированных значениях длины  $l$  и диаметра  $d$  струны, натяжения струны и гармоника колебаний.

По указанию преподавателя запишите их значения

$$l = \dots, \text{ м}; d = \dots, \text{ м}, T = \dots, \text{ Н}, k = \dots$$

1. Создайте натяжение струны, поместив на чашку соответствующий груз.
2. Проведите 5–7 измерений этой частоты, повторяя действия по п.п. 1 и 2. Результаты измерений запишите в табл. 1.

Таблица 1

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$\nu_k, \text{ Гц}$							

Вычислите средние значения  $\langle \nu \rangle$  и среднюю квадратичную ошибку измерения частоты  $S_\nu$ .

$$S_{\langle \nu \rangle} = \sqrt{\frac{\langle \nu^2 \rangle - \langle \nu \rangle^2}{n-1}}$$

3. Рассчитайте среднюю плотность материала струны по формуле, полученной из (6).

4. Результат представьте в виде  $\rho = \langle \rho \rangle \pm t_{p=0,9, n-1} 2 \frac{S_\nu}{\langle \nu \rangle} \langle \rho \rangle$ , где  $t_{n-1, P}$  – коэффициент Стьюдента при  $P = 0,9$ .

Коэффициенты Стьюдента

$n$	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{p=0,9, n-1}$	2	1,94	1,9	1,86	1,83	1,81	1,8	1,78

### ЗАДАНИЕ 2. Определение плотности материала струны из зависимости частоты колебаний струны от натяжения $T$

Уравнение (6) представим в виде прямой линии

$$\nu_k = \frac{k}{ld\sqrt{\pi\rho}} \cdot \sqrt{T} \quad Y = BX \quad (7)$$

где  $Y = \nu_k$ ;  $X = \sqrt{T}$ ;  $B = \frac{k}{ld\sqrt{\pi\rho}}$  (8)

1. Проведите 5–7 измерений частоты  $\nu$  при различных натяжениях струны  $T = mg$  и фиксированных значениях  $l = \dots, \text{ м}$ ,  $d = \dots, \text{ м}$ ,  $k = \dots$  и заполните табл. 2.

Таблица 2

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$m$ , кг							
$\sqrt{T}$							
$\nu_k$ , Гц							

2. Постройте график зависимости  $\nu_k$  от  $\sqrt{T}$ , представьте его преподавателю. Обработку экспериментальных данных выполните по его указанию.

#### А. Графический метод

1. Из графика определите угловой коэффициент  $B$ .

2. Найдите среднюю плотность материала струны:  $\langle \rho \rangle = \frac{k^2}{\pi l^2 d^2 B^2}$

3. Определите среднюю квадратичную погрешность тангенса наклона

$$S_B = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sqrt{\frac{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2}{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} - B^2}$$

1. Результат представьте в виде:  $\rho = \langle \rho \rangle \pm t_{p=0.9, n-1} 2 \frac{S_B}{B} \langle \rho \rangle$

#### ПРИЛОЖЕНИЕ к заданию 2

1. Из  $B = \frac{k}{ld\sqrt{\pi\rho}}$  вычислите среднее значение диаметра струны

2. Результат представьте в виде  $d = \langle d \rangle \pm t_{p=0.9, n-1} \frac{S_B}{B} \langle d \rangle$ .

### **ЗАДАНИЕ 3. Определение плотности материала струны при фиксированном натяжении**

Определение плотности материала струны в данном задании проводится при фиксированных значениях длины  $l$  и диаметра  $d$  струны, натяжения струны  $T$  и ряда гармоник колебаний  $k$ . Запишите значения  $l = \dots$ , м;  $d = \dots$ , м;  $T = \dots$ , Н. Уравнение (6) представим в виде прямой линии  $Y = A + BX$

$$\nu_k = \frac{1}{ld} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} k \quad (9)$$

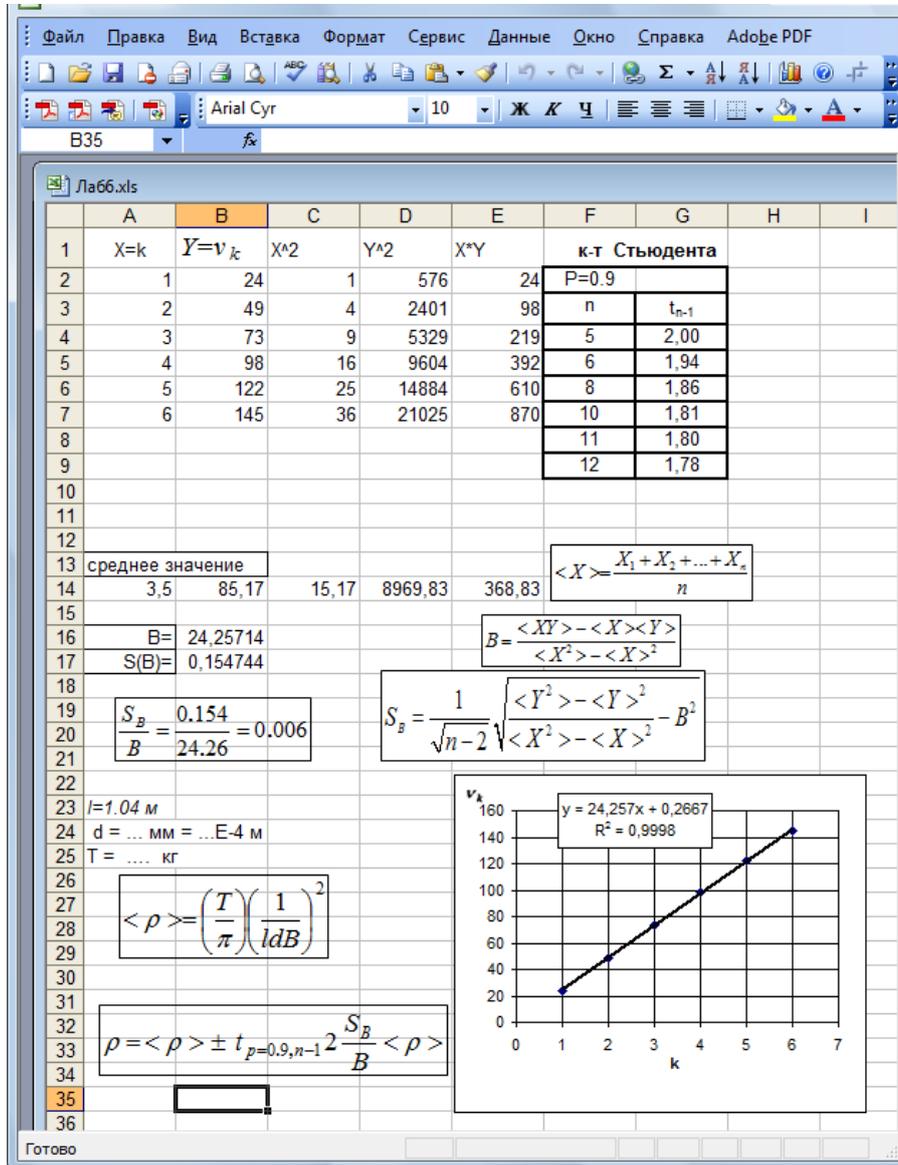
где  $Y = \nu_k$ ;  $X = k$ ;  $B = \frac{1}{ld} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}}$  (10)

1. Создайте натяжение струны, поместив на чашку соответствующий груз.
2. Затем проведите 4–6 измерений частоты, повторяя действия по п. 2 для гармоник  $k+1$ ,  $k+2$ . Результаты измерений запишите в табл. 3.

Таблица 3

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$k$							
$v_k, \text{Гц}$							

3. В программе **Excel** постройте график зависимости  $v_k$  от  $k$ . Из графика определите угловой коэффициент  $B$ .



1. Из (10) найдите среднюю плотность материала струны  $\langle \rho \rangle = \left( \frac{T}{\pi} \right) \left( \frac{1}{ldB} \right)^2$ .

2. Определите погрешность среднеквадратичного отклонения величины  $B$  по формуле:

$$S_B = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sqrt{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2 - B^2 \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$$

Результат представьте в виде:  $\rho = \langle \rho \rangle \pm t_{p=0,9,n-1} 2 \frac{S_B}{B} \langle \rho \rangle$

## Контрольные вопросы

1. Уравнение бегущей волны в упругой среде. Амплитуда, частота, колебаний, фаза волны, длина волны. Связь между частотой колебаний, длиной волны и скоростью распространения.
2. Образование стоячих волн. Уравнение стоячей волны, узлы и пучности стоячей волны. Каковы отличительные особенности стоячей волны?
3. Как определить экспериментально частоту основного тона и обертонов? От каких параметров они зависят?
4. По формуле (5) вычислите скорость распространения поперечных колебаний (звуковых волн) в материале струны. Полученное значение сравните с

$$v = v_k \frac{2l}{k}.$$