

Лабораторная работа № 20

Исследование собственных колебаний струны методом резонанса

Цель работы: изучение распространения волн в упругой среде, вынужденных колебаний струны и явления резонанса. Определение плотности струны и скорости распространения звуковых волн в струне.

Методика эксперимента

Рассмотрим, какие колебания возникают в натянутой между двумя точками A и B струне при действии в точке C силы F (рис.1), которая раскачивает струну в вертикальном направлении. Приложенная сила периодична и изменяется по закону

$$F = F_0 \sin 2\pi \nu t, \quad (1)$$

где F_0 и ν , F_0 и ν – амплитуда и частота силы.

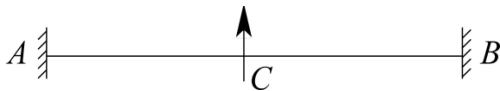


Рис. 1

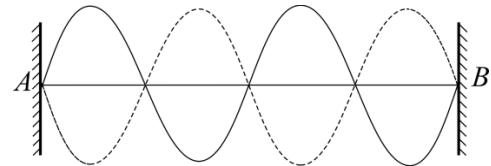


Рис. 2

Такая сила возбуждает поперечные волны, которые распространяются по струне до точек A и B , отражаются и, складываясь, друг с другом, создают сложную картину колебаний. Однако при некоторых частотах силы картина стабилизируется – в струне возбуждаются стоячие волны. Все точки стоячей волны колеблются с одинаковой фазой, но с различными амплитудами. Форма, которую приобретает струна, в любой момент времени представляет собой синусоиду (рис. 2), размах которой зависит от времени. В стоячей волне различают узлы колебаний – точки, в которых смещения отсутствуют, и пучности – точки, в которых амплитуда колебаний максимальна. Расстояние между соседними узлами или пучностями стоячей волны называют длиной стоячей волны. Длина стоячей волны равна половине бегущей:

$$\lambda_{cm} = \lambda / 2 \quad (2)$$

Так как точки закрепления струны являются узлами стоячих волн, то в струне возбуждаются колебания лишь таких частот, при которых на длине струны l укладывается целое число полуволен $k = 1, 2, 3, \dots$. Это условие можно записать так:

$$l = k\lambda / 2 \quad (3)$$

Учитывая связь скорости распространения колебаний v с частотой и длиной волны $\nu = v\lambda / 2$, имеем:

$$\nu_k = \frac{kv}{2l}. \quad (4)$$

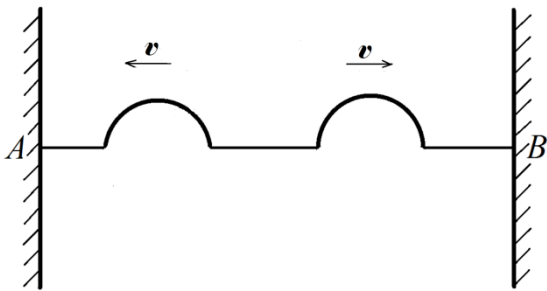


Рис. 3

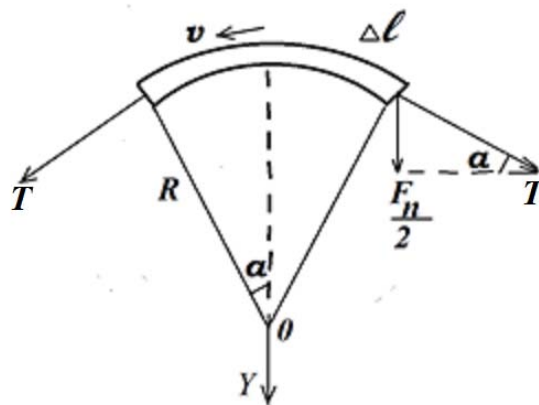


Рис. 4

Определим скорость распространения поперечных колебаний в струне.
 Дано: $\tilde{\rho}$, кг/м - линейная плотность струны; T - сила натяжения.

На рисунке 3 представлены два поперечных возмущения. Правый горб перемещается со скоростью v к преграде "В", после отражения левый горб перемещается к преграде "А".

Рассмотрим правый горб. Перейдём в систему отсчета, связанную с горбом (рис. 4). В этой системе горб неподвижен, а струна движется со скоростью v . Рассмотрим участок горба, опирающийся на малый угол 2α . Этот участок движется с центростремительным ускорением под действием силы $F_n = 2T \sin \alpha$. Масса участка $\Delta m = \tilde{\rho} \cdot \Delta l$, $\Delta l = R \cdot 2\alpha$, $\Delta m = \tilde{\rho} \cdot R \cdot 2\alpha$.

Уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось Oy : $F_n = \Delta m v^2 / R$.
 Для малых углов $\alpha \rightarrow 0$ имеем $\sin \alpha \approx \alpha$ (рад), $\tilde{\rho} \cdot 2\alpha v^2 = 2T\alpha$. Связь между линейной плотностью $\tilde{\rho}$ и объемной плотностью ρ : $\tilde{\rho} = \rho \cdot \pi d^2 / 4$.

Тогда скорость распространения поперечных колебаний в струне

$$v = \sqrt{\frac{T}{\tilde{\rho}}} = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \quad (5)$$

где T , d , и ρ - натяжение, диаметр и плотность (кг/м³) материала струны соответственно.

Подставляя значение скорости в формулу (4), получаем выражение для собственных частот колебаний струны:

$$v_k = \frac{k}{ld} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \quad (6)$$

Наименьшая собственная частота колебаний струны, определяемая по формуле (6) $v_1 = \frac{1}{ld} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}}$, называется основной частотой, или основным тоном.

Более высокие частоты, кратные v_1 , называются обертонами или гармониками. Основная частота называется первой гармоникой, удвоенная основная частота или первый обертоном - второй гармоникой и так далее.

В работе собственные колебания струны исследуются методом резонанса. Явление резонанса заключается в следующем: если частота вынуждающей силы, становится равной одной из собственных частот струны, то в ней устанавливаются стоячие волны с максимальной амплитудой колебаний. При этом необходимо, чтобы участок приложения вынуждающей силы совпадал с одной из пучностей соответствующей стоячей волны.

Описание установки

В схеме установки, представленной на рис. 5, струна 1 натянута на некоторой высоте между стойками подставки. Один конец закреплен неподвижно, а к другому концу, перекинутому через блок, прикреплена чашка 2 с грузами, с помощью которых в струне создается натяжение. Сила натяжения равна $T = \sqrt{mg}$.

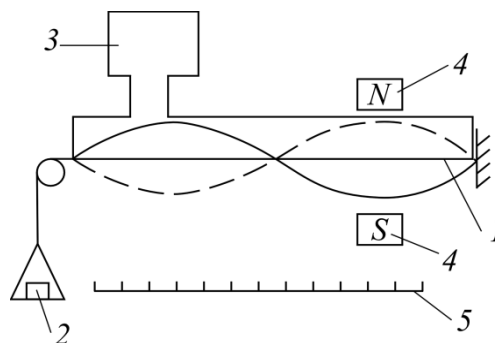


Рис. 5

В установку входит генератор электрических колебаний звуковой частоты 3 (ГЗ-33), обеспечивающий переменный ток в струне. С выхода генератора можно снимать переменное напряжение заданной частоты.

Вдоль струны по подставке, на которой она укреплена, свободно перемещается магнит 4. Струна проходит через зазор магнита. На участок струны Δl с текущим по нему переменным током I , в поле постоянного магнита действует сила Ампера, изменяющаяся по гармоническому закону $F = IB\Delta l \sin 2\pi \nu t$.

Частота изменения этой силы равна частоте, задаваемой генератором. Когда частота генератора будет совпадать с одной из собственных частот струны, наблюдается явление резонанса: в струне устанавливается стоячая волна. Масштабная линейка 5 предназначена для измерения длины стоячей волны.

Порядок выполнения работы

1. Включите генератор звуковых частот (время прогрева прибора примерно 5 минут).
2. Создайте натяжение в струне, поместив на чашку 2 груз.
3. Измерьте длину струны.
4. Плавно изменяя частоту вращением лимба генератора, добейтесь устойчивых колебаний основного тона. Затем получите устойчивые колебания последующих обертонов.

Частота колебаний струны тем выше, чем сильнее она натянута. Чем больше длина струны и её масса (или плотность), тем меньше частота.

ЗАДАНИЕ 1. Определение плотности материала струны

Определение плотности материала струны в данном задании проводится при фиксированных значениях длины l и диаметра d струны, натяжения струны и гармоника колебаний.

По указанию преподавателя запишите их значения

$$l = \dots, \text{ м}; d = \dots, \text{ м}, T = \dots, \text{ Н}, k = \dots$$

1. Создайте натяжение струны, поместив на чашку соответствующий груз.
2. Проведите 5–7 измерений этой частоты, повторяя действия по п.п. 1 и 2. Результаты измерений запишите в табл. 1.

Таблица 1

k	1	2	3	4	5	6	7
$\nu_k, \text{ Гц}$							

Вычислите средние значения $\langle \nu \rangle$ и среднюю квадратичную ошибку измерения частоты S_ν .

$$S_{\langle \nu \rangle} = \sqrt{\frac{\langle \nu^2 \rangle - \langle \nu \rangle^2}{n-1}}$$

3. Рассчитайте среднюю плотность материала струны по формуле, полученной из (6).

4. Результат представьте в виде $\rho = \langle \rho \rangle \pm t_{p=0,9, n-1} 2 \frac{S_\nu}{\langle \nu \rangle} \langle \rho \rangle$, где $t_{n-1, P}$ – коэффициент Стьюдента при $P = 0,9$.

Коэффициенты Стьюдента

n	5	6	7	8	9	10	11	12
$t_{p=0,9, n-1}$	2	1,94	1,9	1,86	1,83	1,81	1,8	1,78

ЗАДАНИЕ 2. Определение плотности материала струны из зависимости частоты колебаний струны от натяжения T

Уравнение (6) представим в виде прямой линии

$$\nu_k = \frac{k}{ld\sqrt{\pi\rho}} \cdot \sqrt{T} \quad Y = BX \quad (7)$$

где $Y = \nu_k$; $X = \sqrt{T}$; $B = \frac{k}{ld\sqrt{\pi\rho}}$ (8)

1. Проведите 5–7 измерений частоты ν при различных натяжениях струны $T = mg$ и фиксированных значениях $l = \dots, \text{ м}$, $d = \dots, \text{ м}$, $k = \dots$ и заполните табл. 2.

Таблица 2

i	1	2	3	4	5	6	7
m , кг							
\sqrt{T}							
ν_k , Гц							

2. Постройте график зависимости ν_k от \sqrt{T} , представьте его преподавателю. Обработку экспериментальных данных выполните по его указанию.

А. Графический метод

1. Из графика определите угловой коэффициент B .

2. Найдите среднюю плотность материала струны: $\langle \rho \rangle = \frac{k^2}{\pi l^2 d^2 B^2}$

3. Определите среднюю квадратичную погрешность тангенса наклона

$$S_B = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sqrt{\frac{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2}{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} - B^2}$$

1. Результат представьте в виде: $\rho = \langle \rho \rangle \pm t_{p=0.9, n-1} 2 \frac{S_B}{B} \langle \rho \rangle$

ПРИЛОЖЕНИЕ к заданию 2

1. Из $B = \frac{k}{ld\sqrt{\pi\rho}}$ вычислите среднее значение диаметра струны

2. Результат представьте в виде $d = \langle d \rangle \pm t_{p=0.9, n-1} \frac{S_B}{B} \langle d \rangle$.

ЗАДАНИЕ 3. Определение плотности материала струны при фиксированном натяжении

Определение плотности материала струны в данном задании проводится при фиксированных значениях длины l и диаметра d струны, натяжения струны T и ряда гармоник колебаний k . Запишите значения $l = \dots$, м; $d = \dots$, м; $T = \dots$, Н. Уравнение (6) представим в виде прямой линии $Y = A + BX$

$$\nu_k = \frac{1}{ld} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} k \quad (9)$$

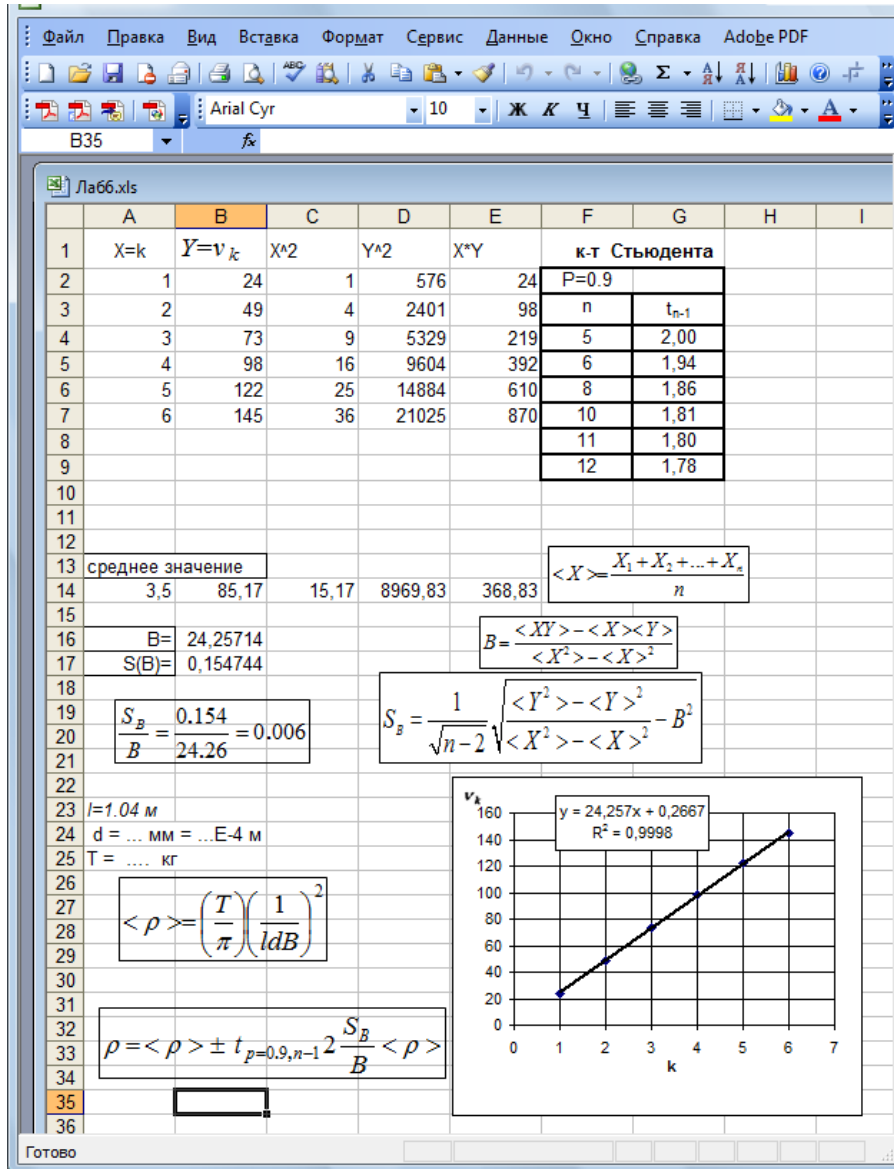
где $Y = \nu_k$; $X = k$; $B = \frac{1}{ld} \sqrt{\frac{T}{\pi\rho}}$ (10)

1. Создайте натяжение струны, поместив на чашку соответствующий груз.
2. Затем проведите 4–6 измерений частоты, повторяя действия по п. 2 для гармоник $k+1$, $k+2$. Результаты измерений запишите в табл. 3.

Таблица 3

i	1	2	3	4	5	6	7
k							
$v_k, \text{Гц}$							

3. В программе **Excel** постройте график зависимости v_k от k . Из графика определите угловой коэффициент B .



1. Из (10) найдите среднюю плотность материала струны $\langle \rho \rangle = \left(\frac{T}{\pi} \right) \left(\frac{1}{ldB} \right)^2$.

2. Определите погрешность среднеквадратичного отклонения величины B по формуле:

$$S_B = \frac{1}{\sqrt{n-2}} \sqrt{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2 - B^2 \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$$

Результат представьте в виде: $\rho = \langle \rho \rangle \pm t_{p=0,9,n-1} 2 \frac{S_B}{B} \langle \rho \rangle$

Контрольные вопросы

1. Уравнение бегущей волны в упругой среде. Амплитуда, частота, колебаний, фаза волны, длина волны. Связь между частотой колебаний, длиной волны и скоростью распространения.
2. Образование стоячих волн. Уравнение стоячей волны, узлы и пучности стоячей волны. Каковы отличительные особенности стоячей волны?
3. Как определить экспериментально частоту основного тона и обертонов? От каких параметров они зависят?
4. По формуле (5) вычислите скорость распространения поперечных колебаний (звуковых волн) в материале струны. Полученное значение сравните с

$$v = v_k \frac{2l}{k}.$$