

Лабораторная работа № 05

Крутильный маятник

Цель работы: определение моментов инерции крутильного маятника, твердых тел различной формы и проверка теоремы Штейнера.

Методика эксперимента

Крутильный маятник – массивное твердое тело, подвешенное на тонкой упругой нити. Крутильный маятник, используемый в данной работе представлен на рис. 1. Он состоит из рамки, подвешенной на стальной вертикально натянутой проволоке. При повороте маятника из положения равновесия на малый угол φ ($\sin \varphi \approx \varphi$) на него со стороны нити действует “упругий” момент силы:

$$M = -D \cdot \varphi, \quad (1)$$

где D – постоянная, называемая модулем кручения.

Согласно закону динамики для вращательного движения

$$M = I_p \cdot \varepsilon, \quad (2)$$

где I_p – момент инерции маятника (рамки) относительно оси вращения, $\varepsilon = d^2 \varphi / dt^2$ – её угловое ускорение.

Из (1) и (2) получим уравнение для крутильных колебаний

$$d^2 \varphi / dt^2 + \omega_o^2 \varphi = 0, \quad (3)$$

где $\omega_o = \sqrt{D / I_p}$ – собственная циклическая частота колебаний рамки. Период колебаний рамки:

$$T_p = 2\pi \sqrt{I_p / D}. \quad (4)$$

Если исследуемое тело закрепить в рамке маятника и вывести его из положения равновесия, то он будет совершать колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{(I_p + I_m) / D}, \quad (5)$$

где I_m – момент инерции тела относительно оси вращения.

Из уравнений (4) и (5) имеем

$$I_p = \frac{I_m}{\left(T / T_p\right)^2 - 1}. \quad (6)$$

Уравнение (6) определяет соотношение между моментами инерций рамки и исследуемого тела относительно оси вращения.

Если исследуемое тело закреплено на некотором расстоянии от оси вращения, то его момент инерции следует вычислять по теореме Штейнера:

$$I_T = I_{T0} + md^2, \quad (7)$$

где I_{T0} – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела и параллельной оси вращения;

d – расстояние между этими осями.

Описание установки

Схема экспериментальной установки представлена на рис.1:

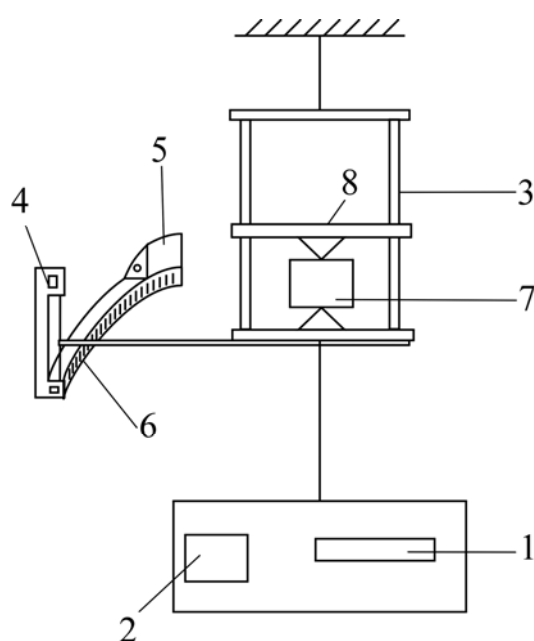


Рис. 1

1 – миллисекундомер, 2 – счетчик числа колебаний, 3 – рамка маятника, 4 – фотоэлектрический датчик, 5 – электромагнит, 6 – шкала.

В рамке 3 исследуемое тело 7 закрепляют при помощи подвижной балки 8, которая перемещается по направляющим стержням между неподвижными балками. Балка 8 устанавливается путем затягивания гаек на зажимных втулках, помещенных на подвижной балке. Стальная плита служит основанием фотоэлектрическому датчику 4, электромагниту 5 и шкале 6. Положение электромагнита можно изменять на плите относительно

фотоэлектрического датчика.

Порядок выполнения работы

1. Включите установку в сеть и нажмите по очереди клавиши “Сеть” и ”Сброс”. Отклоните рамку маятника так, чтобы её стрела приблизилась к электромагниту, который зафиксирует рамку в заданном положении.
2. Для определения периода колебаний маятника нажмите клавишу “Пуск”. Если измерение времени колебаний t проводите для $N=10$ колебаний, то клавишу “Стоп” нажмите при высвечивании на индикаторе цифры 9. Период колебаний равен: $T = t/N$.

Задание 1. Определение момента инерции крутильного маятника с помощью эталонного тела

1. Проведите 5 ÷ 7 измерений периода колебаний рамки T_p в соответствии с порядком выполнения работы. Данные запишите в табл. 1.
2. Эталонное тело закрепите в центре рамки маятника. Проведите 5 ÷ 7 измерений периода колебаний маятника T . Данные запишите в табл.1.

3. По (6) рассчитайте момент инерции рамки $\langle I_p \rangle = \frac{I_m}{(\langle T \rangle / \langle T_p \rangle)^2 - 1}$. Момент инерции эталонного куба $I_m = ma^2/6$, где $m=0,9595$ кг, $a=0,0253$ м.

Таблица 1

i	1	2	3	4	5	6	7
$T_p, \text{с}$							
$T, \text{с}$							

Вычислите средние значения $\langle T \rangle =$ $\langle T_p \rangle =$

и $S_{\langle T \rangle} = \sqrt{\frac{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}{n-1}}$ $\langle T^2 \rangle =$ $\langle T_p^2 \rangle =$
 $S_{\langle T_p \rangle} =$

4. Рассчитайте погрешности измеряемых величин. Для оценки погрешности определения момента инерции рамки I_p упростим формулу (6), пренебрегая единицей в знаменателе. В проводимых экспериментах $T \geq 2T_p$, и данное упрощение завысит численное значение относительной ошибки не более чем на 25%. Так как измерения независимы, то

$$S_{\langle I_p \rangle} = 2\langle I_p \rangle \sqrt{(S_{\langle T \rangle} / \langle T \rangle)^2 + (S_{\langle T_p \rangle} / \langle T_p \rangle)^2}.$$

5. Окончательный результат представьте в виде $I_p = \langle I_p \rangle \pm t_{n-1,P} \cdot S_{\langle I_p \rangle}$.

Коэффициент Стьюдента $t_{n-1,P}$ возьмите при $P=0,9$.

Задание 2. Определение момента инерции рамки из зависимости $(T_i/T_p)^2$ от I_i

Уравнение (6) представим в виде уравнения прямой $y=A+Bx$:

$$(T_i/T_p)^2 = 1 + (1/I_p) \cdot I_i, \quad (8)$$

где $y=(T_i/T_p)^2$; $x=I_i$; $A=1$; $B=1/I_p$. (9)

1. Определите период колебаний рамки T_p .
2. Эталонное тело, момент инерции которого известен, закрепите в центре рамки маятника. Определите период колебания маятника и запишите в табл. 2.
3. Аналогичные измерения проведите для нескольких различных тел, моменты инерций которых известны. Данные запишите в табл. 2.

$T_p = \dots \text{с}$

Таблица 2

i	1	2	3	4	5	6	7
$x=I_i$							
$T_i, \text{с}$							
$y=(T_i/T_p)^2$							

4. Постройте график зависимости $(T_i/T_p)^2$ от I_i . Покажите график преподавателю, дальнейшую обработку результатов проведите по указанию преподавателя.

А. Графический метод

Из графика определите угловой коэффициент B .

1. Рассчитайте по (9) среднее значение момента инерции $\langle I_p \rangle = 1/B$.

Б. Аналитический метод

1. Методом наименьших квадратов рассчитайте B и S_B .
2. Рассчитайте по (9) среднее значение момента инерции $\langle I_p \rangle = 1/B$.

3. Результат представьте в виде

$$I_p = \langle I_p \rangle \pm t_{p=0.9, n-1} \frac{S_B}{B} \langle I_p \rangle, \text{ где } t_{0.9, n-1} \text{ — к-т Стьюдента}$$

Коэф. Стьюдента $\alpha=0.9$	
n	t_{n-1}
5	2,00
6	1,94
8	1,86
10	1,81
11	1,80
12	1,78

Задание 3. Проверка теоремы Штейнера на крутильном маятнике

Для проверки теоремы Штейнера возьмите два цилиндра одинаковой массы и размеров: $m = \dots$ кг, $r = \dots$ м.

1. Установите эти цилиндры по оси вращения в рамку крутильного маятника (рис. 2) и определите период колебаний маятника T_c . Данные запишите в табл. 3.

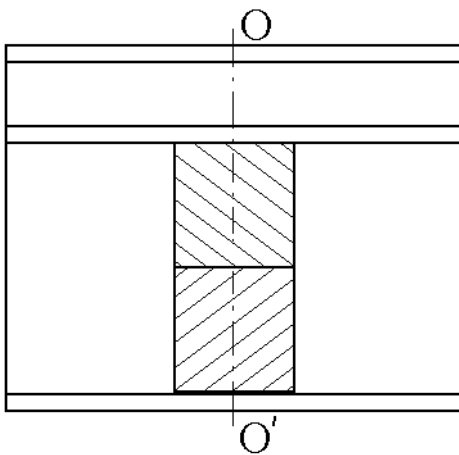


Рис.2

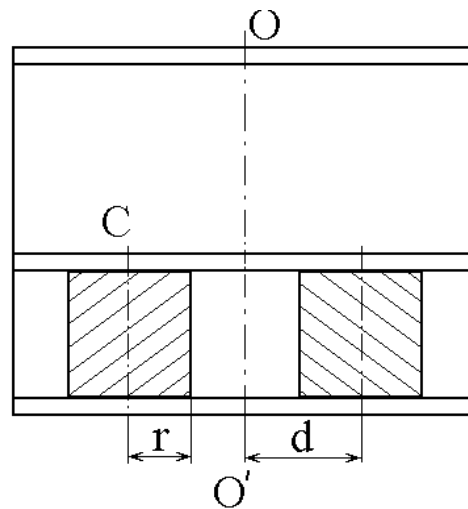


Рис.3

$T_c, \text{с}$							
i	1	2	3	4	5	6	7
$d_i, \text{м}$							
$T_i, \text{с}$							
$y = (T_i/T_c)^2$							
$x = d_i^2$							

2. Затем установите эти цилиндры симметрично относительно оси вращения на некотором расстоянии d (рис. 3). Определите период колебаний маятника при $5 \div 7$ значениях d . Данные запишите в табл. 3.

Обработка экспериментальных данных

Согласно (5) период колебаний T_i рамки с двумя цилиндрами с учетом (7)

$$T_i = 2\pi\sqrt{(I_p + 2mr^2/2 + 2md_i^2)/D}, \quad (9)$$

а

$$T_c = 2\pi\sqrt{(I_p + 2(1/2)mr^2)/D}. \quad (10)$$

Из уравнений (9) и (10) имеем:

$$(T_i/T_c)^2 = 1 + \frac{2m}{I_p + mr^2} \cdot d_i^2. \quad (11)$$

Уравнение (11) – это уравнение прямой линии $y=A+Bx$,

где $y = (T_i/T_c)^2$; $x = d_i^2$; $A = 1$; $B = \frac{2m}{I_p + mr^2}$. (12)

Постройте график зависимости $(T_i/T_c)^2$ от d_i^2 и покажите его преподавателю. Дальнейшую обработку данных проведите по указанию преподавателя.

А. Графический метод

1. Из графика определите угловой коэффициент B .
2. Вычислите из (12) $\langle I_p \rangle = m(\frac{2}{B} - r^2)$.
3. Из графика определите A и сравните с его значением по (12).

Б. Аналитический метод

1. Методом наименьших квадратов рассчитайте A , B и S_B .
2. По формуле (12) определите $\langle I_p \rangle = m(\frac{2}{B} - r^2)$.
3. Результат представьте в виде $I_p = \langle I_p \rangle \pm \frac{S_B}{B} \langle I_p \rangle$.
4. Вычисленное значение A сравните с его значением по (12).

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются крутильными? Выведите дифференциальное уравнение гармонических крутильных колебаний.
2. Дайте определение момента инерции твердого тела относительно оси вращения. Сформулируйте теорему Штейнера.