Министерство образования и науки Российской Федерации

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЛЕСА

Полещук О.М.

Преобразования

Методическое пособие для студентов первого курса

Издательство Московского государственного университета леса

Москва-2015

—

Полещук О. М. Преобразования. Методическое пособие для студентов первого курса. — М.: МГУЛ, — 24 с.

Одобрено и рекомендовано к изданию в качестве методического пособия редакционно-издательским советом университета

Кафедра высшей математики

Составители: Ольга Митрофановна Полещук, профессор

Подписано к печати Тираж 500 экз.
Объем 0,3 п.л. Заказ №

Издательство Московского государственного университета леса.
141005. Мытищи-5, Московская обл., 1-я Институтская , 1, МГУЛ.
Телефон: (095) 588 –57–62

—

Преобразования степенных и иррациональных выражений

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ФОРМУЛЫ

1. ***Арифметические корни***. Пусть n – натуральное число. Тогда *арифметическим корнем n-й степени* из данного числа $a \geq 0$ называется число $x \geq 0$ такое, что $x^n = a$.

Обозначение $x = \sqrt[n]{a}$. В случае $n = 2$ пишут $\sqrt{a}$.

При любом x и любом натуральном n справедливы равенства

$$\sqrt[2n+1]{-x} = -\sqrt[2n+1]{x}, \quad \sqrt[2n]{x^{2n}} = |x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geq 0; \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Если m – целое, n – натуральное, то для любого $a > 0$ справедливо

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Для любых натуральных m и n и любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ справедливы следующие равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (\text{при } b \neq 0); \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}.$$

Если $0 \leq a \leq b$, то $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}.$

2. ***Степени***. Выражение a^x (степень числа a с показателем степени x) определено для любого $a > 0$ (основание степени) и любого действительного x (показатель степени).

Для любых действительных x и y и любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ справедливы следующие равенства:

$$a^0 = 1; \quad a^1 = a; \quad 1^x = 1; \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y};$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \quad \left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x = a^{xy}; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Для любых действительных x и y и $x < y$ справедливы неравенства:

$$a^x < a^y \text{ при } a > 1,$$

$$a^x > a^y \text{ при } 0 < a < 1.$$

Пример 1. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{81} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{24}$.

1) $14\sqrt[3]{3}$; 2) $3\sqrt[3]{3}$; 3) $-11\sqrt[3]{3}$; 4) -11.

Решение: Учитывая, что 81 = 27·3, а 24 = 8·3, и используя формулу $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, получим:

$$\sqrt[3]{81}-\sqrt{49}\cdot\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt{49}\cdot\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-7\cdot 2\sqrt[3]{3}=$$
$$=3\sqrt[3]{3}-14\sqrt[3]{3}=-11\sqrt[3]{3}.$$

Такой ответ среди приведенных ответов стоит под номером 3.

Ответ: 3.

Пример 2. Упростите выражение $\sqrt{125}\cdot\sqrt[5]{32}-5^{0,5}$.

1) $9\sqrt{5}$; 2) $10\sqrt{10}-\sqrt{5}$; 3) $11\sqrt{5}$; 4) 9.

Решение: $\sqrt{125}\cdot\sqrt[5]{32}-5^{0,5}=\sqrt{25\cdot 5}\cdot\sqrt[5]{32}-\sqrt{5}=5\sqrt{5}\cdot 2-\sqrt{5}=10\sqrt{5}-$
$-\sqrt{5}=9\sqrt{5}$.

Ответ: **1.**

Пример 3. Выполните действия $\left(a^{0,75}\right)^2\cdot\sqrt[3]{a^2}$.

1) a; 2) $a^{\frac{13}{6}}$; 3) a^3; 4) $a^{\frac{9}{4}}$.

Решение: Используя определение степени с дробным показателем: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$, где $m\in Z, n\in Z, a>0$, а также свойства степеней $\left(a^p\right)^q=a^{pq}$; $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$, получаем:

$$\left(a^{0,75}\right)^2\cdot\sqrt[3]{a^2}=a^{0,75\cdot 2}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{1,5}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{2}}a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}=a^{\frac{13}{6}}.$$

Ответ: **2.**

Пример 4. Выполните действия: $\left(x^4\right)^{\frac{5}{8}}\cdot x^{\frac{-4}{3}}$.

1) $x^{\frac{7}{8}}$; 2) $x^{\frac{23}{6}}$; 3) $x^{\frac{15}{8}}$; 4) $x^{\frac{7}{6}}$.

Решение: $\left(x^4\right)^{\frac{5}{8}}\cdot x^{\frac{-4}{3}}=\dfrac{x^{\frac{4\cdot 5}{8}}}{x^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{4}{3}}}=x^{\frac{5}{2}-\frac{4}{3}}=x^{\frac{7}{6}}$.

—

Ответ: **4.**

Пример 5. Упростите выражение $-1+\dfrac{1-\sqrt[4]{x^2}}{1-\sqrt[4]{x}}$.

1) $-\sqrt[4]{x}$;   2) 0;   3) $\sqrt[4]{x}-1$;   4) $\sqrt[4]{x}$.

Решение: $-1+\dfrac{1-\sqrt[4]{x^2}}{1-\sqrt[4]{x}}=-1+\dfrac{(1-\sqrt[4]{x})(1+\sqrt[4]{x})}{1-\sqrt[4]{x}}=-1+1+\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{x}.$

Ответ: 4.

Пример 6. Упростите выражение $-2\sqrt[4]{n}-\dfrac{n^{\frac{1}{2}}-m^{0,5}}{m^{0,25}-n^{\frac{1}{4}}}$.

1) $\sqrt[4]{m}+3\sqrt[4]{n}$;   2) $\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}$;   3) $\sqrt{m}-\sqrt{n}$;   4) $\sqrt[4]{m}-3\sqrt[4]{n}$.

Решение:

$$-2\sqrt[4]{n}-\frac{n^{\frac{1}{2}}-m^{0,5}}{m^{0,25}-n^{\frac{1}{4}}}=-2\sqrt[4]{n}+\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}=-2\sqrt[4]{n}+\frac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})}{\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}}=$$

$$=-2\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}=\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}.$$

Ответ: 2.

Пример 7. Упростите выражение $-\sqrt{x}-\dfrac{27+x^{1,5}}{x-3x^{0,5}+9}$.

1) –3;   2) 3+x;   3) 3–x;   4) 3.

Решение: $-\sqrt{x}-\dfrac{27+x^{1,5}}{x-3x^{0,5}+9}=-x^{0,5}-\dfrac{3^3+(x^{0,5})^3}{(x^{0,5})^2-3x^{0,5}+9}=$

$$=-x^{0,5}-\frac{(3+x^{0,5})((x^{0,5})^2-3x^{0,5}+9)}{(x^{0,5})^2-3x^{0,5}+9}=-x^{0,5}-3-x^{0,5}=-3$$

Ответ: 1.

Пример 8. Упростите выражение $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$.

1) -3; 2) $3+x$; 3) $3-x$; 4) 3.

Решение:

$$\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3}{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}=$$

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)}{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}=$$

$$=\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^2-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+\left(b^{\frac{1}{6}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)^2.$$

Ответ: 1.

Пример 9. Найдите значение выражения $\frac{4y^{0,5}}{y-16}+\frac{y^{0,5}}{y^{0,5}+4}$ при $y = 18$.

1) -1; 2) $4+3\sqrt{2}$; 3) $9(4+3\sqrt{2})$; 4) 9.

Решение: $\frac{4y^{0,5}}{y-16}+\frac{y^{0,5}}{y^{0,5}+4}=\frac{4y^{0,5}}{(y^{0,5}+4)(y^{0,5}-4)}+\frac{y^{0,5}}{y^{0,5}+4}=$

$$=\frac{4y^{0,5}+y^{0,5}(y^{0,5}-4)}{(y^{0,5}+4)(y^{0,5}-4)}=\frac{4y^{0,5}+y-4y^{0,5}}{y-16}=\frac{y}{y-16}.$$

Подставив значение $y = 18$, получим результат вычислений $18/2 = 9$.

Ответ: 4.

Преобразования тригонометрических выражений

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ФОРМУЛЫ

1. Функции синус, косинус, тангенс, котангенс называются *основными тригонометрическими функциями*. При этом по определению синусом угла α называется ордината точки *M* на тригонометрическом круге (см. рис. 1), получающейся поворотом точки $M_0(1;0)$ на угол α радиан вокруг начала координат. Аналогично, косинусом угла α называется абсцисса точки *M*. Кроме того,

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \text{при } \alpha \neq \pi n,\ n \in Z.$$

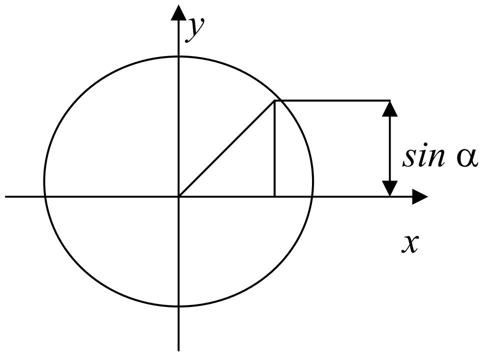

Рис. 1.

Из определения вытекает, что $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ при $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

2. Полезно запомнить таблицу значений тригонометрических функций углов в 30°(или π /6 радиан), 45°(π/4 рад.), 60°(π/3 рад.).

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0° (0 радиан)	0	1	0	∞
30°(π/6)	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
60°(π/3)	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
45°(π/4)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1
90°(π/2)	1	0	∞	0

3. Функции синус, тангенс и котангенс являются нечетными, а функция косинус – четная , т. е. для всех допустимых значений x выполнены равенства

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad tg(-x) = -tgx, \quad ctg(-x) = -ctgx.$$

Функции синус и косинус – периодические с периодом 2π, а функции тангенс и котангенс – периодические с периодом π. Таким образом,

$$\sin(x+2\pi n) = \sin x, \cos(x+2\pi n) = \cos x, tg(x+\pi n) = tgx, ctg(x+\pi n) = ctgx$$

для всех допустимых значений x и для всех $n \in Z$.

4. Формулы, позволяющие упрощать выражения вида

$$\sin(\frac{\pi n}{2} \pm x), \; \cos(\frac{\pi n}{2} \pm x), \; tg(\frac{\pi n}{2} \pm x), \quad ctg(\frac{\pi n}{2} \pm x)$$

называются формулами приведения. С учетом периодичности основных тригонометрических функций, а также соображений четности, достаточно рассмотреть лишь случаи n = 1, 2, 3 для синуса и косинуса и n = 1 для тангенса и котангенса:

$$\sin(\frac{\pi}{2} \pm x) = \cos x, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x, \quad \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x,$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} \pm x) = -\cos x, \; \cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x, \; \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x,$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi \pm x) = -\cos x,$$

$$tg(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp ctgx, \quad ctg(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp tgx.$$

5. Равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, справедливое для всех значений x, называется основным тригонометрическим тождеством. Из него вытекает, что

$$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; 1 + ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

6. Формулы сложения.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \; \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \; \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$$

$$tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy}, \text{ при } x, y, x+y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$tg(x-y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx \cdot tgy}, \text{ при } x, y, x-y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

7. Формулы двойного аргумента.

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x; \; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$tg 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}, \text{ при } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

8. Формулы тройного аргумента.

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x; \; \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

9. Формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

10. Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$tgx + tgy = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} \text{ при } x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z;$$

$$tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y} \text{ при } x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z.$$

11. Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right];$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right].$$

12. Формулы, использующие тангенс половинного аргумента

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}; \ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \text{ при } x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Пример 10. Упростить выражение $\sin^2 x + \sin(60^\circ + x)\sin(60^\circ - x)$.

Решение. Воспользуемся формулами преобразования произведения в сумму, тогда

$$\sin^2 x + \sin(60^\circ + x)\sin(60^\circ - x) =$$

$$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\left[\cos(60^\circ + x - 60^\circ + x) - \cos(60^\circ + x + 60^\circ - x)\right] =$$

$$= \sin^2 x + \frac{1}{2}\left[\cos 2x - \cos 120^\circ\right] = \sin^2 x + \frac{1}{2}\left[1 - 2\sin^2 x - (-\frac{1}{2})\right] = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Пример 11. Упростить выражение $\frac{1-\sin^4 2x-\cos^4 2x}{2\sin^4 2x}$ и вычислить его при $x=\frac{\pi}{12}$.

Решение. Применим формулы понижения порядка, тогда

$$\frac{1-\sin^4 2x-\cos^4 2x}{2\sin^4 2x}=\frac{1-\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2-\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2}{2\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{4-(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)-(1+2\cos 4x+\cos^2 4x)}{2(1-\cos 4x)^2}=\frac{2-2\cos^2 4x}{2(1-\cos 4x)^2}=$$

$$=\frac{2(1-\cos 4x)(1+\cos 4x)}{2(1-\cos 4x)^2}=\frac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{1+0{,}5}{1-0{,}5}=3.$$

Ответ:3.

Пример 12. Упростить:

$$\frac{\cos 565^\circ\cdot\sin 835^\circ-\sin 385^\circ\cdot\cos 475^\circ}{\cos 746^\circ\cdot\sin 114^\circ+\cos 834^\circ\cdot\cos 296^\circ}.$$

Решение. $\frac{\cos 565^\circ\cdot\sin 835^\circ-\sin 385^\circ\cdot\cos 475^\circ}{\cos 746^\circ\cdot\sin 114^\circ+\cos 834^\circ\cdot\cos 296^\circ}=$

$$=\frac{\cos(360^\circ+205^\circ)\cdot\sin(2\cdot 360^\circ+115^\circ)-\sin(360^\circ+25^\circ)\cdot\cos(360^\circ+115^\circ)}{\cos(2\cdot 360^\circ+26^\circ)\cdot\sin(90^\circ+24^\circ)+\cos(2\cdot 360^\circ+114^\circ)\cdot\cos(270^\circ+26^\circ)}=$$

$$=\frac{\cos 205^\circ\cdot\sin 115^\circ-\sin 25^\circ\cdot\cos 115^\circ}{\cos 26^\circ\cdot\cos 24^\circ+\cos 114^\circ\cdot\sin 26^\circ}=$$

$$=\frac{\cos(180^\circ+25^\circ)\cdot\sin(90^\circ+25^\circ)-\sin 25^\circ\cdot\cos(90^\circ+25^\circ)}{\cos 26^\circ\cdot\cos 24^\circ+\cos(90^\circ+24^\circ)\cdot\sin 26^\circ}=$$

$$=\frac{-\cos 25^\circ\cdot\cos 25^\circ+\sin 25^\circ\cdot\sin 25^\circ}{\cos 26^\circ\cdot\cos 24^\circ-\sin 24^\circ\cdot\sin 26^\circ}=\frac{-(\cos^2 25^\circ-\sin^2 25^\circ)}{\cos(24^\circ+25^\circ)}=\frac{-\cos 50^\circ}{\cos 50^\circ}=-1.$$

Ответ: -1.

Пример 13. Упростить: $tg\alpha \cdot tg\beta + (tg\alpha + tg\beta) \cdot ctg(\alpha + \beta)$.

Решение. $tg\alpha \cdot tg\beta + (tg\alpha + tg\beta) \cdot ctg(\alpha + \beta) = tg\alpha \cdot tg\beta + (tg\alpha + tg\beta) \cdot$
$\cdot \dfrac{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = tg\alpha \cdot tg\beta + 1 - tg\alpha \cdot tg\beta = 1.$

Ответ:1.

Пример 14. Привести к виду, удобному для логарифмирования выражение: $tg\dfrac{\alpha}{2} - \cos\alpha - \sin\alpha.$

Решение. $tg\dfrac{\alpha}{2} - \cos\alpha - \sin\alpha. = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} - \cos\alpha - \sin\alpha =$

$$= \frac{1 - \cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha - 1)}{\sin\alpha} =$$

$$= -ctg\alpha[(1-\cos\alpha) + \sin\alpha] = -ctg\alpha(2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}) =$$

$$= -2ctg\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot (\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}) = -2\sqrt{2}ctg\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\alpha}{2}) =$$

$$= -2\sqrt{2} \cdot ctg\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}) =$$

$$= -2\sqrt{2} \cdot ctg\alpha \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}).$$

Ответ: $-2\sqrt{2} \cdot ctg\alpha \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}).$

Преобразования логарифмических выражений

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ФОРМУЛЫ

При любых $a > 0, a \neq 0$, $b > 0$, $b \neq 0$ и $x > 0$ справедливы следующие равенства:

—

$$a^{\log_a x} = x; \quad \log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|;$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|; \quad \log_{a^\beta} x^\gamma = \frac{\gamma}{\beta} \log_a |x|; \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a};$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}; \quad c^{\log_a b} = b^{\log_a c}, c > 0, a \neq 1.$$

Пример 15. Упростите выражение $\log_8 14 + \log_8 \frac{32}{7}$.

1) 0,5; 2) 2; 3) $\log_2 7$; 4) $\log_8 7$.

Решение: $\log_8 14 + \log_8 \frac{32}{7} = \log_8 \left(14 \cdot \frac{32}{7}\right) = \log_8 64 = \log_8 8^2 = 2.$ Номер правильного ответа - 2. *Ответ*: 2.

Пример 16. Упростите выражение $3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5}$.

1) –45; 2) $5^{\log_2 \frac{1}{4}}$; 3) $5 \log_2 3$; 4) $\frac{5}{9}$.

Решение: $3^{\log_2 \frac{1}{4} + \log_3 5} = 3^{-2 + \log_3 5} = 3^{-2} \cdot 3^{\log_3 5} = \frac{1}{9} \cdot 5 = \frac{5}{9}$.

Ответ: 4.

Пример 17. Найдите значение выражения $\log_3 36 - 2\log_3 2$.

1) 5; 2) $12\log_3 2$; 3)2; 4)3.

Решение: $\log_3 36 - 2\log_3 2 = \log_3 (3^2 \cdot 2^2) - 2\log_3 2 = \log_3 3^2 + \log_3 2^2 - \log_3 2^2 = \log_3 3^2 = 2.$ *Ответ*: 3.

Пример 18. Упростите выражение $\log_3 15 - \log_3 5 + 3^{\log_3 5}$.

1) 6; 2) $\log_3 5$; 3) $5\log_3 5$; 4) 5.

Решение: $\log_3 15 - \log_3 5 + 3^{\log_3 5} = \log_3 \dfrac{15}{5} + 5 = \log_3 3 + 5 = 1 + 5 = 6.$

Ответ: 1.

Пример 19. Найдите значение выражения

$$((1 - \log_2^2 7) \cdot \log_{14} 2 + \log_2 7) \cdot 5^{\log_5 24}.$$

Решение: По формуле перехода к новому основанию $\log_{14} 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 14}$, откуда получаем

$$\log_{14} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 14} = \frac{1}{\log_2 (2 \cdot 7)} = \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 7} = \frac{1}{1 + \log_2 7}.$$

Тогда

$$((1 - \log_2^2 7) \cdot \log_{14} 2 + \log_2 7) \cdot 5^{\log_5 24} = \left((1 - \log_2 7)(1 + \log_2 7) \cdot \frac{1}{1 + \log_2 7} + \log_2 7\right) \cdot$$

$$\cdot 5^{\log_5 24} = (1 - \log_2 7 + \log_2 7) \cdot 24 = 24.$$

Ответ: 24.

Пример 20. Найдите значение выражения

$$(2 \cdot \log_{49} \frac{12}{7} - \log_7 12 + 9) \cdot 4^{3 \cdot \log_4 2,5}.$$

Решение:

$$(2 \cdot \log_{49} \frac{12}{7} - \log_7 12 + 9) \cdot 4^{3 \cdot \log_4 2,5} = \left(2 \cdot \frac{\log_7 \frac{12}{7}}{\log_7 49} - \log_7 12 + 9\right) \cdot$$

$$\cdot \left(4^{\log_4 2,5}\right)^3 = \left(2 \cdot \frac{\log_7 12 - \log_7 7}{2} - \log_7 12 + 9\right) \cdot (2,5)^3 =$$

$$= \left(\log_7 12 - \log_7 7 - \log_7 12 + 9\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = 8 \cdot \frac{125}{8} = 125.$$

Ответ: 125.

ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

Пример 21. Вычислите: $3^{-4} \cdot 27^{\frac{-2}{3}} \cdot 9 - 27^{-1\frac{1}{3}} + \left(8^0\right)^3 \cdot 2 + 0,125^{-\frac{2}{3}}.$

Решение: $3^{-4}\cdot 27^{\frac{-2}{3}}\cdot 9-27^{-1\frac{1}{3}}+\left(8^{0}\right)^{3}\cdot 2+0{,}125^{-\frac{2}{3}}=3^{-2}\cdot\left(3^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}-$

$$-\left(3^{3}\right)^{-\frac{4}{3}}+1\cdot 2+\left(0{,}5^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}=3^{-2}\cdot 3^{-2}-3^{-4}+2+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=3^{-4}-3^{-4}+2+2^{2}=6.$$

Ответ: 6.

Пример 22. Вычислить значение $\cos\alpha$, если $tg\,\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$.

Решение. $\cos\alpha=\dfrac{1-tg^{2}\alpha}{1+tg^{2}\alpha}=\dfrac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{5}=0{,}6.$

Ответ: 0, 6.

Пример 23. Найти значение *K*, при котором верно равенство

$$\sin^{4}\alpha+\frac{1}{4}\sin^{2}(2\alpha+\pi)=(\sin\alpha)^{K},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\alpha\neq\pi n,\ n\in Z.$$

Решение. $\sin^{4}\alpha+\frac{1}{4}\sin^{2}(2\alpha+\pi)=\sin^{4}\alpha+\frac{1}{4}\cdot 4\sin^{2}\alpha\cos^{2}\alpha=$

$=\sin^{2}\alpha(\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha)=\sin^{2}\alpha=\sin^{K}\alpha$, что возможно при $K=2$.

Ответ: 2.

Пример 24. Найти $tg(\frac{\pi}{4}+2x)$, если $\cos 4x=\frac{5}{13}$ и $\frac{7}{8}\pi<x<\pi$.

Решение.

Из $\frac{7}{8}\pi<x<\pi\Rightarrow\frac{7}{2}\pi<4x<4\pi\Rightarrow\frac{3}{2}\pi+2\pi<4x<2\pi+2\pi\Rightarrow$

$\sin 4x<0$ и из основного тригонометрического тождества получаем

$\sin 4x=-\sqrt{1-\cos^{2}4x}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}$. Так как $tg\,\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то

$$tg(\frac{\pi}{4}+2x)=\frac{1-\cos(\pi/2+4x)}{\sin(\pi/2+4x)}=\frac{1+\sin 4x}{\cos 4x}=\frac{1-12/13}{5/13}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

Пример 25. Вычислите $\lg 2a+\lg 5b$, если $\lg ab=3$.

—

Решение: $\lg 2a + \lg 5b = \lg(2a \cdot 5b) = \lg(10ab) = \lg 10 + \lg ab = 1 + 3 = 4.$

Ответ: 4.

Пример 26. Найдите $\log_{0,3} 7{,}5$, если $\log_{0,3} 5 = a$.

Решение:

$$\log_{0,3} 7{,}5 = \log_{0,3}(25 \cdot 0{,}3) = \log_{0,3} 5^2 + \log_{0,3} 0{,}3 = 2\log_{0,3} 5 + 1 = 2a + 1.$$

Ответ: $2a + 1$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислите: $0{,}3 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{15} - 0{,}1$.

1) 9,1; 2) 2,9; 3) 89,9; 4) 8,9.

Ответ: 4.

2. Упростите выражение: $\sqrt[3]{8a^3} - (2a + \sqrt[4]{a^2 b^8})$, если $a \geq 0$.

1) $4a + b^2\sqrt{a}$; 2) $4a - b^2\sqrt{a}$; 3) $b^2\sqrt{a}$; 4) $-b^2\sqrt{a}$.

Ответ: 4.

3. Найдите значение выражения: $\sqrt[6]{3^7 \cdot 4^5} \cdot \sqrt[6]{3^5 \cdot 4}$.

1) 24; 2) 36; 3) 6; 4) $4\sqrt{3}$.

Ответ: 2.

4. Выполните действия: $\left(n^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} : \sqrt{n^3}$.

1) $n^{\frac{-1}{3}}$; 2) $n^{\frac{-7}{6}}$; 3) $n^{\frac{1}{2}}$; 4) $n^{\frac{2}{9}}$.

Ответ: 2.

5. Вычислите: $3^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{48}$.

1) 4; 2) 3; 3) 0; 4) $\sqrt[3]{6}$.

Ответ: 4.

6. Упростите выражение: $\sqrt[5]{\frac{n^4}{8m^3}} : \sqrt[5]{\frac{4m^2}{n}}$

1) $\sqrt[5]{\frac{n^3}{2m}}$; 2) $\frac{\sqrt[5]{n}}{2m}$; 3) $\frac{n}{2m}$; 4) $\frac{n}{2\sqrt[3]{2}m}$. *Ответ*: 3.

7. Упростите выражение: $1 - \frac{4 - b^{\frac{1}{3}}}{2 + b^{\frac{1}{6}}}$.

1) $b^{\frac{1}{6}} - 1$; 2) $b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}} - 2$; 3) $b^{\frac{1}{6}}$; 4) $b^{\frac{1}{2}} - 1$.

Ответ: 1.

8. Упростите выражение: $2\sqrt{y} + \frac{1 - y^{\frac{3}{2}}}{1 + y^{\frac{1}{2}} + y}$.

1) $y^{\frac{1}{2}} + 1$; 2) $2y^{\frac{1}{2}} - 1$; 3) $2y^{\frac{1}{2}} + 1$; 4) $(y^{\frac{1}{2}} - 1)^2$.

Ответ: 1.

9. Упростите выражение: $\left(\sqrt{320} - 3\sqrt[3]{24}\right) - \left(\sqrt{45} - 2\sqrt[3]{81}\right)$.

1) $\sqrt[3]{3} + 5\sqrt{5}$; 2) $5\sqrt{5}$; 3) $2\sqrt[3]{3} - 3\sqrt{5}$; 4) $3\sqrt[3]{3}$.

Ответ: 2.

—

10. Найдите значение выражения $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ при $a=4, b=5.$

1) 1; 2) $2\sqrt{5}$; 3) 0; 4) 2.

Ответ: 3.

11. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\frac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}}$ при $a=4, b=9.$

1) 1; 2)5; 3) –5; 4) –1. *Ответ*: 4.

12. Упростите выражение $\cos^2 x+\mathrm{tg}x\cdot\sin x-1.$

1) 0; 2) $\cos x+\sin x$; 3) $\cos 2x$; 4) –1.

Ответ: 1.

13. Упростите выражение $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-(\mathrm{tg}\alpha)^2.$

1) $\mathrm{ctg}^2\alpha$; 2) $2\mathrm{tg}^2\alpha$; 3)0; 4) 1. *Ответ*: 3.

14. Найдите $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{2\sqrt{7}}, \alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right).$

1) $\frac{9}{7}$; 2) $-\frac{3}{\sqrt{19}}$; 3) $-\frac{\sqrt{19}}{4}$; 4) $-\frac{\sqrt{19}}{3}$. *Ответ*: 4.

15. Вычислите значение выражения $\cos\pi-\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)+tg^2\left(\frac{4\pi}{3}\right).$

1) $\sqrt{3}$; 2) 3; 3) $\sqrt{3}-2$; 4)1.

Ответ: 2.

16. Вычислите: $\dfrac{6\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2\cos^2 15^\circ - 1}$.

1) $-\sqrt{3}$; 2) -3; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}$.

Ответ: 4.

17. Вычислите: $\dfrac{\cos^2 22{,}5^\circ - \sin^2 22{,}5^\circ}{\cos 25^\circ \cos 20^\circ - \sin 25^\circ \sin 20}$.

1) -1; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 1; 4) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. *Ответ*: 3.

18. Найдите значение выражения $\sin(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha \sin\beta$, если $\alpha = 73^\circ$, $\beta = 28^\circ$.

1) $\dfrac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. *Ответ*: 4.

19. Упростите выражение $2^{\log_2 3} + \log_7 2 - \log_7 14$.

1) $2 + 2\log_7 2$; 2) 2; 3) $3\log_2 3$; 4) $3 - 2\log_7 2$.

Ответ: 2.

20. Упростите выражение $\log_5 3 - \log_5 15 + \log_3 5$

1) $\log_3 5 - 1$; 2) –2; 3) 0; 4) $\log_5 3$. *Ответ*: 1.

21. Найдите значение выражения $\lg 4a + \lg 25b$, если $\lg ab = 3$.

1) 6; 2) –2; 3) 5; 4) 4.

Ответ: 3.

22. Найдите значение выражения $\log_3(9b)$, если $\log_3 b = 5$.

1) 25; 2) -8; 3) 10; 4) 7.

Ответ: 4.

23. Найдите значение числового выражения $\sqrt{16-\sqrt{31}} \cdot \sqrt{\sqrt{31}+16}.$

Ответ: 15.

24. Найдите значение числового выражения

$$\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{2}} - 16^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-1}$$

Ответ: 1/11.

25. Найдите значение числового выражения $\left(\sqrt{5}\right)^{2+\log_{\sqrt{5}} 6}$

Ответ: 30.

26. Найдите значение числового выражения

$$\log_{\sqrt{2}}\left(4\cos\frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

Ответ: 1.

27. Упростите выражение $\sqrt[4]{256a^4b^8c^{12}}$, если $a < 0$, $c \le 0$.

Ответ: $4ab^2c^3$.

28. Упростите выражение $\left(p^{-1} \cdot q^{\frac{5}{4}} \cdot \left(p^{3,5} q^{-\frac{1}{8}}\right)^2\right)^{-1}$.

Ответ: $\dfrac{1}{p^6 q}$.

29. Упростите выражение $\log_4 x + 2\log_{16} x - \log_2 x$.

Ответ: 0.

30. Упростите выражение $\cos^2(30^\circ - \alpha) - \sin^2(60^\circ + \alpha)$..

Ответ: 0.

31. Представьте выражение в виде степени: $\sqrt[5]{b\sqrt[4]{b^3}} : \sqrt[3]{b^2\sqrt{b^3}}$.

Ответ: $b^{-\frac{49}{60}}$.

32. Вычислите: $6\log_2 125 \log_5 2 + 2^{\lg 7} 5^{\lg 7}$.

Ответ: 25.

33. Найдите значение выражения:

$$\left(\left(1 - \log_2^2 7\right)\log_{14} 2 + \log_2 7\right) 6^{\log_6 35}.$$

Ответ: 35.

34. Найдите значение выражения: $\dfrac{\log_2 40}{\lg 2} - \dfrac{\log_2 5}{\log_{80} 2}$.

Ответ: 3.

35. Известно, что $\log_{\frac{1}{4}} 43 = a$. Найдите $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{43}{256}$.

Ответ: $a + 4$.

36. Вычислите значение $\left(\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x+3}\right)^{\frac{1}{2}}$, если $5^x = 4$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}}{100}$.

37. Вычислите: $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

38. Выполните действия: $\dfrac{x^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{4}}}:\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}$.

Ответ: $-x^{\frac{1}{2}}-1$.

39. Вычислите: $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}}+27^{-2\frac{1}{3}}+\left(6^0\right)^5\cdot 2-3^{-4}\cdot 81^{-\frac{3}{2}}\cdot 27$.

Ответ: 12.

40. Вычислите: $64^{-\frac{5}{6}}-(0{,}125)^{-\frac{1}{3}}-32\cdot 2^{-4}\cdot 16^{-1\frac{1}{2}}+\left(19^0\right)^4\cdot 4$.

Ответ: 2.

41. Вычислите: $(0{,}01)^{-\frac{1}{2}}-3^{-3}\cdot 9\cdot 27^{-\frac{2}{3}}-\left(15^0\right)^3\cdot 3+9^{-\frac{3}{2}}$.

Ответ: 7.

42. Найдите значение выражения $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ответ: 0.

43. Найдите значение выражения $\frac{4}{3}\operatorname{tg}\left(\pi-\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.

Ответ: 1.

44. Вычислите: $5\log_3 25\cdot\log_5 81+15^{\log_{15} 7}$.

Ответ: 47.

45. Найдите значение выражения

$$3\sqrt{2}\cdot\frac{\cos 44^\circ\cos 16^\circ - \cos 74^\circ\sin 44^\circ}{\cos 10^\circ\sin 55^\circ + \cos 100^\circ\cos 55^\circ}.$$

Ответ: 3.

46. Найдите значение выражения

$$\sqrt{6}\cdot\frac{\cos 14^\circ\sin 31^\circ + \cos 76^\circ\cos 32^\circ}{\sin 87^\circ\sin 63^\circ - \sin 177^\circ\sin 27^\circ}.$$

Ответ: 2.

47. Найдите значение выражения $26\sin 2x$, если

$\sin x = -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$

Ответ: 24.

48. Найдите значение выражения $13\sin 2x$, если

$\cos x = -\frac{2}{\sqrt{13}}, -\pi < x < 0.$

Ответ: –12.

49. Найдите значение выражения $5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - arctg\left(-\frac{1}{7}\right)\right).$

Ответ: 7.

50. Найдите значение выражения $\log_\pi\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right).$

Ответ: 1.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

—

1. Кремер Н.Ш., Константинова О.Г., Фридман М.Н. Математика абитуриентам экономических вузов: Учеб. пособие для вузов/ Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. –509 с.
2. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. В двух книгах. Кн.1 / Под редакцией М.И. Сканави / – М. .: Высшая школа, 1994.– 528 с.
3. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. В двух книгах. Кн.2 / Под редакцией М.И. Сканави / – М. .: Высшая школа, 1994.– 368 с.
4. Единый государственный экзамен: Математика: сб. заданий/ Л. О. Денищева, Г. К. Безрукова, Е. М. Бойченко и др. – М.: Просвещение,2005. –224 с.: ил.

ОГЛАВЛЕНИЕ

—