Министерство образования и науки Российской Федерации

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЛЕСА

Полещук О.М.

Уравнения и неравенства

Методическое пособие для студентов первого курса

Издательство Московского государственного университета леса

Москва-2015

Полещук О. М. Уравнения и неравенства. Методическое пособие для студентов первого курса. — М.: МГУЛ — 41 с.

Одобрено и рекомендовано к изданию в качестве методического пособия редакционно-издательским советом университета

Кафедра высшей математики

Составители: Ольга Митрофановна Полещук, профессор

Лицензия ЛР № 020718 от 02.02.1998 г.
Лицензия ПД № 00326 от 14.02.2000 г.

Подписано к печати   Формат 60x88/16
Бумага 80 г/м^2 " Снегурочка"   Ризография
Объем 0,75 п.л.   Заказ №
Тираж 500 экз.

Издательство Московского государственного университета леса.
141005. Мытищи-5, Московская обл., 1-я Институтская , 1, МГУЛ.
Телефон: (095) 588-57-62

ВВЕДЕНИЕ

Цель данного пособия – помочь студентам первого курса восполнить пробелы школьной математики и подготовиться к освоению программы высшей математики. В начале пособия приведен небольшой анализ типичных ошибок, после чего даны рекомендации, как их избежать.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ И КАК ИХ ИЗБЕЖАТЬ

1. При решении уравнений и неравенств рекомендуется начинать с определения области допустимых значений (ОДЗ), т. е. области, в которой определены все входящие в уравнение или неравенство функции. В большинстве задач ОДЗ задается системой уравнений или неравенств, которую вовсе необязательно решать (тем более, если она громоздка), а, найдя предполагаемое решение, подстановкой проверить, входит ли оно в ОДЗ, т.е. удовлетворяет ли оно этой системе.
2. Рекомендуется следить за равносильностью (эквивалентностью) уравнений или неравенств, полученных в результате преобразований. Если этого не делать, то вы будете терять решения или приобретать лишние.
3. При выполнении тестовых заданий, в которых предложено несколько ответов, полезно включать логику, которая, в крайнем случае, поможет выбрать ответ методом исключения.
4. При решении уравнений, содержащих модуль неизвестной или выражения, содержащего неизвестную, рекомендуется для раскрытия модуля пользоваться методом интервалов.

УРАВНЕНИЯ

В данном разделе рассматриваются уравнения следующих видов:
– иррациональные;
– показательные;
– логарифмические;
– тригонометрические;
– уравнения смешанного типа.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 1. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения

$$\sqrt{2x^2-7x-3}+x=3.$$

1) $(-6;-4)$ 2) $(0;2)$ 3) $(2;5)$ 4) $(-4;0)$

Решение. Перенесем x в правую часть и возведём обе части уравнения в квадрат: $2x^2-7x-3=9-6x+x^2$. Получаем после приведения подобных членов уравнение $x^2-x-12=0$. Его корни – числа 4 и –3. Подставив их в исходное уравнение, убеждаемся, что корнем является лишь число -3. *Номер верного варианта ответа*: 4.

Ответ: 4.

Пример 2. Найдите квадрат корня уравнения $\sqrt{x-5}=10-2x.$

Решение. Множество допустимых значений переменной x определим условиями:

$$\begin{cases} x-5\ge 0, \\ 10-2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Квадрат найденного решения равен 25. *Ответ*: 25.

Пример 3.Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt{x^4+x^2-11}=1-x^2\,?$$

Решение. $\sqrt{x^4+x^2-11}=1-x^2 \to x^4+x^2-11=(1-x^2)^2 \to$

$$x^4+x^2-11=1-2x^2+x^4 \to 3x^2=12 \to x^2=4 \to x=\pm 2.$$

Проверка. $\sqrt{2^4+2^2-11}=1-2^2 \to \sqrt{9}=-3$ – равенство неверно, значит, $x=2$ – не является корнем уравнения.

$\sqrt{(-2)^4+(-2)^2-11}=1-(-2)^2 \to \sqrt{9}=-3$ – равенство неверно, значит, $x=-2$ – не является корнем уравнения. *Ответ*: ни одного.

Пример 4. Найдите решение (x_0, y_0) системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \end{cases}$$

и вычислите значение суммы $x_0 + y_0$.

Решение. О.Д.З. $x \ge 0, y \ge 0$. Умножим второе уравнение на 2 и сложим результат с первым уравнением:

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 4\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 4 + 6.$$

Отсюда получаем: $5\sqrt{x} = 10 \to \sqrt{x} = 2 \to x = 4$. Подставив полученное значение $x = 4$ во второе уравнение: $4 - \sqrt{y} = 3$, найдём значение второй переменной: $\sqrt{y} = 1 \to y = 1$. Итак, пара (4; 1) – искомое решение системы уравнений. Найдём значение суммы составляющих решения системы уравнений: $x_0 + y_0 = 4 + 1 = 5$.

Ответ: 5.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 5. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $25^{3-x} = 0{,}2$.

1) $(0;1)$ 2) $(1;2)$ 3) $(2;3)$ 4) $(3;4)$

Решение. Используя свойство степени $(a^n)^m = a^{nm}$, получаем:

$$25^{3-x} = (5^2)^{3-x} = 5^{2(3-x)}.$$

Так как $0{,}2 = 5^{-1}$, то $5^{2(3-x)} = 5^{-1}$. Степени с одинаковым основанием равны, значит, равны их показатели:

$$2(3 - x) = -1 \to 6 - 2x = -1 \to -2x = -7 \to x = 3{,}5.$$

Поскольку $3{,}5 \in (3;4)$, верным является ответ №4. *Ответ*: 4.

Пример 6. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$.

1) $(4;6)$ 2) $[3;4]$ 3) $(2;3)$ 4) $[1;2]$

Решение.

$$2^{x+1} + 2^{x-1} = 20 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} = 20 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^x + 2^x = 40 \Leftrightarrow$$

$$5 \cdot 2^x = 40 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3 \to x \in [3;4].$$

Ответ: 2.

Пример 7. Найдите произведение корней уравнения $3^{x^2-1}=243$.

Решение.

$$3^{x^2-1}=243 \Leftrightarrow 3^{x^2-1}=3^5 \Leftrightarrow x^2-1=5 \Leftrightarrow x^2=6 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6} \to x_1\cdot x_2=-6.$$

Ответ: -6.

Пример 8. Найдите решение (x_0,y_0) системы уравнений

$$\begin{cases} 7^{x+2y-1}=1, \\ x+y-2=0 \end{cases}$$

и вычислите произведение $x_0\cdot y_0$.

Решение. Так как $a^0=1$ при любых значениях $a\neq 0$, из первого уравнения системы получаем:

$$7^{x+2y-1}=7^0 \Leftrightarrow x+2y-1=0 \Leftrightarrow x+2y=1.$$

Следовательно исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y=2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1, \\ x=3. \end{cases}$$

Итак, (3;– 1) – искомое решение системы, поэтому $x_0\cdot y_0=3\cdot(-1)=-3$.

Ответ: –3.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 9. Найдите произведение корней уравнения

$$\log_\pi(x^2+0{,}1)=0.$$

1) $-1{,}21$; 2) $-0{,}9$; 3) $0{,}81$; 4) $1{,}21$.

Решение. По определению логарифма получаем:

$$x^2+0{,}1=\pi^0 \Rightarrow x^2+0{,}1=1 \Rightarrow x^2=0{,}9 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{0{,}9} \Rightarrow x_1\cdot x_2=-0{,}9.$$

Ответ: 2.

Пример 10. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_{0,4}(5-2x)-\log_{0,4}2=1$.

1) $(-\infty;-2)$; 2) $[-2;1]$; 3) $[1;2]$; 4) $(2;\infty)$.

Решение.

$$\log_{0,4}(5-2x)-\log_{0,4}2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x>0; \\ \log_{0,4}\dfrac{5-2x}{2}=\log_{0,4}0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2,5; \\ \dfrac{5-2x}{2}=\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<2,5; \\ 25-10x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2,5; \\ x=2,1. \end{cases}$$

Найденное решение $x=2,1\in(2;\infty)$.

Ответ: 4.

Пример 11. Найдите сумму корней уравнения $\lg(4x-3)=2\lg x$.

Решение.

$$\lg(4x-3)=2\lg x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3>0; \\ x>0; \\ \lg(4x-3)=\lg(x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,75; \\ 4x-3=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0,75; \\ x^2-4x+3=0 \end{cases}$$

Находим корни квадратного уравнения:

$x_1=1; x_2=3; x_2>x_1>0,75 \Rightarrow x_1+x_2=1+3=4$. *Ответ*: 4.

Пример 12. Найдите решение (x_0, y_0) системы уравнений

$$\begin{cases} \ln(y-x)=\ln 4; \\ \log_2\dfrac{x}{4}=3-\log_2 y \end{cases}$$

и вычислите значение частного $\dfrac{x_0}{y_0}$.

Решение. $$\begin{cases} \ln(y-x)=\ln 4; \\ \log_2\dfrac{x}{4}=3-\log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x=4; \\ y>x; \\ \log_2\dfrac{x}{4}=\log_2\dfrac{8}{y}; \\ x>0; \quad y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>x; \\ y=x+4; \\ \dfrac{x}{4}=\dfrac{8}{y}; \\ x>0; y>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y>x; \\ y=x+4; \\ xy=32; \\ x>0; y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>x; \\ y=x+4; \\ x(x+4)-32=0; \\ x>0 y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>x; \\ y=x+4; \\ x^2+4x-32=0; \\ x>o; y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4; \\ y=8. \end{cases}$$

Значение частного $\dfrac{x_0}{y_0}=\dfrac{4}{8}=0,5.$ *Ответ*: 0, 5.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Решения простейших тригонометрических уравнений находятся по формулам:

$\sin x = a\,(-1 \le a \le 1) \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$;

$\cos x = a\,(-1 \le a \le 1) \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z$;

$tg = a\ (-\infty < a < \infty) \Leftrightarrow x = arctga + \pi n, n \in Z$;

$ctg = a\ (-\infty < a < \infty) \Leftrightarrow x = arcctga + \pi n, n \in Z$.

2. Уравнения $\sin^2 x = a^2$ и $\cos^2 x = a^2$ $(0 \le a \le 1)$ решаются по формулам:

$\sin^2 x = a^2 \Leftrightarrow x = \pm\arcsin a + \pi n, n \in Z$;

$\cos^2 x = a^2 \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + \pi n, n \in Z$.

3. Уравнения вида $\sin x = \sin y$ и $\cos x = \cos y$ сводятся к уравнениям вида $\sin x - \sin y = 0$ и $\cos x - \cos y = 0$, которые преобразуются по формулам для разности синусов и косинусов соответственно.

4. Уравнения вида $a\sin\alpha x + b\cos\alpha x = c$ преобразуются в уравнения вида $\sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha x + \varphi) = c$, где $\varphi = arctg\dfrac{b}{a}$.

5. Уравнения вида $a\sin^2\alpha x + b\sin\alpha x\cos\alpha x + c\cos^2\alpha x = 0$, преобразуются в уравнения вида $atg^2\alpha x + btg\alpha x + c = 0$, поскольку его решением не может быть $\cos\alpha x = 0$.

Пример 13. Решить уравнение $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

Решение. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow$ $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$. Делая замену переменной $z = \sin x$, получаем уравнение $2z^2 + 5z + 2 = 0$. Корни уравнения $z_1 = -2$ и $z_2 = -0{,}5$, следовательно, относительно неизвестной x получаем два уравнения: $\sin x = -2$ и $\sin x = -0{,}5$. Первое из них решений не имеет, т.к. $|\sin x| \le 1$; решениями второго уравнения $\sin x = -0{,}5$ является множество чисел вида

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin(-0{,}5) + n\pi \Leftrightarrow x = (-1)^{n+1} \cdot \arcsin 0{,}5 + n\pi \Leftrightarrow$$

$$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z$.

Пример 14. Найти наибольший корень уравнения

$$3tg^4 x - 4\sec^2 x + 5 = 0,$$

принадлежащий интервалу (0; π).

Решение. Так как $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$, то уравнение

$3tg^4 x - 4\sec^2 x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3tg^4 x - 4(1 + tg^2 x) + 5 = 0 \Leftrightarrow 3tg^4 x - 4tg^2 x + 1 = 0.$

Решая квадратное уравнение относительно $tg^2 x$, получаем два корня $tg^2 x = 1$ и $tg^2 x = 1/3$, следовательно, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $tgx = \pm 1$ и $tgx = \pm 1/\sqrt{3}$, решениями первого уравнения является множество чисел $x = \pm\frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$, а решениями второго – $x = \pm arctg\frac{1}{\sqrt{3}} + n\pi = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi, n \in Z$. Для значений n = 0, ±1, получим корни уравнения: $x = \pm\frac{\pi}{4}, x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{5}{4}\pi, x = \pm\frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi, x = \frac{7}{6}\pi.$ Все другие значения n рассматривать не стоит, так как соответствующие корни будут лежать вне интервала (0; π). Среди найденных корней интервалу (0; π) принадлежат только четыре: $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3}{4}\pi, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi$ и наибольшим из них является корень $x = \frac{5}{6}\pi.$ *Ответ*:. $x = \frac{5}{6}\pi.$

Пример 15. Решить уравнение: $1 + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos 3x + \sin\frac{x}{2} + \cos 3x = 0.$

Решение. $1 + \sin\frac{x}{2}\cdot\cos 3x + \sin\frac{x}{2} + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow$

$(1 + \cos 3x) + (\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 3x + \sin\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow (1 + \cos 3x) + \sin\frac{x}{2}\cdot(1 + \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow$

$(1 + \cos 3x)\cdot(1 + \sin\frac{x}{2}) = 0.$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$1 + \cos 3x = 0 \text{ и } 1 + \sin\frac{x}{2} = 0.$$

1) $1 + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}(1 + 2k), k \in Z.$

2)$1 + \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \Leftrightarrow x = \pi(4n - 1), n \in Z$.

Так как корни уравнения $1 + \sin\frac{x}{2} = 0$ являются одновременно корнями уравнения $1 + \cos 3x = 0$ (при n = ..., –1; 0; 2; 3; ... и k = ..., –8; -2; 4; 10; ... получаем одинаковые корни ..., –5π; –π; 3π; 7π; ...), то все решения данного уравнения можно получить из формулы $x = \frac{\pi}{3}(1+2k), k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}(1+2k), k \in Z.$

Пример 16. Найти в градусах наименьший корень уравнения $\cos x - \cos 4x + \cos 3x - 1 = 0$, лежащий в интервале (180°;270°).

Решение.

$$\cos x - \cos 4x + \cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x + \cos 3x) - (1 + \cos 4x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2\cos 2x \cdot \cos x - 2\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \cdot (\cos x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2\cos 2x \cdot 2\sin\frac{3x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \sin\frac{3x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} = 0.$$

Произведение трех сомножителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, поэтому последнее уравнение равносильно совокупности трех уравнений: $\cos 2x = 0, \sin\frac{3x}{2} = 0, \sin\frac{x}{2} = 0.$

1) $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ(1+2k), k \in Z.$

При k =...; 0; 1; 2; 3... получим корни x = ... 45°; 135°; 225°; 315°;..., из которых в интервале (180°; 270°) лежит только один корень x = 225°.

2) $\sin\frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 180^\circ \cdot n \Leftrightarrow x = 120^\circ \cdot n, n \in Z.$

При n = ...; 1; 2; 3... получим корни x = ... ; 120°; 240°; 360°;..., из которых в интервале (180°; 270°) лежит только один корень x = 240°.

3) $\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 180^\circ \cdot m \Leftrightarrow x = 360^\circ \cdot m, m \in Z.$

При любых значениях m получим корни, ни один из которых не лежит в интервале (180°; 270°).

Итак, в интервале (180°; 270°) имеется два корня уравнения: корни x = 225° и x = 240°, наименьшим из них является корень x = 225° .

Ответ: x = 225°.

Пример 17. Решить уравнение:

$$25\sin^2 x + 30\sin x \cdot \cos x + 9\cos^2 x = 25.$$

Решение. Данное уравнение не является однородным, так как в его правой части стоит число, отличное от нуля, но его можно привести к однородному следующим образом: $25\sin^2 x + 30\sin x \cdot \cos x + 9\cos^2 x = 25 \Leftrightarrow$

$$25\sin^2 x + 30\sin x \cdot \cos x + 9\cos^2 x = 25(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow$$
$$15\sin x \cdot \cos x - 8\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x(15\sin x - 8\cos x) = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, т. е. получаем два различных уравнения:

1. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$

2. $15\sin x - 8\cos x = 0$. Уравнение однородное и обе его части можно разделить на $\cos x \neq 0$, получим

$$15tgx - 8 = 0 \Leftrightarrow tgx = \frac{8}{15} \Leftrightarrow x = arctg\frac{8}{15} + n\pi, n \in Z.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z;\ x = arctg\dfrac{8}{15} + n\pi, n \in Z.$

Пример 18. Найти корень уравнения $\sqrt{3} \cdot \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}$, удовлетворяющий условию $-180° < x < -90°$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$, получим $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 3x - \dfrac{1}{2}\cos 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 30^\circ \cdot \sin 3x - \sin 30^\circ \cdot \cos 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$$\sin(3x - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 3x - 30^\circ = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 180^\circ n \Leftrightarrow$$

$$3x = 30^\circ + (-1)^n \cdot 45^\circ + 180^\circ n \Leftrightarrow x = 10 + (-1)^n \cdot 15^\circ + 60^\circ \cdot n.$$

При $n = ...; -3; -2; -1; 0; 1; ...$ получаем корни ...;– 185°; – 95°; – 65°; 25°; 55°; ... . Условию $-180° < x < -90°$ удовлетворяет только корень $x = -95°$.

Ответ: $x = -95°$.

Пример 19. Решить уравнение: $\sin^4 x + \cos^4 x = 0{,}625$.

Решение. $\sin^4 x + \cos^4 x = 0{,}625 \Leftrightarrow 4\sin^4 x + 4\cos^4 x = 4 \cdot 0{,}625 \Leftrightarrow$

$$(2\sin^2 x)^2 + (2\cos^2 x)^2 = 2{,}5 \Leftrightarrow (1 - \cos 2x)^2 + (1 + \cos 2x)^2 = 2{,}5 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x = 2{,}5 \Leftrightarrow 2 + 2\cos^2 2x = 2{,}5 \Leftrightarrow$$

$$2\cos^2 2x = 0{,}5 \Leftrightarrow 1 + \cos 4x = 0{,}5 \Leftrightarrow \cos 4x = -0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$4x = \pm\arccos(-0{,}5) + 2k\pi \Leftrightarrow 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in Z.$

Пример 21. Решить уравнение $\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$ и в ответе записать количество корней, принадлежащих отрезку $[0, 2\pi]$.

Решение. $\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$. Пусть $\sin x = y$, тогда имеем уравнение $2y^2 - 3\sqrt{2}y + 2 = 0$, $y_{1,2} = \dfrac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18-16}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{4}$, $y_1 = \sqrt{2}$ – не подходит, так как $|\sin x| \le 1$, $y_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$. Отрезку $[0, 2\pi]$ принадлежат $x_1 = \dfrac{\pi}{4}, x_2 = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ: 2.

Пример 22. Решить уравнение $\dfrac{\sin x}{|\sin x|} = \sin 2x - 1$ и в ответе записать решение (в градусах), принадлежащее отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. ОДЗ: $\sin x \ne 0 \Rightarrow x \ne \pi k, k \in Z$.

Так как $|\sin 2x| \le 1$, то $\sin 2x - 1 \le 0$ и все решения уравнения таковы, что $\sin x < 0 \Rightarrow \dfrac{\sin x}{-\sin x} = \sin 2x - 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0, x = \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$. С учетом О. Д. З. и условия $\sin x < 0$, получаем ответ

$$x = \frac{\pi n}{2}, n = -1, -5, -9, \quad -13, \ldots; \quad n = 3, \quad 7, \quad 11, \quad 15, \ldots$$

Отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ принадлежит решение $x = 90^\circ$.

Ответ: 90°.

Пример 23. Решить уравнение $2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0$ и в ответе записать количество корней, принадлежащих отрезку $[0, 2\pi]$.

Решение:

$$2\cos^2 x + 5\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 - 5\sin x - 3 = 0$$
.

Пусть $\sin x = y$, *тогда уравнение примет вид* $2y^2 - 5y - 3 = 0$, его корень $y_1 = 3$ – не подходит, так как $|\sin x| \le 1$;

корень $y_2 = -\dfrac{1}{2}$ – подходит, тогда $\sin x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Отрезку $[0, 2\pi]$ принадлежат $x_1 = \dfrac{7\pi}{6}, x_2 = \dfrac{11\pi}{6}$.

Ответ: 2.

Пример 24. Решить уравнение $4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2-\sqrt{3}+4\sin 2x$ и в ответе записать (в градусах) наибольший отрицательный корень.

Решение. $4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2-\sqrt{3}+4\sin 2x \Leftrightarrow$

$$-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{3}+4\sin 2x \Leftrightarrow 2\sin 2x=-\sqrt{3}+4\sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z \\ 2x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z \\ x=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z \end{array}\right.$$

Наибольший отрицательный корень равен -120^0.

Ответ: $-120°$.

Пример 25. Решить уравнение $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ и в ответе записать (в градусах) наименьший положительный корень.

Решение. $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot$ $\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\left(1+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=0$ – корни уравнения являются корнями следующих двух уравнений:

$$1.\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \Rightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z;$$

$$2.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2\pi k, k\in Z \\ x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2\pi l, l\in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi+2\pi k, k\in Z \\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi l, l\in Z \end{array}\right.$$

Объединяя решения по пунктам (1) и (2), получаем $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z \\ x=\pi+2\pi k, k\in Z \\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi l, l\in Z \end{array}\right.$

Наименьший положительный корень равен 60^0.

Ответ: 60°.

УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Пример 26. Найдите произведение корней уравнения

$$5^{2(\log_{13} x)^2} - 6\cdot 5^{(\log_{13} x)^2} + 5 = 0.$$

Решение. Обозначим $5^{(\log_{13} x)^2} = t, t > 0.$ Тогда получаем:

$t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 5 \Rightarrow 5^{(\log_{13} x)^2} = 1$ или $5^{(\log_{13} x)^2} = 5 \Rightarrow$ $\log_{13} x = 0, x_1 = 1; \log_{13} x = \pm 1, x_2 = 13, \quad x_3 = 1/13.$

Исходное уравнение имеет три корня и их произведение равно 1.

Ответ: 1.

Пример 27. Сколько корней имеет уравнение

$$\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right)\sqrt{25 - 4x^2} = 0\,?$$

Решение.

$$\left(2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right)\sqrt{25 - 4x^2} = 0 \Leftrightarrow \cos x\sqrt{25 - 4x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 25 - 4x^2 > 0; \\ \cos x = 0; \end{cases} \\ 25 - 4x^2 = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} |x| < \dfrac{5}{2}; \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \\ x = \pm\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{\pi}{2}; x_3 = -\frac{5}{2}; x_4 = \frac{5}{2}.$$

Ответ: 4.

Пример 28. Найдите больший корень уравнения

$$(2^{x^2-1} - 8)\sqrt[4]{1 - 5x} = 0.$$

Решение.

$$(2^{x^2-1} - 8)\sqrt[4]{1 - 5x} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - 5x = 0; \\ \begin{cases} 1 - 5x > 0; \\ 2^{x^2-1} - 8 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0{,}2; \\ \begin{cases} x < 0{,}2; \\ x^2 - 1 = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0{,}2; \\ x_2 = -2. \end{array}\right.$$

Больший корень $x=-2$. *Ответ*:–2.

Пример 29. Решите уравнение $3^{16+x}\cdot 4^{4+x}\cdot 5^{3x}=540^{8-x}$.

Решение.

$3^{16+x}\cdot 4^{4+x}\cdot 5^{3x}=540^{8-x}\Rightarrow 3^{16+x}\cdot 4^{4+x}\cdot 5^{3x}=(27\cdot 4\cdot 5)^{8-x}\Rightarrow$

$3^{16+x}\cdot 4^{4+x}\cdot 5^{3x}=(3^3)^{8-x}\cdot 4^{8-x}\cdot 5^{8-x}\Rightarrow$

$3^{16+x}\cdot 4^{4+x}\cdot 5^{3x}=3^{24-3x}\cdot 4^{8-x}\cdot 5^{8-x}\Rightarrow$

$3^{16+x-24+3x}\cdot 4^{4+x-8+x}\cdot 5^{3x-8+x}=1\Rightarrow 3^{4x-8}\cdot 4^{2x-4}\cdot 5^{4x-8}=1\Rightarrow$

$(3^2)^{2x-4}\cdot 4^{2x-4}\cdot (5^2)^{2x-4}=1\Rightarrow (3^2\cdot 4\cdot 5^2)^{2x-4}=1\Rightarrow 2x-4=0\Rightarrow x=2.$

Ответ:2.

Пример 30. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2xy-3x}{y-3}=2x+3;\\ 0{,}5\log_6\dfrac{9x-x^3-36}{5-y}=1-\log_{36}(x-2).\end{cases}$$

Решение. О.Д.З. $\begin{cases}\dfrac{9x-x^3-36}{5-y}>0;\\ x-2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{9x-x^3-36}{5-y}>0;\\ x>2\end{cases}$

По свойству логарифмов $0{,}5\log_6 z=\log_{6^2} z=\log_{36} z$, а тогда второе уравнение системы преобразуем к виду

$$\log_{36}\frac{9x-x^3-36}{5-y}+\log_{36}(x-2)=1\Rightarrow\frac{9x-x^3-36}{5-y}\cdot(x-2)=36.$$

Из первого уравнения системы получаем, что

$xy-3x=2xy+3y-6x-9\Rightarrow 3x=3y-9\Rightarrow y=x+3.$

Сделаем подстановку в уравнение, полученное из логарифмического:

$$\frac{9x-x^3-36}{2-x}\cdot(x-2)=36\Rightarrow x^3-9x+36=36\Rightarrow x(x^2-9)=0.$$

Учитывая О.Д.З., получаем, единственное решение системы: $x=3,\ y=6$.

Проверка. $\begin{cases}\dfrac{2\cdot 18-9}{6-3}=6+3;\\ 0{,}5\log_6\dfrac{27-27-36}{5-6}=1-\log_{36}1;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9=9;\\ 0{,}5\cdot 2=1.\end{cases}$

Оба равенства верны. *Ответ*: $x = 3, y = 6.$

Примеры для самостоятельного решения

Решите следующие уравнения:

1. $\sqrt[3]{x-3} = -2.$ *Ответ:* $-5.$

2. $\sqrt{2x^2 + 9x + 5} = 3.$ *Ответ:* $\dfrac{-9 \pm \sqrt{113}}{4}.$

3. $\sqrt{x^2 - 9} = 6 - 2x.$ *Ответ:* $3.$

4. $\sqrt{2x^2 - 14x + 21} + 4 = x.$ *Ответ:* $5.$

5. $\sqrt[4]{5-x} = x - 5.$ *Ответ:* $5.$

6. $\sqrt{x^4 - 17} = x^2 - 1.$ *Ответ:* $\pm 3.$

7. $3^{x-0,5} \cdot 3^{x+1} = 1.$ *Ответ:* $-0,25.$

8. $25^{x+1} - 5^{2x} = 24.$ *Ответ:* $0.$

9. $49 \cdot 8^{2x} - 50 \cdot 8^x + 1 = 0.$ *Ответ:* $0; \log_8 49.$

10. $9^{x^2-2x} = 1.$ *Ответ:* $0;\ 2.$

11. $4^{x+2} + 4^{x+1} + 4^x = 84.$ *Ответ:* $1.$

12. $\log_{0,6}(x-9) = 1 + \log_{0,6} 6.$ *Ответ:* $12,6.$

13. $\log_4(x-5) = 1 + \log_{81} 9.$ *Ответ:* $13.$

14. $\log_{0,3}(x+7) = \log_{0,09}(2x-8)^2.$ *Ответ:* $15.$

15. $\log_2(64x^3) = 6.$ *Ответ:* $1.$

16. $\ln(x+4)-\ln(x+3)=\ln 3.$ *Ответ:*– 2,5.

17. $\lg(x+7)-\lg(x+5)=1.$ *Ответ:* $-4\frac{2}{3}$.

18. $\left(x^2-9\right)\left(\sqrt{3-2x}-x\right)=0.$ *Ответ:* 1;–3.

19. $\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\sqrt{25-4x^2}\right)=0.$ *Ответ:* $\pm 2{,}5;\pm\frac{\pi}{2}$.

20. $16^{|x|}=4.$ *Ответ:* $\pm 0{,}5$.

21. $7^{\log_7 x}+x^{(\log_7 x)^{-1}}=14.$ *Ответ:* 7.

22. $\log_5^2(2x)-20\log_5(2x)=21.$ *Ответ:* $0{,}1;2{,}5\cdot 5^{20}$.

23. $3\left|x^2+2x-1\right|=5x+11.$ *Ответ:* $-1;2.$

24. $2\log_2(1-\frac{13}{2x+7})=3\log_2(2+\frac{13}{x-3})+12.$ *Ответ:* $-\frac{3}{7}$.

25. $30\cdot 2^x\cdot 5^{-x}=360^x$ *Ответ:* 0,5.

Найдите решение следующих систем уравнений:

26. $\begin{cases}\sqrt{x}-2\sqrt{y}=1,\\ 2\sqrt{x}+\sqrt{y}=7.\end{cases}$ *Ответ:* $x=9;\ y=1$.

27. $\begin{cases}2y-x+4=0,\\ 3^{x-y+2}=27.\end{cases}$ *Ответ:* $x=-2;\ y=-3$.

28. $\begin{cases}5^{x+y}=\frac{1}{25},\\ \lg(x-2y)=\lg(2y+5).\end{cases}$ *Ответ:* $x=-0{,}6;\ y=-1{,}4$.

29. $\begin{cases} \ln(x-4y)=0, \\ \lg 2x+\lg x=1. \end{cases}$ *Ответ*: $x=\sqrt{5};\ y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

30. $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 16, \\ \log_3 x+\log_3 y=1. \end{cases}$ *Ответ:* $x=1; y=3$ и $x=3; y=1$.

31. $\begin{cases} \log_5(x+y)=1, \\ \log_6 x+\log_6 y=1. \end{cases}$ *Ответ:* $x=1; y=5$ и $x=5; y=1$.

Решите следующие тригонометрические уравнения:

32. $\cos^4(180^\circ - x)-\sin^4 x=1.$ *Ответ:* $k\pi, k\in Z.$

33. $\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=\sqrt{2}$. *Ответ:* $\dfrac{7\pi}{12}+2n\pi; \dfrac{\pi}{12}+2n\pi, n\in Z.$

34. $\sin 11x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x+\dfrac{1}{2}\cos 7x=0.$ *Ответ:* $-\dfrac{\pi}{108}+n\dfrac{\pi}{9}; \dfrac{7\pi}{24}+\dfrac{\pi}{2}n, n\in Z.$

35. $\sin(5x+\dfrac{\pi}{2})=\cos(7x-\pi)$. *Ответ:* $\dfrac{\pi}{12}(2k+1); \dfrac{\pi}{2}(2k+1), k\in Z.$

36. $2\sin x\cos(-x)+\cos^2 x+\dfrac{1}{2}\cos 2x=\dfrac{1}{2}.$ *Ответ:* $-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}n, n\in Z.$

37. $\cos 3x+\cos(\dfrac{2\pi}{3}+x)+\cos(\dfrac{2\pi}{3}-x)=0.$ *Ответ:* $\dfrac{\pi}{2}n, n\in Z.$

38. $\cos 5x\cdot\cos 7x+\sin 4x\cdot\sin 8x=-\dfrac{1}{2}.$ *Ответ:* $\dfrac{\pi}{4}(2k+1); \pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in Z.$

39. $2\sin x+\cos x=1.$ *Ответ:* $2k\pi; 2arctg2+2k\pi, k\in Z.$

40. $\sin x+7\cos x=5.$ *Ответ:* $\pm\dfrac{\pi}{4}+arctg\dfrac{1}{7}+2k\pi, k\in Z.$

41. Найти (в градусах) положительный острый угол *x,* удовлетворяющий уравнению $\sin 2x + 3\cos 2x = 1$.

Ответ: 45°.

НЕРАВЕНСТВА

Неравенства являются одной из самых популярных тем школьной математики. Исследование свойств функций, решение задач с параметрами, экстремальных задач сводится в той или иной степени к решению или доказательству неравенств.

В пособии рассматриваются решения различных типов неравенств. По каждому из них набор задач многочислен и разнообразен. Здесь есть неравенства на любой вкус: стандартные – совершенствующие технику решения и способствующие более глубокому постижению теории, а также нестандартные – и по содержанию, и по решению.

СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ

Два действительных числа или два алгебраических выражения, соединенные знаком > (больше) или < (меньше) (а также знаком ≥ или ≤), образуют неравенство

$$A > B,\ A < B,\ A \ge B,\ A \le B.$$

Неравенства $A > B$ и $A < B$ называются строгими. Неравенства $A \ge B$ и $A \le B$ называются нестрогими. Рассматриваются также двойные неравенства

$$A < B < C,\ A \le B \le C,\ A > B > C,\ A \ge B \ge C\ .$$

Выражения A и B рассматриваются на том множестве, где A и B одновременно имеют смысл. Это множество называется множеством допустимых значений неравенства.

Пусть $f(x)$ – числовая функция одного аргумента. Всякое значение переменной, при котором данное неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство, называется *решением неравенства*. *Решить* неравенство $f(x) < 0$ или $f(x) > 0$ – значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства считаются эквивалентными, если множества их решений совпадают.

Несколько неравенств могут быть объединены в систему неравенств. Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой. Решить систему неравенств – это, значит, найти множество всех значений аргументов функций, входящих в неравенства, при которых справедливы все неравенства системы одновременно.

СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Свойство 1. Если $a > b$, то $b < a$, и наоборот,
если $b < a$, то $a > b$ (необратимость, антисимметричность неравенства).

Свойство 2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (транзитивность).

Свойство 3. Если $a > b$ и c – любое число, то $a + c > b + c$.

Следствие. Если $a > b + c$, *то* $a - c > b$.

Свойство 4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Свойство 5. Если $a > b$ и $c <0$, то $ac < bc$

Свойство 6. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.

Свойство 7. Если $a > b > 0$, то при любом натуральном n $a^n > b^n$.

Свойство 8. Если $a > b > 0$, то при любом натуральном $n > 0$

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} .$$

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Пусть $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени с действительными коэффициентами:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$

и $x_1, x_2, .., x_p$ – корни этого многочлена.

Требуется решить неравенство

$$P_n(x) > 0 \text{ (или } P_n(x) < 0). \qquad (1)$$

Заметим, что многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} ...(x - x_p)^{k_p} Q(x),$$

где $Q(x)$ – многочлен, не имеющий действительных корней и либо положителен, либо отрицателен при всех $x \in R$. Это значит, что решая неравенство (1), его можно сократить. Придем к равносильному (1) неравенству

$$(x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} ...(x - x_p)^{k_p} > 0 \text{, если } \quad Q(x) > 0 \qquad (2)$$

и

$$(x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} ...(x - x_p)^{k_p} < 0 \text{, если } \quad Q(x) < 0 \qquad (2')$$

Рассмотрим **теорему**:

Если функция $F(x)$ определена и непрерывна на промежутке $a< x <b$ и не имеет корней на этом промежутке, то при всех значениях аргумента x, принадлежащих этому промежутку, функция $F(x)$ сохраняет знак.

Геометрический смысл теоремы очевиден (рис.1).
Если неравенство имеет вид неравенства (2), то при его решении применяют метод интервалов (метод "змейки"): на числовой оси располагаем корни многочлена, учитывая кратность. На последнем справа интервале $P_n(x) > 0$, а при переходе через корень многочлен будет менять знак, если кратность этого корня нечетное число, и не будет менять знак, если кратность этого корня четное число.

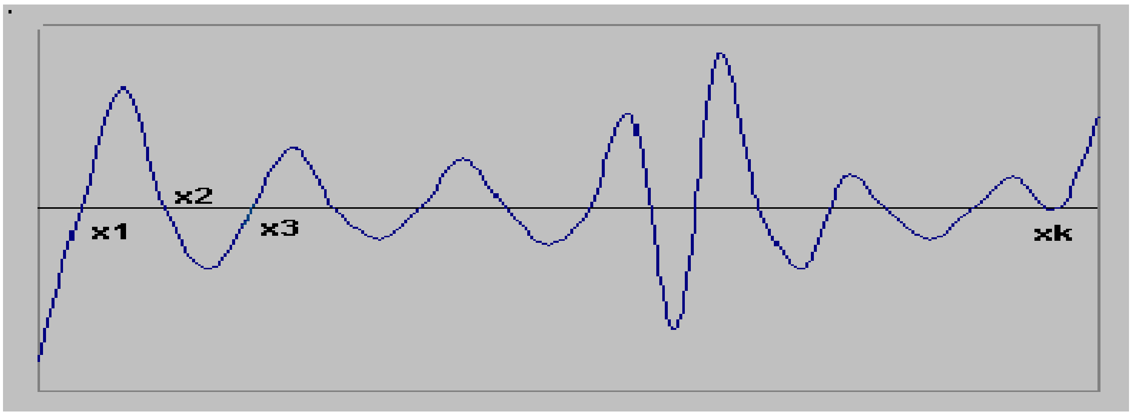


Рис. 1.

Рациональные и дробно-рациональные неравенства

Пример 1. Решить неравенство

$$(x+1)^5(x+2)^4(x+7)^{15}(x-4)^9(x^3-1)<0. \qquad (3)$$

Решение. Заданное неравенство эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases}(x+1)(x+7)(x-4)(x-1)<0,\\ x\neq -2,\end{cases}$$

(мы учли, что

$$(x+1)^4 \ge 0, (x+2)^4 \ge 0, (x+7)^{14} \ge 0, (x-4)^8 \ge 0, x^2+x+1>0).$$

Применяем метод интервалов:

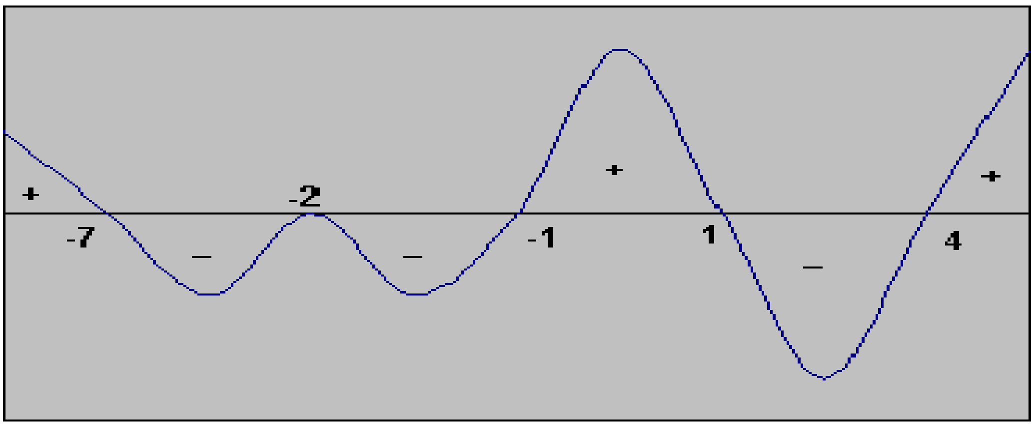


Рис. 2.

Выберем те интервалы, где выполняется неравенство (3), а именно, -7< x <-2, -2 < x <-1,1 < x < 4.

Ответ: $x \in (-7; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; 4)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x+2}{x^2-x-2} < -1. \qquad (4)$$

Решение. ОДЗ: $x^2 - x - 2 \neq 0, x \neq -1, x \neq 2.$ Имеем:

$$\frac{x+2}{x^2-x-2} + 1 < 0, \text{ или } \frac{x^2}{x^2-x-2} < 0.$$

Поскольку $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, неравенство (4) эквивалентно неравенству $x^2(x+1)(x-2) < 0$. Поскольку $x^2 \geq 0$, имеем: $(x+1)(x-2) < 0$.

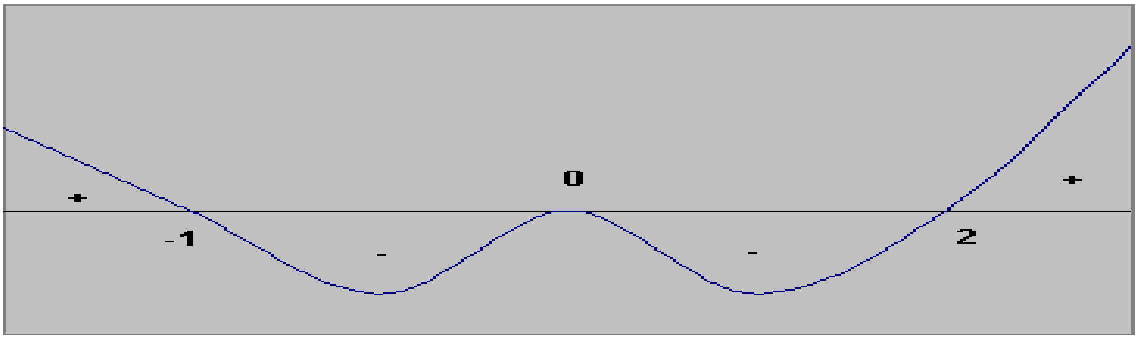


Рис.3.

При этом должно выполняться условие $x \neq 0$. Применяя метод интервалов, получаем: $-1 < x < 0$, $0 < x < 2$.

Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (0; 2)$.

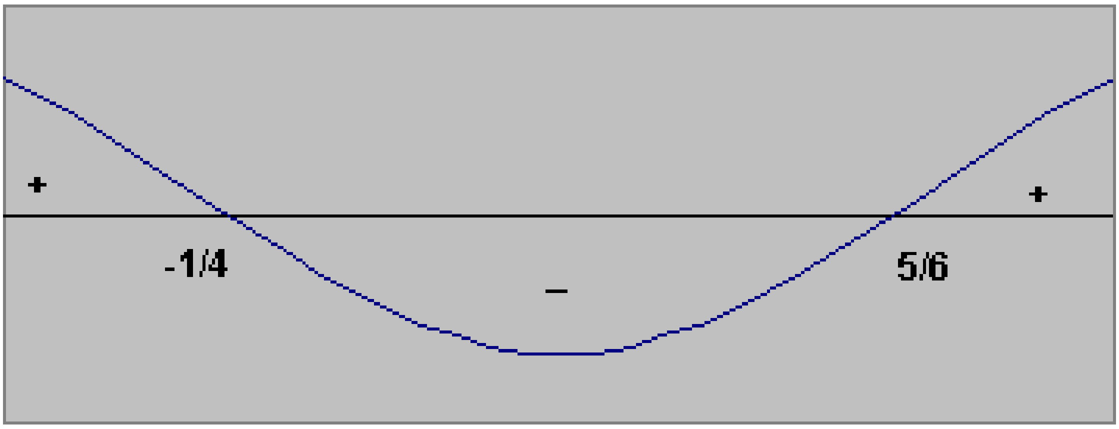
Пример 3. Найти целочисленные решения неравенства

$$\frac{6x-5}{4x+1} < 0. \qquad (5)$$

Решение: ОДЗ: $4x + 1 \neq 0$ или $x \neq -1/4$. Имеем равносильное заданному неравенство

$$(6x-5)(4x+1) < 0.$$

Отмечая на оси *x* значения $x = 5/6$, $x = -1/4$ и применяя метод интерва-



лов,
получаем решение $x \in (-1/4;5/6)$. Этот интервал содержит только одно целое число: 0.

Ответ: 0.

Неравенства с модулем

Пример 4. Найти целые числа *x*, удовлетворяющие неравенству

$$\left|\frac{2}{x-13}\right| > \frac{8}{9}$$

Решение: ОДЗ: $x \neq 13$. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{2}{x-13} > \dfrac{8}{9}; \\ x-13>0, \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} \dfrac{2}{x-13} < -\dfrac{8}{9}; \\ x-13<0. \end{cases}$$

Решаем систему 1):

$$\begin{cases} (4x-61)(x-13)<0; \\ x-13>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-61<0; \\ x-13>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<61/4; \\ x>13 \end{cases} \Leftrightarrow 13<x<61/4.$$

Решаем систему 2):

$$\begin{cases} (4x-43)(x-13)<0; \\ x-13<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-43>0; \\ x-13<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>43/4; \\ x<13 \end{cases} \Leftrightarrow 43/4<x<13.$$

Графически получаем:

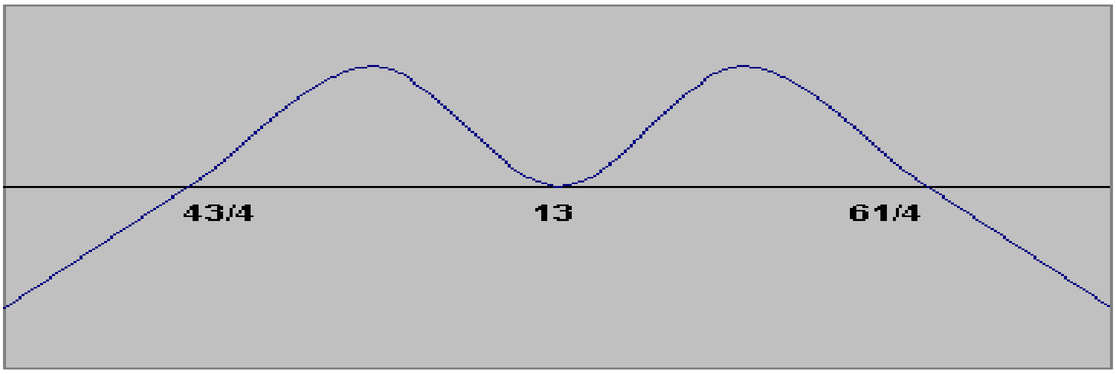


Рис. 5.

Итак, $x \in (43/4;13) \cup (13;61/4)$, т.е. целые числа x, удовлетворяющие заданному неравенству, равны $x_1 = 11, x_2 = 12, x_3 = 14, x_4 = 15.$

Ответ: $x_1 = 11, x_2 = 12, x_3 = 14, x_4 = 15.$

Пример 5. Решить неравенство $|2x-5| - |4x+7| \geq 0.$

Решение: Рассматриваем решение неравенства в трех интервалах, получающихся при нанесении на ось Ox точек, в которых какое-либо из двух подмодульных выражений меняет знак.

1) $x \in (-\infty;-7/4)$, тогда неравенство принимает вид $-2x+5+4x+7 \geq 0,$ или $x \geq -6,$ т.е. $x \in [-6;-7/4).$

2) $x \in [-7/4;5/2]$, т.е. неравенство записывается $-2x+5-4x-7 \geq 0,$ или $x \leq -1/3,$ следовательно, $x \in [-7/4; -1/3].$

3) $x \in (5/2;\infty)$ и неравенство записывается $2x-5-4x-7 \geq 0,$ или $x \leq -6,$ т.е. $x \in \varnothing$.

Объединяя получившиеся множества, получаем множество решений неравенства: $x \in [-6;-1/3].$

Ответ: $x \in [-6;-1/3].$

Иррациональные неравенства

Пример 6. Решить неравенство $\sqrt{4-x} > x-2.$

Решение: ОДЗ: $4-x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 4.$. Данное неравенство равносильно системам неравенств

$$1) \quad \begin{cases} x \leq 4, \\ x-2 > 0, \\ 4-x > (x-2)^2, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x \leq 4, \\ x-2 \leq 0. \end{cases}$$

Откуда получаем решение для системы 1) $\begin{cases} 2 < x \le 4, \\ x^2 - 3x < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x \le 4, \\ 0 < x < 3, \end{cases}$ или $2 < x < 3$, и для системы 2) решение $-\infty < x \le 2$ соответственно. Объединяя оба решения, получаем ответ $x \in (-\infty\ , 3)$.

Ответ: $x \in (-\infty\ , 3)$.

Пример 7. Решить неравенство $4x - 6 > \sqrt{6x - 2x^2}$.

Решение: ОДЗ: $6x - 2x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 2x(x-3) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le 3$.

Рассмотрим два случая:

$$1)\begin{cases} 4x - 6 > 0, \\ 4x - 6 > \sqrt{6x - 2x^2}, \\ 6x - 2x^2 \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1{,}5; \\ (4x-6)^2 > 6x - 2x^2, \\ 6x - 2x^2 \ge 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x > 1{,}5; \\ (x-1)(x-2) > 0, \\ x(x-3) \le 0, \end{cases} \Rightarrow \quad 2 < x \le 3.$$

$$2)\begin{cases} 4x - 6 < 0, \\ 4x - 6 > \sqrt{6x - 2x^2}, \end{cases}$$ решений нет, так как иначе

$$4x - 6 < 0 \le \sqrt{6x - 2x^2} < 4x - 6.$$

Ответ: $x \in (2;3]$.

Неравенства, требующие особых приемов при решении

Пример 8. Решить неравенство $(x^2 - 3x - 2)(x^2 - 3x + 1) < 10$.

Решение: Пусть $x^2 - 3x - 2 = y$. Исходное неравенство примет вид $y(y+3) < 10$ или $y^2 + 3y - 10 < 0$, откуда $(y+5)(y-2) < 0$. Решение этого неравенства $y \in$ (-5;2). Таким образом получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 2 < 2, \\ x^2 - 3x - 2 > -5, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ x^2 - 3x + 3 > 0, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} (x-4)(x+1) < 0, \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0. \end{cases}$$

Поскольку второе неравенство системы выполняется при всех x, решением этой системы является интервал (– 1; 4).

Ответ: $x \in (-1;4)$.

Показательные и логарифмические неравенства

Пример 9. Найти наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству $2^{-x} < \sqrt{2}$.

Решение: Поскольку $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, то $2^{-x} < 2^{1/2}$ или $-x < 1/2$, откуда получаем $x > -1/2$. Наименьшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству, есть 0.

Ответ: $x = 0$.

Пример 10. Решить неравенство $\dfrac{64}{9-3^x} - 3^x > 7$.

Решение: ОДЗ: $3^x \neq 9,\ x \neq 2$.

Пусть $3^x = y(y>0)$. Тогда заданное неравенство запишем в виде

$\dfrac{64}{9-y} - y - 7 > 0$, откуда $\dfrac{y^2 - 2y + 1}{9-y} > 0$, или $(y-1)^2(y-9) < 0$.

Отсюда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 3^x \neq 1, \\ 3^x < 9, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \neq 0, \\ x < 2, \end{cases}$$

т.е. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2)$.

Пример 11. Решить неравенство $\dfrac{\log_2(35-x^3)}{\log_2(5-x)} > 3$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} 5-x>0, \\ 5-x \neq 1, \\ 35-x^3>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5, \\ x \neq 4, \\ x<\sqrt[3]{35} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{35})$.

Используя свойство логарифма преобразуем заданное неравенство к виду

$$\log_{(5-x)}(35-x^3) > 3.$$

Получаем совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<5-x<1,\\ 35-x^3<(5-x)^3,\\ 35-x^3>0,\end{cases}\\ \begin{cases}5-x>1,\\ 35-x^3>(5-x)^3,\end{cases}\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4<x<5,\\ x^2-5x+6>0,\\ x^3<35,\end{cases}\\ \begin{cases}x<4,\\ x^2-5x+6<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(4;5),\\ x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty),\\ x\in(-\infty;\sqrt[3]{35}),\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;4),\\ x\in(2;3).\end{cases}\end{array}\right.$$

Из первой системы совокупности неравенств графически получаем

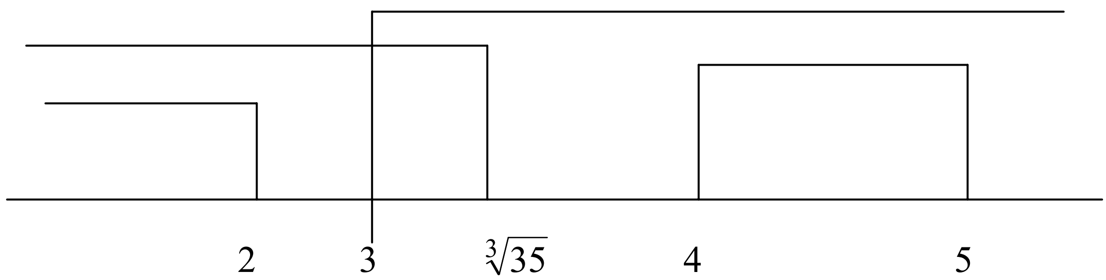


Рис. 6.

Таким образом, нет общего пересечения промежутков и решений в данном случае нет.

Для второй системы совокупности графически получаем:

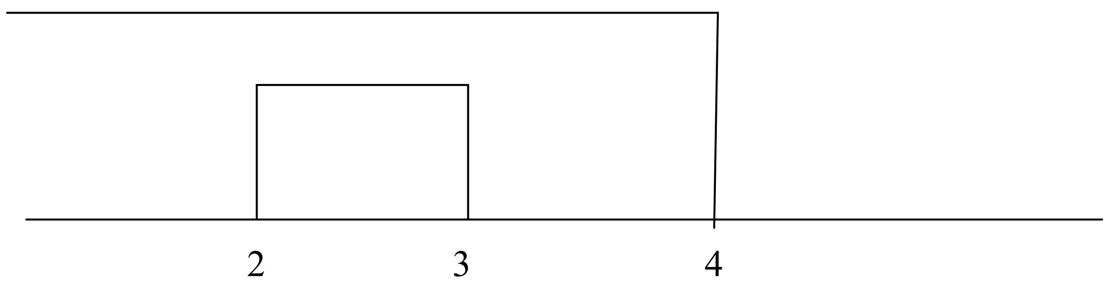


Рис. 7.

Система имеет решение $x \in (2;3)$.

Ответ: $x \in (2;3)$.

Системы неравенств

Пример 12. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 3(x+1)-\dfrac{x-2}{4}<5x-7\dfrac{x+3}{2} \\ 2x-\dfrac{x}{3}+6\le 4x-3 \end{cases}.$$

Решение. Выполнив преобразование каждого из неравенств системы, получим:

$$\begin{cases} x<-\dfrac{56}{5}, \\ x\ge \dfrac{27}{7}. \end{cases}$$

Значений x, удовлетворяющих одновременно неравенствам системы нет, значит, заданная система неравенств не имеет решений.

Ответ: $x\in\varnothing$.

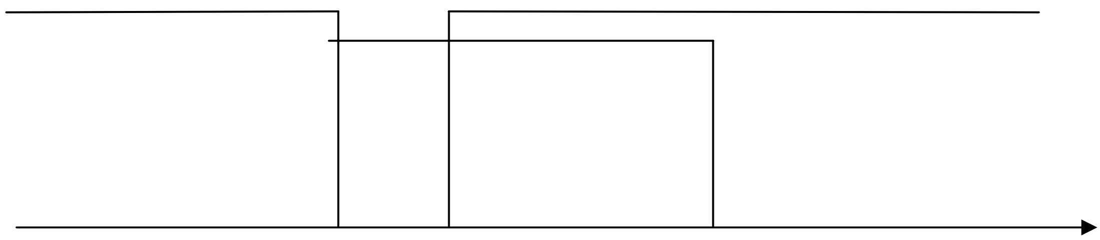
Пример 13. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x}+7<64, \\ 3x-2<2x+3, \\ x>0. \end{cases}$$

Решение. Находим $\begin{cases} 57-\dfrac{6}{x}>0, \\ x<5, \\ x>0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{57x-6}{x}>0, \\ 0<x<5. \end{cases}$

Отсюда получаем пересечение интервалов (см. рис. 8).

Решением системы неравенств является интервал $x\in\left(6/57;5\right)$ и целые решения 1; 2; 3; 4.



0 6/57 5 x

Рис.8.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$.

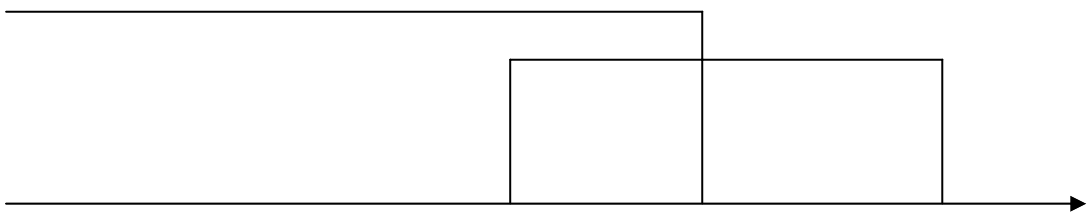
Пример 14. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0, \\ x - 4 < 0. \end{cases}$$

Решение. Раскладывая первое уравнение системы на множители, получаем систему эквивалентную заданной:

$$\begin{cases} (x-7)(x-2) < 0, \\ x - 4 < 0. \end{cases}$$

Решением системы является пересечение интервалов:



2 4 7 x

Рис.9.

Следовательно, $x \in (2;4)$, и целое решение равно 3.

Ответ: $x = 3$.

Пример 15. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x^2 - 3x < 0. \end{cases}$$

Решение. Раскладывая оба уравнения системы на множители, получаем

$$\begin{cases}(x-6)(x+1)<0,\\ x(x-3)<0.\end{cases}$$

Решением системы является пересечение интервалов-решений каждого из неравенств системы:

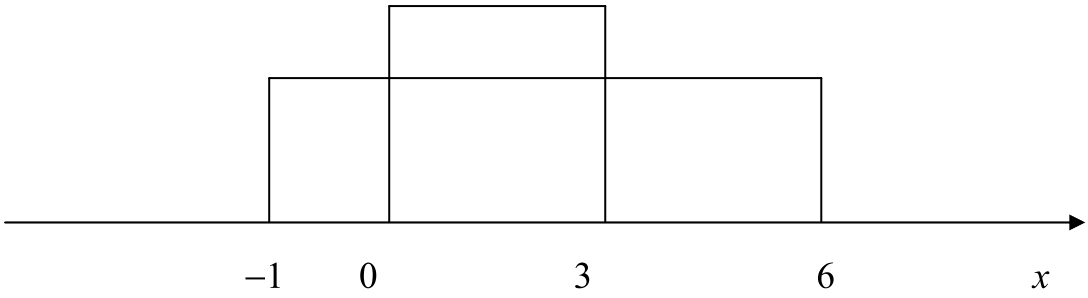


Рис.10.

Следовательно, $x \in (0;3)$.

Ответ: $x \in (0;3)$.

Неравенства с параметрами

Если в неравенство, кроме неизвестных, входят числа, обозначенные буквами, то они называются параметрами, а неравенство – параметрическим.

Решить неравенство с параметром – это значит для каждого допустимого значения параметра найти множество всех значений данного неравенства.

Пример 16. Решить неравенство $a\,x<1$.

Решение. При решении этого неравенства достаточно рассмотреть такие случаи:

1) $a=0$, тогда $0\cdot x<1$ и, очевидно, $x\in R$;

2) $a<0$, следовательно, $x>1/a$;

3) $a>0$, и $x<1/a$.

В данном примере областью допустимых значений для переменной и параметра служит все множество действительных чисел.

Ответ: $x\in R$ при $a=0$; $x>1/a$ при $a<0$; $x<1/a$ при $a>0$.

Пример 17. Решить неравенство $ax-a^2\ge x-1$.

Решение. $ax-a^2\ge x-1 \Leftrightarrow ax-x\ge a^2-1 \Leftrightarrow x(a-1)\ge(a-1)(a+1)$.

Если $a-1>0,$ т. е. $a > 1$, то разделив обе части неравенства на положительное число (a-1), получим равносильное неравенство $x \geq a+1$. Если $a-1<0,$ т. е. $a < 1$, то разделив обе части неравенства на отрицательное число ($a - 1$) и поменяв знак неравенства, получим равносильное неравенство $x \leq a+1$. При $a - 1 = 0$ или $a = 1$ неравенство принимает вид $0 \cdot x = 0$, поэтому любое действительное число x является его решением: $x \in R$.

Ответ: $x \geq a+1$ *при* $a \geq 1$;
$x \leq a+1$ *при* $a<1$;
$x \in R$ *при* $a=1$.

Пример 18. Решить неравенство $x-2\dfrac{a-1}{a} \leq \dfrac{2}{3a}(x+1)$.

Решение. Видно, что при $a=0$ неравенство решений не имеет, так как обе части неравенства теряют смысл.

Преобразуем исходное неравенство

$$x-2\frac{a-1}{a} \leq \frac{2}{3a}(x+1) \Rightarrow (1-\frac{2}{3a})x \leq 2(1-\frac{2}{3a}).$$

Если $1-\dfrac{2}{3a}>0$, то $x \leq 2.$ Установим при каких значениях параметра a выполняется неравенство $1-\dfrac{2}{3a}>0$.

$$\frac{3a-2}{3a}>0 \Rightarrow (3a-2)a>0 \Rightarrow a(a-\frac{2}{3})>0 \Rightarrow a \in (-\infty;0) \cup (\frac{2}{3};\infty).$$

Таким образом, $x \leq 2$ при $a \in (-\infty;0) \cup (\dfrac{2}{3};\infty)$.

Если $1-\dfrac{2}{3a}<0$, то $x \geq 2$ при $a \in (0;\dfrac{2}{3})$. Если $a=\dfrac{2}{3}$, то $x \in R.$.

Ответ: нет решений при $a=0$;
$x \leq 2$ при $a \in (-\infty;0) \cup (\dfrac{2}{3};\infty)$;
$x \geq 2$ при $a \in (0;\dfrac{2}{3})$;
при $a=\dfrac{2}{3}$, $x \in R.$.

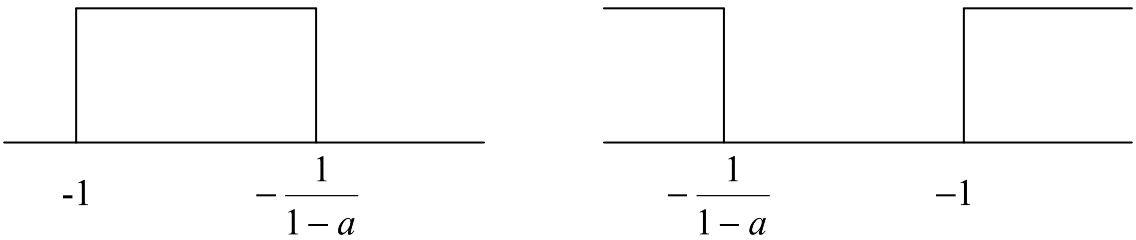
Пример 19. Решить неравенство $|1+x| \leq ax.$

Решение. Раскрываем модуль при $1+x \geq 0.$ Тогда исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}1+x\geq 0\\ 1+x\leq ax\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ (1-a)x\leq -1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq -1\\ a<1\\ x\leq -\dfrac{1}{1-a}\end{cases}\qquad(1)\\ \begin{cases}x\geq -1\\ a>1\\ x\geq -\dfrac{1}{1-a}.\end{cases}\qquad(2)\end{array}\right.$$

При $a=1$ получаем $0\cdot x\leq -1$ – решений нет.

Решим систему (1) при $a<1$. Пересечение $-1\leq x\leq -\dfrac{1}{1-a}$ возможно тогда, когда $-1\leq -\dfrac{1}{1-a}$ (см. рис. 11 а и б), т. е. $1-a\geq 1\Leftrightarrow a\leq 0$.



а) б)

Рис. 11.

Итак, при $a\leq 0$ решение $-1\leq x\leq -\dfrac{1}{1-a}$.

При $-\dfrac{1}{1-a}<-1$, т. е. при $0<a<1$ система (1) не имеет решений, а значит и исходное неравенство также.

Решим систему (2) при $a>1$: возможны два варианта – точка

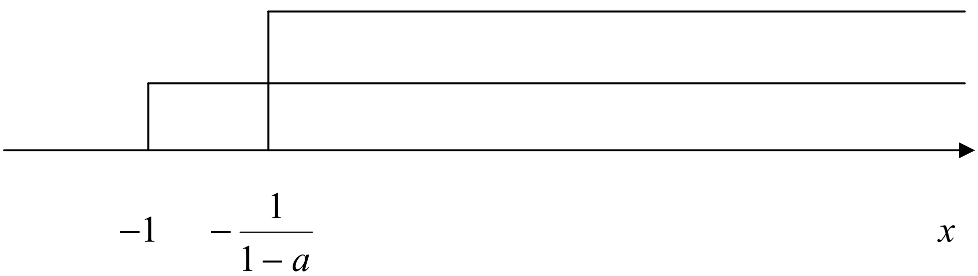


Рис. 12.

$-\dfrac{1}{1-a}$ расположена правей -1, т. е. пересечение будет $-\dfrac{1}{1-a} \le x$

при $\begin{cases} -1 < -\dfrac{1}{1-a}; \\ a > 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0; \\ a > 1. \end{cases} \Rightarrow$ $a > 1$ и $x \ge -\dfrac{1}{1-a}$ – решение при $a > 1$.

При $a > 1 - \dfrac{1}{1-a} \le x$ точка $-\dfrac{1}{1-a}$ расположена левей -1, т. е.

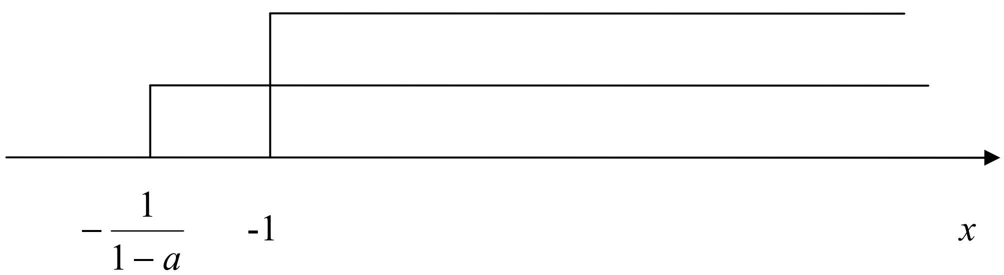


Рис. 13.

пересечение будет $-1 \le x$ при $\begin{cases} -\dfrac{1}{1-a} < -1; \\ a > 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < -a+1; \\ a > 1, \end{cases} \Rightarrow a \in \neg.$

Раскрываем модуль при $1 + x < 0$. Тогда исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 1 + x < 0; \\ -(1+x) \le ax, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1; \\ -(a+1)x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1; \\ (a+1)x \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < -1; \\ a > -1; \\ x \ge -\dfrac{1}{a+1}; \end{cases} \qquad (3)$$

и

$$\begin{cases} x < -1; \\ a < -1; \\ x \le -\dfrac{1}{a+1}. \end{cases} \qquad (4)$$

При $a = -1$ получаем $0 \cdot x \ge -1$ – решением является любое значение $x < -1$.

Решение системы (3) есть, если $-\dfrac{1}{1-a} < -1,$

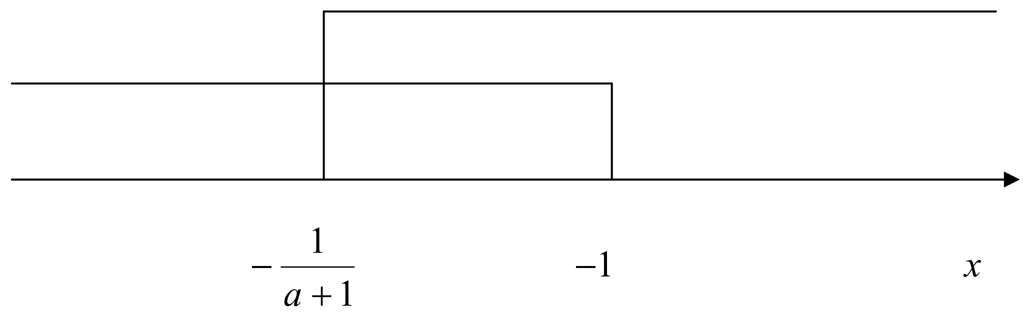


Рис. 14.

т. е. $-\frac{1}{a+1} \le x < -1$ при $\begin{cases} -\frac{1}{a+1} < -1; \\ a > -1, \end{cases} \Rightarrow$ при $-1 < a < 0$ решение системы

(3) $\quad -\frac{1}{a+1} \le x < -1$.

Решения нет, если $-\frac{1}{1-a} > -1$,

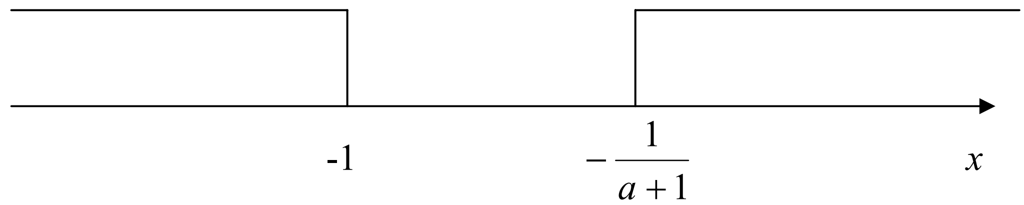


Рис. 15.

т. е. $\begin{cases} -\frac{1}{a+1} > -1; \\ a > -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a+1} < 1; \\ a > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-a-1}{a+1} < 0; \\ a+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow -a < 0 \Rightarrow a > 0.$

Решим систему (4). Если $\begin{cases} -\frac{1}{a+1} < -1; \\ a < -1, \end{cases}$ т. е.

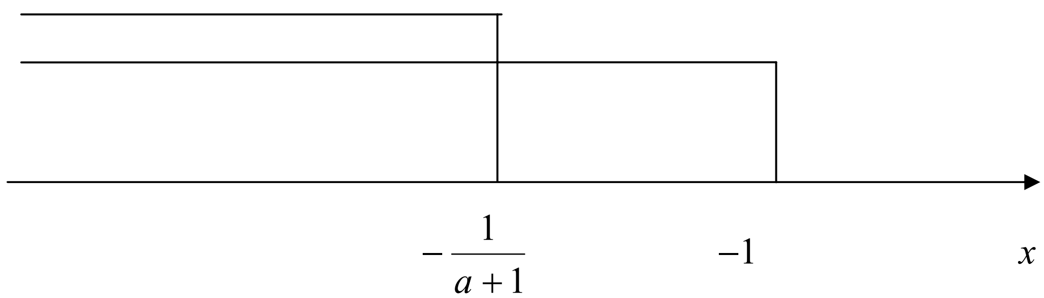


Рис. 16.

то $\begin{cases} a > 0; \\ a < -1, \end{cases} \Rightarrow$ нет решения.

Если $\begin{cases} -\dfrac{1}{a+1} > -1; \\ a < -1, \end{cases}$ т. е.

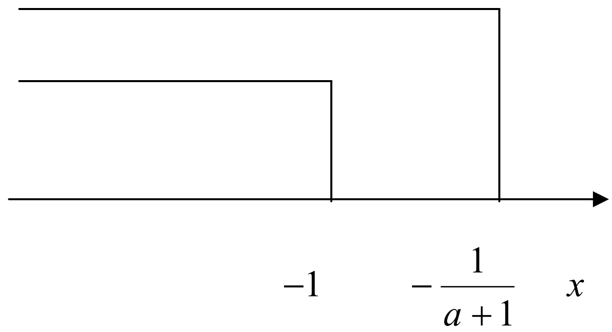


Рис. 17.

пересечение $x < -1$ при $a < -1$.

Ответ: При $a > 1$ $x \in \left[\dfrac{1}{a-1}; +\infty\right)$;

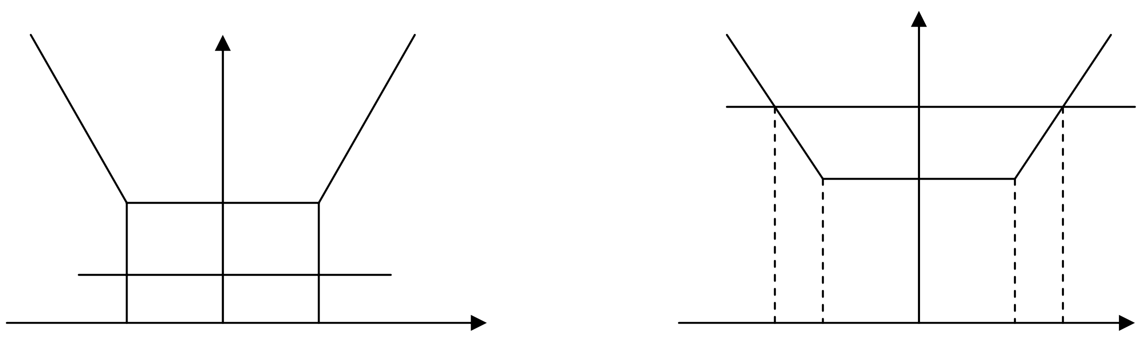
при $a \in (0;1]$ решений нет;

при $a \in (-1;0]$ $x \in \left[-\dfrac{1}{a+1}; \dfrac{1}{a-1}\right]$;

при $a \le -1$ $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{a-1}\right]$.

Пример 20. Решить неравенство $|x-a| + |x+a| < b, \quad a \neq 0$.

Решение. Для решения этого неравенства с двумя параметрами a и b воспользуемся геометрическими соображениями. На рис. 14 построены графики функций $f(x) = |x-a| + |x+a|$ и $y = b$.



а) б)

Рис. 18.

Очевидно, что при $b < 2|a|$ прямая $y = b$ проходит не выше горизонтального отрезка кривой $f(x) = |x - a| + |x + a|$ и, следовательно, неравенство в этом случае не имеет решений (рис.14, а). Если же $b > 2|a|$, то прямая $y = b$ пересекает график функции $f(x) = |x - a| + |x + a|$ в двух точках $(-b/2; b)$ и $(b/2; b)$ (рис.14, б) и неравенство в этом случае справедливо при $x \in (-b/2; b/2)$, т. к. кривая $f(x) = |x - a| + |x + a|$ расположена под прямой $y = b$. Если $b = 2|a|$, то прямая $y = b$ совпадает с участком кривой $f(x) = |x - a| + |x + a|$ при $x \in (-a/2; a/2)$.

Ответ: Если $b < 2|a|$, решений нет; если $b = 2|a|$ $x \in (-a/2; a/2)$; если $b > 2|a|$ $x \in (-b/2; b/2)$.

Решите следующие неравенства:

1. $(3x-1)^2 < 25 + 13x.$ *Ответ:* $x \in (-\frac{8}{9}; 3).$

2. $x^2 + x + 1 > -4x^2 - 6x + 7.$ *Ответ:* $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{3}{5}; +\infty).$

3. $\frac{7x^2 - 17x}{6x^2 - 17x + 10} \le \frac{5x}{6x - 5}.$ *Ответ:* $x \in [0; \frac{5}{6}) \cup (2; \frac{13}{3}].$

4. $\frac{3x^2 + 4x - 8}{15x^2 - 7x - 2} < \frac{x}{5x+1}.$ *Ответ:* $x \in (-\infty; -\frac{1}{5}) \cup (\frac{2}{3}; \frac{4}{3}).$

5. $\log_{\frac{3}{7}} \frac{3x+5}{5x-7} > 0.$ *Ответ:* $x \in (-\infty; -\frac{5}{3}) \cup (6; +\infty).$

6. $5 \cdot 9^x + 22 \cdot 15^x - 15 \cdot 25^x < 0.$ *Ответ:* $x \in (1; +\infty).$

7. $7 \cdot 16^x - 11 \cdot 28^x + 4 \cdot 49^x > 0.$ *Ответ:* $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty).$

8. $25^x + 5^x - 30^x < 0.$ *Ответ:* $x \in (1; \infty).$

9. $\log_2 x + \log_2 (x-4) \ge \log_2 (x+14).$ *Ответ* $x \in [8; +\infty).$

10. $\log_3 (x^2 + 1) + 2 > 2\log_3 3x.$ *Ответ:* $x \in (0; +\infty).$

11. $\sqrt{4-x} < x - 2.$ *Ответ:* $x \in (3; 4].$

12. $\sqrt{x^2 - x - 12} < x.$ *Ответ:* $x \in [4; \infty).$

13. $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \ge 0.$ *Ответ:* $x \in (1; 9).$

14. $(x^3 - x + 2) > 4x^2(x^2 + 1)(x - 2).$ *Ответ:* $x \in R..$

15. $\dfrac{x^2+4x-1}{x^2+4x+3} \le \dfrac{1}{x+1}$. *Ответ:* $x \in [-4;-3) \cup (-1;1)$.

16. $\begin{cases} 3x + \dfrac{2x-1}{2} \ge 2x - \dfrac{1}{4}, \\ 5x - \dfrac{3x-1}{4} \le 3x + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$ *Ответ:*нет решений.

17. $x^2 > a$

Ответ: $x \in R$, если $a < 0$; $|x| > \sqrt{a}$, если $a > 0$; $x \in R$, кроме 0, если $a = 0$.

18. $\log_{|x^2-1|}(4x+4) < 1$. *Ответ:* $x \in (-1;0) \cup (0;1) \cup (1;\sqrt{2}) \cup (5;\infty)$.

19. $|x^2-2x| < x$. *Ответ:* $x \in (1;3)$.

20. $2^x \cdot 3^x \ge 36^x \cdot \sqrt{6}$. *Ответ:* $x \in (-\infty;0,5)$.

21. $3^{2x} - 4\cdot 3^x + 3 \le 0$. *Ответ:* $x \in [0;1]$.

22. $(x-6)(8^{x-6}-64) < 0$. *Ответ:* $x \in (6;8)$.

23. $(5^x-125)\cdot(3^x-81) < 0$. *Ответ:* $x \in (3;4)$.

24. $49\cdot 7^x \ge 7^{3x+3}$. *Ответ:* $x \in (-0,5;\infty)$.

25. $\left(\dfrac{4}{11}\right)^{6x-3} \le 1$. *Ответ:* $x \in [0,5;\infty)$.

26. $\log_3(4-2x) \ge 1$. *Ответ:* $x \in (-\infty;0,5]$.

27. $\log_\pi(3x+2) \le \log_\pi(x-1)$. *Ответ:* нет решений.

28. $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 \ge 0$. *Ответ:* $x \in (0;1] \cup [8;\infty)$.

29. $\log_{5x-1} 6 \le 0$. *Ответ:* $x \in (0,2;0,4)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Функции синус, косинус, тангенс, котангенс называются *основными тригонометрическими функциями*. При этом по определению синусом угла α называется ордината точки M на тригонометрическом круге (см. рис. 1), получающейся поворотом точки $M_0(1;0)$ на угол α радиан вокруг начала координат. Аналогично, косинусом угла α называется абсцисса точки M. Кроме того,

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{при } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{при } \alpha \neq \pi n,\ n \in Z.$$

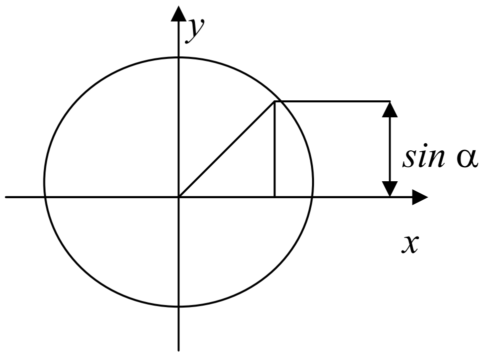


Рис. 1.

Из определения вытекает, что $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ при $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

2. Полезно запомнить таблицу значений тригонометрических функций углов в 30°(или π /6 радиан), 45°(π/4 рад.), 60°(π/3 рад.).

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
0° (0 радиан)	0	1	0	∞
30°(π/6)	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
60°(π/3)	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
45°(π/4)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1
90°(π/2)	1	0	∞	0

3. Функции синус, тангенс и котангенс являются нечетными, а функция косинус – четная , т. е. для всех допустимых значений x выполнены равенства

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad tg(-x) = -tgx, \quad ctg(-x) = -ctgx.$$

Функции синус и косинус – периодические с периодом 2π, а функции тангенс и котангенс – периодические с периодом π. Таким образом,

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x, \cos(x + 2\pi n) = \cos x, tg(x + \pi n) = tgx, ctg(x + \pi n) = ctgx$$

для всех допустимых значений x и для всех $n \in Z$.

4. Формулы, позволяющие упрощать выражения вида

$$\sin(\frac{\pi n}{2} \pm x), \quad \cos(\frac{\pi n}{2} \pm x), \quad tg(\frac{\pi n}{2} \pm x), \quad ctg(\frac{\pi n}{2} \pm x)$$

называются формулами приведения. С учетом периодичности основных тригонометрических функций, а также соображений четности, достаточно рассмотреть лишь случаи n = 1, 2, 3 для синуса и косинуса и n = 1 для тангенса и котангенса:

$$\sin(\frac{\pi}{2} \pm x) = \cos x, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x, \quad \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x,$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} \pm x) = -\cos x, \quad \cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x, \quad \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x,$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi \pm x) = -\cos x,$$

$$tg(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp ctgx, \quad ctg(\frac{\pi}{2} \pm x) = \mp tgx.$$

5. Равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, справедливое для всех значений x, называется основным тригонометрическим тождеством. Из него вытекает, что

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; 1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n, \quad n \in Z.$$

6. Формулы сложения.

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \ \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \ \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y;$$

$$\mathrm{tg}(x + y) = \frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y}, \text{ при } x, y, x + y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}(x - y) = \frac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y}, \text{ при } x, y, x - y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

7. Формулы двойного аргумента.

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x; \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\mathrm{tg}2x = \frac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}, \text{ при } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

8. Формулы тройного аргумента.

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

9. Формулы понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

10. Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} \text{ при } x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y} \text{ при } x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

11. Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right];$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right].$$

12. Формулы, использующие тангенс половинного аргумента

$$\sin x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}}; \ \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}} \text{ при } x \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Крамор В.С. Алгебра и начала анализа.– М.: Высшая школа, 1981.– 336 с.
2. Мордкович А. Г. Математика..– М.: Просвещение, 1981.– 339 с.
3. Кремер Н.Ш., Константинова О.Г., Фридман М.Н. Математика абитуриентам экономических вузов: Учеб. пособие для вузов/ Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. –509 с.
4. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. В двух книгах. Кн.1 / Под редакцией М.И. Сканави / – М. .: Высшая школа, 1994.– 528 с.
5. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. В двух книгах. Кн.2 / Под редакцией М.И. Сканави / – М. .: Высшая школа, 1994.– 368 с.
6. Амельник В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами. Минск.: Асар, 1996.– 464 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ