

**Министерство образования и науки Российской
Федерации
АССОЦИАЦИЯ КАФЕДР ФИЗИКИ
ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗов РОССИИ**



В.М.АНИСИМОВ, О.Н.ТРЕТЬЯКОВА

**ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС ФИЗИКИ.
ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ
ФИЗИКИ**

под ред. Г.Г. Спирина

*Допущено Министерством образования и науки
Российской Федерации в качестве учебного пособия для
студентов высших учебных заведений, обучающихся по
техническим направлениям подготовки и специальностям*

Москва
Издательство МАИ
2007

УДК 53 (075)

ББК 22.3

А 67

Рецензенты:

Кафедра общей физики и ядерного синтеза МЭИ:
зав. кафедрой доктор техн. наук, профессор Комов А.Т,
канд. физ.-мат. наук доцент Иванова И.В.;
доктор физ.-мат. наук, профессор Калашников Н.П.

А 67 Анисимов В.М., Третьякова О.Н.

Практический курс физики. Основы квантовой физики /под. ред.
Г.Г. Спирина, 2-е изд. испр. – М.: Изд-во МАИ, 2007: - 162 с. ил.

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса
общей физики для технических вузов.

В пособии кратко изложена теория, приведены задачи с
решениями и задачи для самостоятельного решения с ответами по
разделам, изучаемым в курсе общей физики.

Для студентов и преподавателей технических вузов.

ISBN 978-5-7035-1856-4

© В.М.Анисимов, О.Н.Третьякова. 2007

Предисловие

Предлагаемое читателю учебное пособие предназначено для студентов технических вузов. Оно является последней частью единого в учебно-методическом плане «Практического курса физики», созданного на кафедре физики МАИ под редакцией профессора Г.Г. Спирина в рамках работы Ассоциации кафедр физики технических вузов России.

Каждый раздел пособия начинается с краткого изложения теории. Целью теоретической части раздела является не дублирование лекционного курса, а напоминание основных понятий, определений, законов и формул, которые необходимы для решения задач.

Далее в каждом разделе приводятся несколько типовых задач с подробным их решением. Это даст возможность студентам ознакомиться с методами решения основных типов задач.

Затем в каждом разделе приведены задачи для самостоятельного решения, которые могут использоваться для проведения практических занятий, выполнения расчетных работ (РР), проведения зачетов и экзаменов, и даны ответы к ним. В завершении пособия предложены варианты РР для всех студентов, а также методические рекомендации по проведению дополнительных занятий для студентов с недостаточно высоким предварительным уровнем подготовки. Это предполагает использование пособия при двухуровневой методике обучения.

По этому пособию проводятся занятия на кафедре физики Московского авиационного института (государственного технического университета) со студентами всех специальностей технического профиля.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам д.т.н. профессору А.Г. Комову, к.ф.-м.н. доценту И.В. Ивановой и д.ф.-м.н. проф. Н.П.Калашникову за внимательное прочтение пособия.

Авторы с благодарностью примут замечания и пожелания читателей, направленные на улучшение содержания книги, по адресу: 125871, Москва, Волоколамское шоссе, д.4, МАИ, кафедра физики, по электронному адресу: Spirin@physikas.ru или tretiyakova_olga@mail.ru, или по телефону: 8- 499 - 158-86-98.

1. Основы квантовой оптики

1.1. Основные понятия и законы

Тепловое излучение

Электромагнитное излучение, возникающее за счёт внутренней энергии нагретого тела и зависящее только от температуры и оптических свойств этого тела, называется тепловым излучением.

Количественной характеристикой теплового излучения служит спектральная плотность энергетической светимости или монохроматическая испускательная способность. Эта величина определяется соотношениями:

$$M_{\nu T} = \frac{dM_e}{d\nu}, \quad M_{\lambda T} = \frac{dM_e}{d\lambda}, \quad (1.1)$$

где ν – частота излучения, λ – длина волны излучения, M_e – энергетическая светимость или интегральная испускательная способность, по определению равная отношению потока энергии $d\Phi_e$, исходящего от рассматриваемого малого участка поверхности, к площади dS этого участка

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dS} = \frac{dW_e}{dSdt}, \quad (1.2)$$

где $\Phi_e = \frac{dW_e}{dt}$ – поток энергии (мощность), испускаемый нагретым телом, W_e – энергия излучения.

При известных $M_{\nu T}$ или $M_{\lambda T}$ соотношения (1.1) позволяют вычислить энергетическую светимость тела во всём спектральном диапазоне

$$M_e = \int_0^{\infty} M_{\nu T} d\nu, \quad M_e = \int_0^{\infty} M_{\lambda T} d\lambda, \quad (1.3)$$

причем $M_{\lambda T} = \frac{c}{\lambda^2} M_{\nu T}$.

Закон Кирхгофа

Закон Кирхгофа гласит: отношение спектральной плотности энергетической светимости тела $M_{\nu T}$ к его спектральному коэффициенту поглощения $a_{\nu T}$ равно спектральной плотности

энергетической светимости абсолютно чёрного тела $M_{\nu T}^0$, являющейся функцией только температуры и частоты.

$$\left(\frac{M_{\nu T}}{a_{\nu T}}\right)_1 = \left(\frac{M_{\nu T}}{a_{\nu T}}\right)_2 = \dots = \frac{M_{\nu T}}{a_{\nu T}} = M_{\nu T}^0. \quad (1.4)$$

где $M_{\nu T}^0$ - спектральная плотность энергетической светимости абсолютно чёрного тела, $a_{\nu T}$ - спектральный коэффициент поглощения.

Для серых тел вводится величина a_T - коэффициент теплового излучения или степень черноты

$$a_T = \int_0^{\infty} a_{\nu T} M_{\nu T}^0 d\nu / \int_0^{\infty} M_{\nu T}^0 d\nu$$

или

$$M_e = a_T M_e^0 \quad (1.5)$$

Формула Планка

Формула Планка описывает распределения энергии в спектре излучения абсолютно чёрного тела, вид которого представлен на рис. 1.1 а, б.

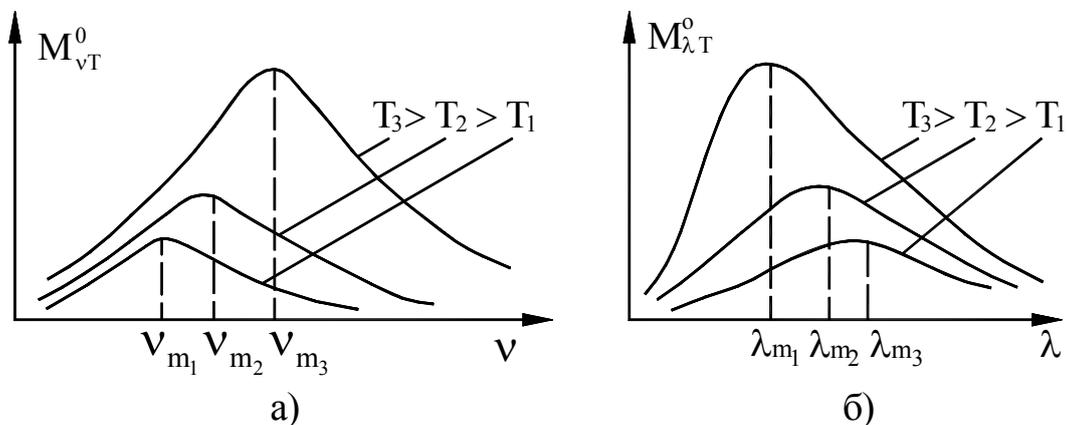


Рис. 1.1

Спектральная плотность энергетической светимости абсолютно чёрного тела определяется формулой Планка:

$$M_{\nu T}^0 = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (e^{h\nu/kT} - 1)}, \quad (1.6)$$

или

$$M_{\lambda T}^0 = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 (e^{hc/kT\lambda} - 1)}. \quad (1.7)$$

Закон Стефана – Больцмана

Закон Стефана-Больцмана гласит: энергетическая светимость абсолютно черного тела $M_{\nu T}^0$ пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры.

$$M_e^0 = \sigma T^4, \quad (1.8)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м²·К⁴ – постоянная Стефана-Больцмана.

Законы смещения и излучения Вина

Закон смещения Вина гласит: длина волны λ_m , соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости $M_{\lambda T}^0$, абсолютно черного тела, обратно пропорциональна его абсолютной температуре.

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (1.9)$$

где $b = 2,898 \cdot 10^{-3}$ м·К – постоянная Вина.

Максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(M_{\lambda T}^0)_{\max}$ абсолютно чёрного тела пропорциональна пятой степени его абсолютной температуры (закон излучения Вина).

$$(M_{\lambda T}^0)_{\max} = CT^5, \quad (1.10)$$

где $C = 1,29 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³·К⁵).

Квантовые свойства света (фотоны; энергия, импульс, масса фотона)

Согласно гипотезе Планка свет испускается, поглощается и распространяется в виде дискретных порций (квантов), называемых фотонами. Фотон – элементарная частица, квант электромагнитного излучения (в узком смысле – света), которая движется со скоростью света в вакууме c и имеет массу покоя, равную нулю.

Энергия фотона зависит от частоты и равна

$$\varepsilon = h\nu, \quad (1.11)$$

где ν - частота света; $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Масса фотона согласно теории относительности Эйнштейна, определяется его энергией и равна

$$m = h\nu / c^2. \quad (1.12)$$

Так как фотон движется со скоростью света, то он обладает импульсом, величина которого равна $p = mc$ или

$$p = h\nu/c. \quad (1.13)$$

Направление вектора импульса совпадает с направлением скорости распространения электромагнитной световой волны, характеризуемым волновым вектором \vec{k} , величина которого равна волновому числу

$$k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1.14)$$

где λ - длина волны.

С учетом соотношения $\nu = c/\lambda$ импульс фотона (1.13) может быть выражен через волновое число (1.14):

$$p = \hbar k, \quad (1.15)$$

где $\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Векторная запись импульса фотона имеет вид

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}. \quad (1.16)$$

Энергия фотона (1.11) также может быть выражена через постоянную \hbar и записана в виде

$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad (1.17)$$

где $\omega = 2\pi\nu$ - циклическая частота света.

Фотон, подобно любой движущейся частице, обладает энергией, массой и импульсом. Все эти три корпускулярные характеристики фотона связаны с волновыми характеристиками света – его частотой ω и волновым вектором \vec{k} .

С точки зрения квантовых представлений, поток энергии монохроматического электромагнитного излучения Φ_e связан с потоком фотонов $\dot{N}_\phi = dN_\phi/dt$ и с их энергией $h\nu$ и определяется соотношением

$$\Phi_e = h\nu \dot{N}_\phi. \quad (1.18)$$

Плотность потока фотонов

$$\dot{n}_\phi = d\dot{N}_\phi/dS \quad (1.19)$$

Интенсивность падающего излучения или энергетическая освещенность E_e равна

$$E_e = h\nu \cdot \dot{n}_\phi. \quad (1.20)$$

Давление света

Наличие импульса у фотона указывает на то, что свет, падающий на поверхность какого-либо тела, должен оказывать на него давление. Световое давление, которое оказывает на поверхность тела поток Φ_e монохроматического излучения, падающего перпендикулярно поверхности, можно выразить соотношениями

$$p = (1 + \rho) \cdot E_e / c \quad (1.21)$$

или

$$p = (1 + \rho) \cdot w_e, \quad (1.22)$$

где E_e – интенсивность падающего излучения; c – скорость света в вакууме; $w_e = dW/dV$ – объемная плотность энергии излучения (энергия в элементе объема dV); ρ – коэффициент отражения.

Фотоэлектрический эффект (фотоэффект)

Различают фотоэффект внешний и внутренний.

Внешним фотоэлектрическим эффектом (фотоэлектронной эмиссией) называют испускание электронов веществом под действием электромагнитного излучения в вакуум или другую среду.

Внутренний фотоэффект – это явление перераспределения электронов по энергетическим состояниям в конденсированной среде, связанное с квантовыми переходами электронов из связанных состояний в свободные без выхода их из среды.

В полупроводниках и диэлектриках внутренний фотоэффект проявляется в изменении электропроводности среды (фотопроводимость), ее диэлектрической проницаемости (фотоэлектрический эффект) или в возникновении фото – ЭДС.

Фотоэффект может наблюдаться в газах на отдельных атомах и молекулах (фотоионизация). Первичным актом здесь является поглощение фотона и ионизация с испусканием электрона. Закон сохранения энергии при внешнем фотоэффекте выражается уравнением Эйнштейна.

$$h\nu = A_B + T_{max}, \quad (1.23)$$

где T_{max} – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона, A_B – работа выхода.

Для процесса фотоионизации атома или молекулы

$$T = h\nu - E_i \quad (1.24)$$

где T – кинетическая энергия фотоэлектрона, E_i – энергия ионизации.

Работа выхода имеет смысл наименьшей энергии, требуемой для удаления электрона из металла в вакуум.

Если энергия фотона $h\nu \ll m_{0e} \cdot c^2 \approx 0,5 \text{ МэВ}$, то

$$T_{\max} = \frac{m_{0e} \cdot v_{\max}^2}{2}, \quad (1.25)$$

где v_{\max} – максимальная скорость фотоэлектронов, m_{0e} – масса покоя электрона.

В противном случае следует пользоваться релятивистским выражением для кинетической энергии фотоэлектронов.

$$T_{\max} = m_{0e} c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\max}^2}} - 1 \right), \quad (1.26)$$

где $\beta_{\max} = v_{\max}/c$. Если $A_B \ll h\nu$, то $h\nu \approx T_{\max}$.

Внешний фотоэффект возможен только в том случае, когда энергия фотона больше или, в крайнем случае, равна A_B , т.е.

$$h\nu \geq A_B. \quad (1.27)$$

Откуда необходимое условие возможности фотоэффекта для длины волны падающего света записывается в виде

$$\lambda \leq h \cdot c / A_B. \quad (1.28)$$

Наибольшая длина волны, при которой эффект еще наблюдается, называется красной границей фотоэффекта и равна

$$\lambda_{\text{кр}} = h \cdot c / A_B. \quad (1.29)$$

Зависимость фототока I от напряжения между катодом и анодом в установке для изучения фотоэффекта приведена на рис. 1.2.

Фототок насыщения

$$I_H = e \cdot \dot{N}_e, \quad (1.30)$$

где \dot{N}_e – число фотоэлектронов, вырываемых из катода за единицу времени.

Напряжение задержки U_3 – это тормозящая разность потенциалов, необходимая, чтобы остановить выбитые электроны

$$eU_3 = T_{\max} \quad (1.31)$$

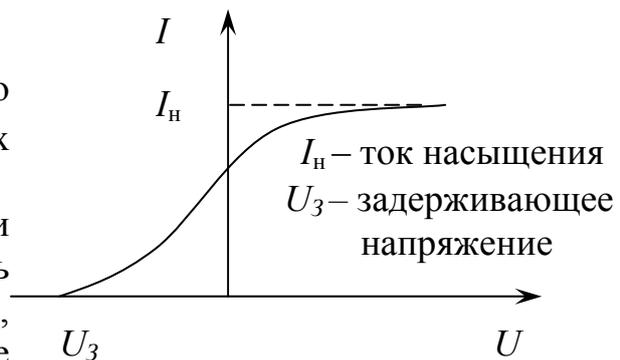


Рис. 1.2.

Законы Столетова для внешнего фотоэффекта:

1. Количество электронов, выбиваемых с поверхности катода в единицу времени, а, следовательно, и ток насыщения пропорциональны интенсивности падающего излучения

$$\dot{N}_e \sim E_e \quad (1.32)$$

$$I_H \sim E_e \quad (1.33)$$

2. Максимальная скорость выбитых электронов возрастает с увеличением частоты падающего излучения в соответствии с соотношением

$$T_{max} \sim h\nu \quad (1.34)$$

Эффект Комптона

Эффект Комптона - упругое рассеяние монохроматического электромагнитного излучения на свободных электронах, сопровождающееся увеличением длины волны. Он наблюдается для фотонов рентгеновского и γ - излучений.

Формула Комптона, определяющая изменение длины волны рассеянного излучения, имеет вид:

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_C \cdot \sin^2\theta/2, \quad (1.35)$$

где λ и λ' - соответственно, длины волн до и после рассеяния; θ - угол рассеяния; λ_C - так называемая комптоновская длина волны электрона, равная $\lambda_C = 2,4 \cdot 10^{-12}$ м.

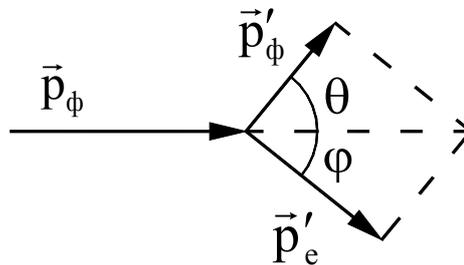


Рис.1.3.

Эффект Комптона представлен на диаграмме рис. 1.3, иллюстрирующей закон сохранения импульса при упругом рассеянии фотонов на свободных электронах. До столкновения электрон покоится. Его импульс $\vec{p}_e = 0$. После столкновения электрон отдачи имеет импульс \vec{p}'_e ; \vec{p}_ϕ и \vec{p}'_ϕ - импульсы налетающего и рассеянного фотонов; θ - угол рассеяния фотона; ϕ - угол, под которым летит электрон отдачи относительно направления падающего фотона (угол отдачи).

В рентгеновском диапазоне длин волн и для γ - излучения энергия фотонов соизмерима с собственной энергией электрона $\varepsilon_{0e} = m_{0e} \cdot c^2 = 0,5$ МэВ. Так как при рассеянии фотонов такой высокой энергии электрон может приобрести значительную кинетическую

энергию, при рассмотрении теории эффекта Комптона необходимо использовать законы релятивистской механики.

Если ε_ϕ и ε'_ϕ энергия фотона, $\varepsilon_{0e} = m_{0e} \cdot c^2$ и $\varepsilon'_e = m_e c^2$ - энергия электрона, соответственно, до и после столкновения, то исходная система уравнений теории упругого столкновения фотона со свободным электроном включает закон сохранения энергии

$$\varepsilon_\phi + \varepsilon_{0e} = \varepsilon'_\phi + \varepsilon'_e, \text{ или } \hbar\omega + m_{0e}c^2 = \hbar\omega' + m_e c^2, \quad (1.36)$$

$$\text{где } m_e = m_{0e} / \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

и закон сохранения импульса (рис.1.3)

$$\vec{p}_\phi = \vec{p}'_\phi + \vec{p}'_e, \text{ или } \hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + m\vec{v}, \quad (1.37)$$

$$\text{где } \hbar\vec{k} = \hbar\omega/c, \hbar\vec{k}' = \hbar\omega'/c.$$

Для частицы с нулевой массой покоя (фотона) энергия и импульс связаны соотношением $E = cp$. Тогда закон сохранения энергии примет вид

$$cp_\phi + m_{0e}c^2 = cp'_\phi + \sqrt{(cp'_\phi)^2 + (m_{0e}c^2)^2}. \quad (1.38)$$

Из закона сохранения импульса (1.37) по теореме косинусов получим

$$p_e^2 = p_\phi'^2 + p_\phi^2 - 2\vec{p}_\phi \vec{p}'_\phi = p_\phi'^2 + p_\phi^2 - 2p_\phi p'_\phi \cos\theta$$

Возводя в квадрат закон сохранения энергии в виде:

$$cp_\phi - cp'_\phi + m_{0e}c^2 = \sqrt{(cp'_\phi)^2 + (m_{0e}c^2)^2}, \text{ получим}$$

$$(cp_\phi)^2 + (cp'_\phi)^2 + (m_{0e}c^2)^2 - 2c^2 p_\phi p'_\phi + 2m_{0e}c^3(p_\phi - p'_\phi) = (cp'_\phi)^2 + (m_{0e}c^2)^2$$

После подстановки значения $p_e'^2$ из предыдущего равенства и сокращения останется соотношение:

$$m_{0e}c(p_\phi - p'_\phi) = p_\phi p'_\phi (1 - \cos\theta) \quad (1.39)$$

Разделив левую и правую части на $m_{0e}cp_\phi p'_\phi$, получим

$$\frac{1}{p'_\phi} - \frac{1}{p_\phi} = \frac{1}{m_{0e}c} (1 - \cos\theta) \quad (1.40)$$

$$p'_\phi = \frac{h}{\lambda'}; \quad p_\phi = \frac{h}{\lambda}, \quad (1.41)$$

тогда

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_{0e}c} (1 - \cos\theta), \quad (1.42)$$

или $\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_{0e}c} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$; $\frac{h}{m_{0e}c} = \lambda_c = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}$ - комптоновская длина

волны.

Если требуется найти скорость электрона отдачи, следует добавить еще одно независимое уравнение. Например, определение кинетической энергии

$$T = \varepsilon_{0e} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \quad (1.43)$$

где $\varepsilon_{0e} = m_{0e}c^2$, $\beta = v/c$.

Можно найти скорость

$$v = c \frac{\sqrt{(T + 2\varepsilon_{0e})T}}{T + \varepsilon_{0e}}. \quad (1.44)$$

1.2. Примеры решения задач

Задача 1.1. Какую мощность излучения имеет Солнце? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температура поверхности Солнца $T = 6000 \text{ К}$. Радиус Солнца $r_c = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$.

Решение. Мощность излучения $d\Phi_e$ малого участка поверхности dS абсолютно черного тела определяется соотношением

$$d\Phi_e = M_e^0 \cdot dS,$$

где энергетическая светимость абсолютно черного тела M_e^0 определяется законом Стефана-Больцмана

$$M_e^0 = \sigma \cdot T^4, \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4\text{)}.$$

Так как температура поверхности Солнца во всех точках одинакова, то мощность излучения всей поверхности Солнца площадью $S = 4\pi \cdot r_c^2$ определяется соотношением

$$\Phi_e = \sigma \cdot T^4 \cdot 4\pi \cdot r_c^2 = 4,46 \cdot 10^{36} \text{ Вт}.$$

Задача 1.2. В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если источник света: а) спираль электрической лампочки ($T = 3000 \text{ К}$); б) поверхность Солнца ($T=6000 \text{ К}$); в) атомная бомба, в которой в момент взрыва достигается температура $T=10^7 \text{ К}$? Излучение считать близким к излучению абсолютно чёрного тела.

Решение: Согласно закону смещения Вина искомая длина волны определяется по формуле $\lambda_m = \frac{b}{T}$, $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Произведя вычисления, получим:

а) $\lambda_m = 10^{-6} \text{ м} = 1 \text{ мкм}$ – инфракрасная область;

б) $\lambda_m = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,5 \text{ мкм}$ - область видимого света;

в) $\lambda_m = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,3 \text{ нм}$ - область рентгеновских лучей.

Задача 1.3. В спектре Солнца максимум спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны $\lambda_m = 0,5 \text{ мкм}$, радиус Солнца $r_C = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$. Приняв, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, найти солнечную постоянную. Солнечной постоянной называется величина, равная поверхностной плотности потока энергии излучения Солнца вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца, $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ м}$.

Решение. По определению поверхностная плотность потока излучения, падающего на данную поверхность, то есть энергетическая освещенность E_e определяется по формуле

$$E_e = d\Phi_e / dS,$$

где $d\Phi_e$ - поток солнечной энергии излучения, падающий на элемент сферической поверхности dS .

В силу равномерности излучения Солнца по всем направлениям величина освещенности E_e будет во всех точках сферы радиуса r одинакова.

Это позволяет определить необходимую мощность излучения Солнца Φ_e , приходящуюся на всю поверхность сферы r

$$\Phi_e = E_e \cdot S,$$

где $S = 4\pi r^2$, r - расстояние от Солнца до Земли.

С другой стороны, эта мощность определяется согласно закону сохранения энергии мощностью теплового излучения Солнца как абсолютно черного тела, имеющего форму сферы радиуса r_C . Мощность теплового излучения Солнца Φ_{eC} - определяется произведением энергетической светимости M_{eC}^0 и площади поверхности Солнца

$$\Phi_{eC} = M_{eC}^0 \cdot S_C,$$

где $S_C = 4\pi r_C^2$, r_C - радиус Солнца.

Мощность излучения постоянна

$$\Phi_{eC} = \Phi_e.$$

Откуда, с учетом выражения для мощности излучения найдем искомую величину E_e

$$E_e = M_e \left(\frac{r_c}{r} \right)^2.$$

Энергетическая светимость абсолютно черного тела определяется на основании закона Стефана-Больцмана (1.8)

$$M_e = \sigma T_c^4,$$

где T_c - температура поверхности Солнца, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴), а температура излучения - по заданной длине волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, из закона $T_c = b/\lambda_m$, $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К.

Расчетная формула для искомой величины плотности потока излучения вблизи Земли в итоге такова

$$E_e = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4 \left(\frac{r_c}{r} \right)^2 = 1,4 \text{ кВт/м}^2.$$

Задача 1.4. Электрическая печь потребляет мощность $P = 500$ Вт. Температура ее внутренней поверхности при открытом небольшом отверстии диаметром $d = 0,05$ м равна $T = 973$ К. Какая часть потребляемой мощности α излучается стенками?

Решение. При установившемся тепловом режиме печи вся потребляемая ею каждую секунду электрическая энергия P излучается отверстием и стенками

$$P = \Phi_e' + \Phi_e''$$

где Φ_e' , Φ_e'' - потоки излучения, испускаемые отверстием и стенками соответственно. В задаче требуется найти $\alpha = \Phi_e'' / P$. Ее можно выразить так

$$\alpha = \frac{P - \Phi_e'}{P} = 1 - \frac{\Phi_e'}{P}.$$

Рассмотрим излучение печи через небольшое отверстие в ней как излучение абсолютно черного тела. Тогда $\Phi_e' = M_e^0 \cdot S$, где M_e^0 - энергетическая светимость абсолютно черного тела, согласно закону Стефана-Больцмана равная $M_e^0 = \sigma T^4$, а $S = \pi d^2 / 4$ - площадь отверстия.

Значит, искомая величина α определяется выражением

$$\alpha = 1 - \frac{\pi d^2 \sigma T^4}{4 P} = 0,8.$$

Задача 1.5. Вольфрамовая нить нагревается в вакууме током силой $I = 1$ А до температуры $T_1 = 1000$ К. При какой силе тока нить

накаляется до температуры $T_2 = 3000$ К? Коэффициенты теплового излучения (степени черноты) вольфрама и его удельные сопротивления, соответствующие температурам T_1, T_2 равны $a_{T_1} = 0,115$; $a_{T_2} = 0,334$; $\rho_1 = 25,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, $\rho_2 = 96,2 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Решение. Рассмотрим излучающее тело при установившемся тепловом режиме. Согласно закону сохранения энергии, будем иметь $P = \Phi_e$, где P - мощность, потребляемая от источника; Φ_e - поток энергии теплового излучения, испускаемый нитью.

Пусть r - радиус нити; l - длина нити, I - сила тока в проводнике; R - сопротивление проводника $R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{\pi r^2}$. Тогда мощность, потребляемая нитью накаливания, на основании закона Джоуля - Ленца может быть представлена в виде

$$P = I^2 R = I^2 \cdot \rho \cdot l / \pi \cdot r^2.$$

Поток энергии теплового излучения, испускаемый нитью, равен

$$\Phi_e = M_e^c 2\pi r \cdot l,$$

где M_e^c - энергетическая светимость вольфрама, которая может быть выражена через коэффициент теплового излучения $a(T)$ и энергетическую светимость абсолютно черного тела. M_e^c согласно формуле (1.5) будет равна

$$M_e^c = a(T) \cdot M_e^0,$$

где по закону Стефана-Больцмана

$$M_e^0 = \sigma T^4.$$

Таким образом, поток энергии теплового излучения, испускаемый нитью, записывается в виде

$$\Phi_e = a(T) \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot 2\pi \cdot r \cdot l.$$

С учетом последнего выражения находим соотношения для двух значений температуры

$$I_1^2 = a(T_1) \cdot \sigma \cdot T_1^4 \cdot 2\pi^2 \cdot r^3 / \rho,$$

$$I_2^2 = a(T_2) \cdot \sigma \cdot T_2^4 \cdot 2\pi^2 \cdot r^3 / \rho.$$

Разделив их почленно и выразив I_2 , из полученного соотношения найдем

$$I_2 = I_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \left(\frac{\rho(T_1) a(T_2)}{\rho(T_2) a(T_1)} \right)^{1/2} = 7,9 \text{ А.}$$

Задача 1.6. Во сколько раз надо увеличить мощность излучения абсолютно черного тела для того, чтобы максимум спектральной энергетической светимости сместился от красной границы видимого спектра к его фиолетовой границе?

Решение. Длина волны, соответствующая красной границе видимого спектра, приблизительно равна $\lambda_k = 0,76$ мкм, а фиолетовой - $\lambda_\phi = 0,38$ мкм.

Мощность излучения абсолютно черного тела определяется его энергетической светимостью, которая согласно закону Стефана-Больцмана равна $M_e^0 = \sigma T^4$.

Связь между температурой абсолютно черного тела и длиной волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной энергетической светимости, определяется законом Вина $T = b/\lambda_m$.

Таким образом, энергетическая светимость абсолютно черного тела может быть выражена через величину λ_m в виде

$$M_e^0 = \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m} \right)^4.$$

Искомое изменение мощности излучения абсолютно черного тела при смещении максимума спектральной энергетической светимости от λ_k до λ_ϕ определяется соотношением

$$n = M_e^0(T_\phi) / M_e^0(T_k) = (\lambda_k / \lambda_\phi)^4 = 16.$$

Мощность излучения увеличится в 16 раз.

Задача 1.7. Определить установившуюся температуру тонкой пластинки, расположенной вблизи Земли за пределами ее атмосферы перпендикулярно лучам Солнца. Считать температуру пластинки одинаковой во всех ее точках. Рассмотреть два случая, считая пластинку телом: 1) абсолютно черным, 2) серым.

Решение. Температура пластинки установится, когда поток излучения Φ_{e1} , испускаемый нагретой пластинкой, станет равным потоку излучения Φ_{e2} , поглощаемого пластинкой $\Phi_{e1} = \Phi_{e2}$.

1). Абсолютно черное тело, согласно определению, поглощает весь падающий поток $\Phi_{e2} = E_e \cdot S$, S - площадь пластинки, обращенная к Солнцу.

Испускаемый поток, излучения Φ_{e1} найдем с учетом того, что излучают обе стороны пластинки $\Phi_{e1} = M_e^0 \cdot 2 \cdot S$, где по закону Стефана-Больцмана $M_e^0 = \sigma T^4$. Отсюда найдем

$$T = (E_e / 2\sigma)^{1/4} = 330 \text{ К}$$

2). Серое тело поглощает только часть падающей энергии, которая равна $\Phi_e = a_T \cdot E_e \cdot S$.

Испускаемый поток излучения Φ_{e1} найдем на основании (1.2), (1.5), (1.8) $\Phi_{e1} = a_T \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot 2 \cdot S$.

Откуда следует, что и в этом случае установившаяся температура пластины определяется той же формулой. Установившаяся температура пластины одинакова для абсолютно черного и серого тел и составляет 330 К.

Задача 1.8. Определить энергетическую светимость абсолютно черного тела, приходящуюся на узкий спектральный интервал длин волн $\Delta\lambda = 10 \text{ \AA}$ вблизи максимума спектральной плотности энергетической светимости при температуре $T = 3000 \text{ К}$.

Решение. Энергетическая светимость тела ΔM_e , приходящая на спектральный интервал длин волн от λ_1 до λ_2 , на основании соотношения (1.1) равна

$$\Delta M_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda T} d\lambda.$$

Для абсолютно черного тела в этой формуле следует подставить величину $M_{\lambda T}^0$, которая определяется по формуле Планка (1.7).

Заданная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ значительно меньше среднего значения длины волны, соответствующей середине этого интервала $\langle \lambda \rangle = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 = \lambda_m$, где по условию задачи λ_m соответствует длине волны, на которую приходится максимум спектральной энергетической светимости, и определяется законом Вина. При заданной температуре $T = 3000 \text{ К}$ значение $\langle \lambda \rangle = \lambda_m \approx 10^{-6} \text{ м}$. Таким образом,

$$\frac{\Delta\lambda}{\langle \lambda \rangle} = \frac{10^{-9}}{10^{-6}} = 10^{-3} \ll 1.$$

В таком случае расчет величины ΔM_e может быть выполнен по формуле

$$\Delta M_e \approx M_{\lambda T}^0(\lambda_m) \Delta\lambda,$$

где $M_{\lambda T}^0(\lambda_m)$ соответствует максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела и определяется соотношением (1.10).

Искомая величина ΔM_e определяется соотношением

$$\Delta M_e \approx CT^5 \Delta\lambda \approx 3,2 \text{ кВт/м}^2.$$

Задача 1.9. Медный шарик диаметром $d = 1,2 \text{ см}$ поместили в откаченный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика $T_0 = 300 \text{ К}$. Считая поверхность шарика абсолютно черной, найти, через

сколько времени его температура уменьшится в $n = 2,0$ раза. Для меди плотность $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость $c_{\text{уд}} = 395 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$.

Решение. В данных условиях шарик теряет свою тепловую энергию Q лишь за счет теплового излучения с поверхности. Предполагается, что теплопроводность шарика настолько велика и его размер настолько мал, что температура во всех точках шарика успевает установиться приблизительно одинаковой и равной температуре его поверхности.

В таком случае за бесконечно малый промежуток времени dt в любой момент t тепловая энергия шарика уменьшается на величину

$$dQ = -c_{\text{уд}} m \cdot dT,$$

где dT - изменение (уменьшение) температуры шарика; $c_{\text{уд}}$ - удельная теплоемкость материала; m - масса шарика.

Это уменьшение тепловой энергии шарика определяется энергией теплового излучения dW , которая испускается за время dt . Если Φ_e - мощность теплового излучения, то за время dt тело излучает энергию $dW = \Phi_e dt$. Здесь Φ_e - поток теплового излучения для конечной поверхности излучателя S , равный $\Phi_e = S \cdot M_e^0$, где M_e^0 определяется по закону Стефана-Больцмана и $S = \pi d^2$ - площадь поверхности шарика.

Уравнение баланса энергии в рассматриваемом случае записывается в виде $dQ = dW$.

Выражая массу шарика через его объем $V = \pi d^3/6$ и плотность ρ , получим

$$m = \frac{1}{6} \pi d^3 \rho,$$

$$dQ = -\frac{1}{6} \pi d^3 c_{\text{уд}} \rho dT.$$

Откуда получим

$$dW = \pi d^2 \sigma T^4 dt.$$

Подставляя в уравнение баланса энергии эти выражения получим дифференциальное уравнение, связывающее температуру шарика T и время t . Его можно представить в виде

$$\frac{dT}{T^4} = -\frac{6\sigma}{c_{\text{уд}} \rho d} dt.$$

Интегрируя это уравнение

$$\int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T^4} = -\int_0^t \frac{6\sigma}{c_{\text{уд}} \rho d} dt,$$

получим

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}\right) = -\frac{6\sigma}{C_{y\theta}\rho d}t.$$

Откуда

$$t = \frac{C_{y\theta}\rho d}{18\sigma} \left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3} \right).$$

Учитывая, что $T_1 = T_0/n$ найдём искомое время остывания t

$$t = \frac{C_{y\theta} \cdot \rho \cdot d}{18\sigma \cdot T_0^3} (n^3 - 1) = 1,07 \cdot 10^4 \text{ с} = 2,97 \text{ ч}.$$

Задача 1.10. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует: 1) видимой части спектра с длиной волны $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$; 2) рентгеновскому излучению с длиной волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$; 3) гамма-излучению с длиной волны $\lambda = 0,01 \text{ \AA}$.

Решение. энергия фотона - $\varepsilon_{\text{ф}} = h\nu = hc/\lambda$,

импульс фотона - $p_{\text{ф}} = h\nu/c = \varepsilon_{\text{ф}}/c$,

масса фотона - $m_{\text{ф}} = h\nu/c^2 = \varepsilon_{\text{ф}}/c^2$,

причем частота фотона $\nu = c/\lambda$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$;

1) для видимого света $\lambda = 10^{-6} \text{ м}$.

$\varepsilon_{\text{ф}} = 2,07 \text{ эВ}$, $p_{\text{ф}} = 1,1 \cdot 10^{-27} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, $m_{\text{ф}} = 3,68 \cdot 10^{-36} \text{ кг}$.

2) для рентгеновского излучения $\lambda = 10^{-10} \text{ м}$.

$\varepsilon_{\text{ф}} = 12,4 \text{ кэВ}$, $p_{\text{ф}} = 6,62 \cdot 10^{-24} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, $m_{\text{ф}} = 2,21 \cdot 10^{-32} \text{ кг}$.

3) для гамма-излучения $\lambda = 10^{-12} \text{ м}$.

$\varepsilon_{\text{ф}} = 1,24 \text{ МэВ}$, $p_{\text{ф}} = 6,62 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$, $m_{\text{ф}} = 2,21 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$.

Задача 1.11. При какой длине волны энергия фотона окажется равной энергии покоя электрона?

Решение. Энергия фотона $\varepsilon_{\text{ф}} = h\nu$. Энергия покоя электрона $\varepsilon_{0e} = m_{0e} c^2$, где $m_{0e} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

По условию задачи $h\nu = m_{0e} c^2$; т.к. $\nu = c/\lambda$, то $\varepsilon_{\text{ф}} = hc/\lambda$. Откуда $\lambda = h/(m_{0e}c) = 0,024 \text{ \AA}$. Эта величина равна комптоновской длине волны электрона $\lambda_C = h/(m_{0e}c)$.

Задача 1.12. При каком значении скорости электрона его импульс равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 1 \text{ пм}$?

Решение. Прежде всего следует решить вопрос: нужно использовать при заданных условиях релятивистскую или классическую механику?

Для этого следует оценить энергию – электрона и сравнить ее с энергией покоя. Так как задан импульс электрона

$$p_e = p_\phi = h\nu/c,$$

то согласно релятивистской механике энергия покоя и импульс связаны соотношением

$$\varepsilon_e^2 = p_e^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4, \text{ или } \varepsilon_e^2 = (h\nu)^2 + m_{0e}^2 c^4.$$

$$\text{Так как } h\nu = \varepsilon_\phi, \text{ то } \varepsilon_e^2 = \varepsilon_\phi^2 + m_{0e}^2 c^4.$$

$$\text{Откуда } \varepsilon_e^2 / \varepsilon_{0e}^2 = 1 + \varepsilon_\phi^2 / \varepsilon_{0e}^2.$$

В задаче 1.10 энергия гамма-излучения с такой же длиной волны $\lambda = 10^{-12}$ м была равна $\varepsilon_\phi = 1,24$ МэВ. Так как энергия покоя электрона $\varepsilon_{0e} = m_{0e} c^2 = 0,51$ МэВ, то

$$\varepsilon_e / \varepsilon_{0e} = \sqrt{1 + \varepsilon_\phi^2 / \varepsilon_{0e}^2}, \text{ т.е. } \varepsilon_e / \varepsilon_{0e} \approx 2,7 > 1.$$

При таком соотношении полной энергии и энергии покоя частицы необходимо пользоваться релятивистской механикой.

Используя выражение для полной энергии электрона, найдем скорость частицы или отношение скорости частицы к скорости света $\beta = v/c$ из формулы Эйнштейна

$$\varepsilon_e = m_{0e} c^2 / (1 - \beta^2)^{1/2}.$$

Далее получим уравнение

$$1/(1 - \beta^2) = 1 + \varepsilon_\phi^2 / \varepsilon_{0e}^2.$$

Откуда

$$\beta^2 = 1/(1 + \varepsilon_\phi^2 / \varepsilon_{0e}^2).$$

Отношение $\varepsilon_\phi^2 / \varepsilon_{0e}^2$ можно преобразовать к виду

$$\varepsilon_\phi^2 / \varepsilon_{0e}^2 = \left(\frac{m_{0e} c \lambda}{h} \right)^2 = (\lambda / \lambda_C)^2.$$

где $\lambda_C = h / m_{0e} c$ – комптоновская длина волны, равная $2,4 \cdot 10^{-12}$ м.

Таким образом,

$$\beta^2 = \frac{1}{1 + (\lambda / \lambda_C)^2}.$$

Откуда скорость электрона

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + (\lambda / \lambda_C)^2}} = 2,8 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Задача 1.13. Объяснить наличие светового давления с точки зрения квантовой теории света.

Решение. С точки зрения квантовой теории световое давление объясняется передачей импульса фотона $h\nu/c$ поглощающей или отражающей стенке. Световой поток монохроматического света с частотой ν , падающий нормально на стенку, приносит в единицу времени на единичную поверхность стенки энергию E_e , равную

$$E_e = \dot{n}_\phi \cdot h\nu,$$

где \dot{n}_ϕ - число фотонов, падающих на единицу площади стенки в единицу времени. Так как каждый фотон обладает импульсом $p_\phi = h\nu/c$, то он сообщает поглощающей стенке импульс $h\nu/c$, а отражающей – $2h\nu/c$.

Если коэффициент отражения ρ , то число отраженных фотонов будет $\rho \cdot \dot{n}_\phi$, а число поглощенных - $(1-\rho) \cdot \dot{n}_\phi$. Тогда суммарный импульс, сообщенный в единицу времени единице поверхности, будет

$$2\rho \cdot \dot{n}_\phi \cdot h\nu/c + (1-\rho) \cdot \dot{n}_\phi \cdot h\nu/c = (1+\rho) \cdot \dot{n}_\phi h\nu/c = \frac{E_e}{c} (1+\rho).$$

Так как импульс, сообщенный в единицу времени единице поверхности, и есть давление, производимое на эту поверхность

$$p = (1 + \rho)E_e/c.$$

Так как $U_e = E_e/c$ - объемная плотность энергии излучения, то

$$p = (1 + \rho) \cdot U_e.$$

Задача 1.14. Пучок параллельных лучей падает нормально на зеркальную ($\rho = 1$) плоскую поверхность. Мощность (поток излучения) $\Phi_e = 0,6$ кВт. Определить силу давления F , испытываемую этой поверхностью.

Решение. Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления p на площадь S поверхности

$$F = p \cdot S,$$

давление света

$$p = \frac{E_e}{c} (1 + \rho),$$

где E_e – интенсивность падающего на поверхность излучения (энергетическая освещенность); c - скорость света вакууме; ρ - коэффициент отражения.

Умножив обе части последнего уравнения на S и с учетом определения $E_e S = \Phi_e$, где Φ_e - мощность потока излучения, найдем

$$F = \frac{\Phi_e}{c} (1 + \rho) = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

Задача 1.15. Монохроматический пучок света $\lambda = 0,662$ мкм падает нормально на поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0,8$. Определить количество фотонов $\dot{N}_{\Phi_{\text{погл}}}$, ежесекундно поглощаемых $S = 1 \text{ см}^2 = 10^{-4} \text{ м}^2$ поверхности, если давление света на поверхность $p = 1$ мкПа.

Решение. Пусть \dot{n}_ϕ - число падающих на единицу поверхности в единицу времени фотонов. Если S - площадь поверхности, то число поглощенных фотонов этой поверхностью будет

$$\dot{N}_{\Phi_{\text{погл}}} = \dot{n}_\phi \cdot S(1 - \rho).$$

Плотность потока фотонов \dot{n}_ϕ можно связать с энергетической освещенностью поверхности E_e

$$E_e = h\nu \cdot \dot{n}_\phi,$$

а энергетическую освещенность - с давлением света

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho),$$

Учитывая связь $\nu = c/\lambda$, найдем

$$\dot{N}_{\Phi_{\text{погл}}} = \frac{pS\lambda}{h} \frac{(1 - \rho)}{(1 + \rho)} = 1,1 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}.$$

Задача 1.16. Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления, которую оказывает плоский световой поток с интенсивностью $I = 0,2 \text{ Вт/см}^2$ на плоскую поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0,8$, если угол падения $\theta = 45^\circ$ и площадь освещаемой поверхности $S = 10 \text{ см}^2$.

Решение. С точки зрения квантовой теории световое давление объясняется передачей импульса фотона $h\nu/c$ поглощающей или отражающей стенке. Поток монохроматического света с частотой света ν , падающий на стенку под углом падения θ на поверхность S , равен $\Phi_e = I \cdot S \cdot \cos\theta$, где I - интенсивность. Угол падения θ - это угол между нормалью к поверхности стенки и направлением вектора импульса падающего фотона.

Мощность излучения, падающего на поверхность под углом θ , определяет число фотонов \dot{N}_ϕ , падающих на нормальную поверхность

$$\dot{N}_\phi = \Phi_e / h\nu = (IS \cos\theta) / h\nu.$$

Так как каждый фотон обладает импульсом $p_1 = h\nu/c$, то он сообщает поглощающей стенке нормальную составляющую импульса $(h\nu/c) \cdot \cos\theta$ отражающей - $2(h\nu/c) \cdot \cos\theta$ поскольку при отражении нормальная составляющая импульса изменяется от $(h\nu/c) \cdot \cos\theta$ до -

$(hv/c) \cdot \cos\theta$. Изменение нормальной составляющей импульса $\Delta p_1 = 2(hv/c) \cdot \cos\theta$.

Если коэффициент отражения ρ , то число отраженных фотонов будет $\rho \cdot \dot{N}_\phi$, а число поглощенных - $(1-\rho) \cdot \dot{N}_\phi$. Тогда нормальная составляющая суммарного импульса, сообщенного в единицу времени поверхности, будет

$$\frac{\Delta p_n}{\Delta t} = 2\rho \cdot \dot{N}_\phi \frac{hv}{c} \cos\theta + (1-\rho) \dot{N}_\phi \frac{hv}{c} \cos\theta = (1+\rho) \frac{hv}{c} \dot{N}_\phi \cos\theta$$

или

$$\frac{\Delta p_n}{\Delta t} = (1+\rho) \frac{I}{c} S \cdot \cos^2 \theta$$

Последнее выражение определяет скорость изменения нормальной составляющей импульса стенки - $\Delta p_n/\Delta t$, т.е. силу нормального давления

$$F_n = (1+\rho) \frac{I}{c} \cdot S \cdot \cos^2 \theta = 6 \cdot 10^{-9} \text{ Н.}$$

Задача 1.17. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 0,155$ мкм. Работа выхода для серебра $A_B = 4,7$ эВ.

Решение. Максимальную скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения Эйнштейна (1.23) для фотоэффекта:

$$T_{max} = hv - A_B,$$

где hv - энергия фотонов, падающих на поверхность металла; A_B - работа выхода; T_{max} - максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Энергия фотонов вычисляется по формуле

$$\varepsilon_\phi = hv = hc/\lambda = 8 \text{ эВ,}$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; λ - длина волны, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Кинетическую энергию электрона можно определить либо по классической формуле (1.25), либо по релятивистской формуле (1.26), в зависимости от того, как велика скорость, сообщаемая фотоэлектрону. Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия фотона ε_ϕ много меньше энергии покоя электрона ε_{0e} , то может быть применена формула (1.25), а если ε_ϕ сравнима с ε_{0e} и более нее, то формула (1.26).

Полученная энергия фотона ($\varepsilon_\phi = 8$ эВ) много меньше энергии покоя электрона $\varepsilon_{0e} = m_{0e}c^2 = 0,5$ МэВ. Следовательно, для данного случая максимальную кинетическую энергию фотоэлектрона T_{max}

можно вычислить по классической формуле $T_{\max} = m_{0e} v_{\max}^2 / 2$, и уравнение Эйнштейна для фотоэффекта записать в виде

$$\varepsilon_{\phi} = A_A + \frac{m_{0e} v_{\max}^2}{2},$$

откуда

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_{\phi} - A_B)}{m_{0e}}} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Задача 1.18. На поверхность лития падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,31$ мкм. Чтобы прекратить фотоэмиссионный ток, нужно приложить задерживающую разность потенциалов, равную $V_3 = 1,76$ эВ. Определить работу выхода.

Решение. В соответствии с уравнением Эйнштейна будем иметь

$$h\nu = A_B + T_{\max}.$$

Работа задерживающей разности потенциалов eV_3 равна максимальной кинетической энергии электрона $T_{\max} = eV_3$.

Тогда уравнение Эйнштейна будет иметь вид

$$h\nu = A_B + eV_3,$$

откуда

$$A_B = h\nu - eV_3.$$

Или при данной длине волны

$$A_B = \frac{hc}{\lambda} - eV_3 = 2,2 \text{ эВ}.$$

Задача 1.19. Определить красную границу фотоэффекта для цинка, работа выхода которого равна $A_B = 3,74$ эВ = $6,0 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Решение. Красная граница фотоэффекта определяется соотношением $\lambda_{\text{кр}} = hc/A_B = 0,33$ мкм и имеет физический смысл наибольшей длины волны, при которой фотоэффект еще наблюдается, причем скорость вырванных фотоэлектронов равна при этом нулю.

Задача 1.20. Получить формулу для комптоновской длины волны, рассмотрев столкновение фотонов со свободным электроном, происходящее по закону упругого удара, для которого выполняются законы сохранения энергии и импульса. Считать, что энергия фотона соизмерима с собственной энергией электрона. Найти условие применимости классической модели рассеянного света.

Решение. Надо найти длину волны рассеянного фотона λ' по заданной длине волны падающего фотона λ и углу рассеяния θ (см. рис. 1.3). Для этого, следует, рассмотреть систему уравнений. Кроме

того, необходимо учесть определение энергии фотона $\varepsilon_\phi = h\nu$ и связь $\nu = c/\lambda$.

Исключим из уравнений энергию и импульс электрона после столкновения. Для этого выразим величину ε'_e и возведем обе части уравнения в квадрат.

В результате получим уравнение

$$(\varepsilon'_e)^2 = (\varepsilon_\phi - \varepsilon'_\phi + \varepsilon_{0e})^2.$$

Разделим обе части этого уравнения на c^2 и с исключим ε_ϕ и ε'_ϕ .

В результате получим

$$(\varepsilon'_e/c)^2 = (p_\phi^2 - p'^2_\phi + \varepsilon_{0e}/c)^2.$$

Далее найдем

$$(\varepsilon'_e/c)^2 = (p_\phi - p'_\phi + \varepsilon_{0e}/c)^2 - p_\phi^2 - p'^2_\phi + 2p_\phi p'_\phi \cos\theta.$$

Откуда находим связь p'_ϕ , p_ϕ и θ в виде

$$p_\phi \cdot p'_\phi (\cos\theta - 1) + \frac{\varepsilon_{0e}}{c} (p_\phi - p'_\phi) = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно p'_ϕ , найдем импульс фотона после рассеяния

$$p'_\phi = p_\phi / \left(1 + 2 \frac{p_\phi}{m_{0e}c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

из последнего соотношения найдем выражение для энергии рассеянного фотона:

$$\varepsilon'_\phi = \varepsilon_\phi / \left(1 + 2 \frac{\varepsilon_\phi}{m_{0e}c^2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

И, наконец, найдем формулу Комптона

$$\lambda' - \lambda = 2 \cdot \lambda_C \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где

$$\lambda_C = \frac{h}{m_{0e} \cdot c} = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Из выражения для энергии фотона ε'_ϕ видно, что при $h\nu \ll m_e c^2$ $\nu' = \nu$, и рассеяние света описывается классической моделью взаимодействия света с веществом.

Задача 1.21. Вычислить кинетическую энергию электрона отдачи, если угол рассеяния $\theta = 90^\circ$ и энергия фотона равна энергии покоя электрона. Какова при этом скорость электрона?

Решение. Согласно определению кинетической энергии частицы в релятивистской механике

$$T = \varepsilon'_e - \varepsilon_{0e}.$$

На основании закона сохранения энергии находим

$$T = \varepsilon'_e - \varepsilon_{0e} = \varepsilon_\phi - \varepsilon'_\phi.$$

С учетом выражения для энергии рассеянного фотона, найденного в предыдущей задаче, найдем выражение для кинетической энергии электрона отдачи, включающее энергию фотона до рассеяния, и угол рассеяния

$$T = \frac{\varepsilon_\phi^2}{m_{0e}c^2} \cdot \frac{2 \cdot \sin^2(\theta/2)}{1 + 2 \frac{\varepsilon_\phi}{m_{0e}c^2} \cdot \sin^2(\theta/2)}.$$

Так как по условию задачи $\varepsilon_\phi = m_{0e}c^2$, то, с учетом $\theta = 90^\circ$, найдем

$$T = m_{0e}c^2/2 = 0,255 \text{ МэВ}.$$

На основании релятивистского выражения для скорости электрона

$$v = c \frac{(T/\varepsilon_{0e} + 2)T/\varepsilon_{0e}}{(T/\varepsilon_{0e} + 1)^2} = \frac{1}{3}c = 10^8 \text{ м/с}.$$

Задача 1.22. Определить импульс электрона отдачи для условий предыдущей задачи.

Решение. На основании релятивистского инварианта для электрона

$$(\varepsilon'_e/c)^2 - p_e'^2 = (\varepsilon_{0e}/c)^2$$

и определения кинетической энергии для электрона отдачи

$$T = \varepsilon'_e - \varepsilon_{0e}$$

можно найти

$$p'_e = \frac{T}{c} \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{0e}}{T}}.$$

В предыдущей задаче было найдено T . Окончательно получим

$$p'_e = (\sqrt{5}mc)/2 = 3 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Задача 1.23. Для условий задачи 1.20 найти угол отдачи (угол между направлением импульса фотона до рассеяния и импульсом электрона).

Решение. Из векторной диаграммы, изображенной на рис. 1.3, демонстрирующей закон сохранения импульса при упругом соударении свободного электрона и фотона, можно найти две связи

$$p_{\phi} = p'_{\phi} \cos \theta + p'_e \cdot \cos \varphi;$$

$$p'_e \cdot \sin \varphi = p'_{\phi} \cdot \sin \theta.$$

Требуется найти связь между углами φ , θ и энергией фотона до рассеяния ε_{ϕ} .

Разделив оба исходных уравнения на p'_{ϕ}

$$\frac{p_{\phi}}{p'_{\phi}} = \cos \theta + \frac{p'_e}{p'_{\phi}} \cos \varphi;$$

$$\frac{p'_e}{p'_{\phi}} = \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}.$$

В результате ряда простых преобразований найдем

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg}(\theta/2) / (1 + \varepsilon_{\phi} / \varepsilon_{0e}).$$

Для заданных условий $\theta = 90^\circ$, $\varepsilon_{\phi} = \varepsilon_{0e}$ получим

$$\operatorname{tg} \varphi = 1/2; \varphi = 25^\circ.$$

Задача 1.24. Фотон испытал рассеяние на покоящемся свободном электроне. Найти импульс налетевшего фотона, если энергия рассеянного фотона равна кинетической энергии электрона отдачи при угле 90° между направлениями их разлета.

Решение. Запишем выражение, связывающее импульс рассеянного фотона p'_{ϕ} с импульсом падающего фотона p_{ϕ} и с углом рассеяния θ , в виде:

$$p'_{\phi} = \frac{p_{\phi}}{1 + 2 \frac{p_{\phi}}{m_{0e}c} \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

При решении задачи 1.21 была найдена связь кинетической энергии электрона отдачи, энергии падающего фотона и угла рассеяния в виде

$$T = \frac{\varepsilon_{\phi}^2}{m_{0e}c^2} \cdot \frac{2 \cdot \sin^2(\theta/2)}{1 + 2 \frac{\varepsilon_{\phi}}{m_{0e}c^2} \cdot \sin^2(\theta/2)}.$$

Кроме того, имеем из задачи 1.20

$$\varepsilon'_{\phi} = \frac{\varepsilon_{\phi}}{1 + 2 \frac{\varepsilon_{\phi}}{m_{0e}c^2} \cdot \sin^2(\theta/2)}.$$

Так как по условию задачи $\varepsilon'_\phi = T$, то

$$\frac{\varepsilon_\phi}{m_{0e}c^2} = \frac{1}{1 - \cos\theta} = \frac{1}{2\sin^2(\theta/2)}.$$

В задаче 1.23 была найдена связь углов θ и φ , которая имеет вид

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + 2 \cdot \sin^2(\theta/2)}.$$

Кроме того, по условию задачи $\varphi + \theta = 90^\circ$. Тогда

$$\operatorname{tg}(90 - \theta) = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + 2\sin^2(\theta/2)}.$$

Решая это уравнение, найдём $\cos\theta = 1/2$, $\theta = 60^\circ$, и $\varphi = 30^\circ$.

Найдём энергию налетающего фотона $\varepsilon_\phi = 2m_{0e} \cdot c^2$ и его импульс $p_\phi = \varepsilon_\phi/c = 2m_{0e} c$.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1.25. Определить температуру T , при которой энергетическая светимость черного тела $M_e = 10 \text{ кВт/м}^2$.

1.26. Поток энергии Φ_e , излучаемый из смотрового окошка плавильной печи, равен 34 Вт. Определить температуру T печи, если площадь отверстия $S = 6 \text{ см}^2$.

1.27. Определить энергию W , излучаемую за время $t = 1$ мин из смотрового окошка площадью $S = 8 \text{ см}^2$ плавильной печи, если ее температура $T = 1,2 \text{ кК}$.

1.28. Температура верхних слоев звезды Сириус $T = 10 \text{ кК}$. Определить поток энергии Φ_e , излучаемый с поверхности площадью $S = 1 \text{ км}^2$ этой звезды.

1.29. Определить относительное увеличение $\Delta M_e/M_e$ энергетической светимости черного тела при увеличении его температуры на 1%.

1.30. Во сколько раз надо увеличить термодинамическую температуру черного тела, чтобы его энергетическая светимость M_e возросла в два раза?

1.31. Принимая, что Солнце излучает как черное тело, вычислить его энергетическую светимость M_e и температуру T его поверхности. Солнечный диск виден с земли под углом $\theta = 0,533^\circ$. Солнечная постоянная $E_e = 1,4 \text{ кДж/(м}^2 \cdot \text{с)}$ (см. задачу 1.3).

1.32. Определить установившуюся температуру T зачерненной металлической пластинки, расположенной перпендикулярно солнечным лучам вне земной атмосферы на среднем расстоянии от

Земли до Солнца. Значение солнечной постоянной приведено в предыдущей задаче.

1.33. Принимая коэффициент теплового излучения a_T угля при температуре $T = 600$ К равным 0,8 определить: 1) энергетическую светимость угля; 2) энергию W , излучаемую с поверхности угля с площадью $S = 5$ см² за время $t = 10$ мин.

1.34. С поверхности сажи площадью $S = 2$ см² при температуре $T = 400$ К за время 5 мин излучается энергия $W = 83$ Дж. Определить коэффициент теплового излучения a_T сажи.

1.35. Муфельная печь потребляет мощность $P = 1$ кВт. Температура ее внутренней поверхности при открытом отверстии площадью $S = 25$ см² $T = 1,2$ кК. Считая, что отверстие печи излучает как черное тело, определить, какая часть η мощности рассеивается стенками.

1.36. Можно условно принять, что Земля излучает как серое тело, находящееся при температуре $T = 280$ К. Определить коэффициент теплового излучения a_T земли, если энергетическая светимость ее поверхности $M_e = 325$ кДж/м²·ч.

1.37. Мощность излучения шара радиусом $R = 10$ см при некоторой постоянной температуре $P = 1$ кВт. Найти температуру T , считая шар серым телом с коэффициентом теплового излучения $a_T = 0,25$.

1.38. На какую длину волны λ_m приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda T})_{\max}$ черного тела при температуре $t = 0^\circ\text{C}$.

1.39. Температура верхних слоев Солнца $T = 5,3$ кК. Считая Солнце абсолютно черным телом, определить длину волны λ_m , которой соответствует максимальная спектральная плотность энергетической светимости $(M_{\lambda T})_{\max}$ Солнца.

1.40. Определить температуру T черного тела, при которой максимум спектральной плотности светимости $(M_{\lambda T})_{\max}$ приходится на красную границу видимого спектра ($\lambda_1 = 760$ нм), на фиолетовую ($\lambda_2 = 380$ нм).

1.41. Максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda T})_{\max}$ яркой звезды Арктур приходится на длину волны $\lambda_m = 580$ нм. Принимая, что звезда излучает как абсолютно черное тело, определить температуру T поверхности звезды.

1.42. Вследствие изменения температуры абсолютно черного тела максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda T})_{\max}$ сместился с $\lambda_m = 2,4$ мкм на $\lambda_m = 0,8$ мкм. Как и во сколько раз изменится спектральная плотность энергетической светимости?

1.43. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в два раза длина волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $(M_{\lambda T})_{\max}$ уменьшилась на $\Delta\lambda_m = 400$ нм. Определить начальную и конечную температуры T_1 и T_2 .

1.44. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела $(M_{\lambda T})_{\max} = 4,16 \cdot 10^{11}$ (Вт/м²)/м. На какую длину волны λ_m она приходится?

1.45. Определить максимальную спектральную плотность энергетической светимости $(M_{\lambda T})_{\max}$ для длины волны $\lambda = 600$ нм.

1.46. Начальная температура абсолютно черного тела $T = 2000$ К. На сколько изменилась температура тела, если длина волны, соответствующая максимуму спектре излучения, увеличилась на $\Delta\lambda = 260$ нм?

1.47. Вычислить теплоемкость C_V при постоянном объеме 1 см^3 равновесного теплового излучения, температура которого $T = 10^4$ К.

1.48. Масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{33}$ г, его радиус $r_C = 7 \cdot 10^{10}$ см и температура поверхности $T = 5700$ К. Подсчитать, пользуясь законом Стефана-Больцмана, какую массу теряет Солнце на излучение за одну секунду. За какое время масса Солнца M уменьшилась на 1%.

1.49. Медный шар диаметром $d = 10$ см с абсолютно черной поверхностью остывает, находясь в термостате, абсолютно черные стенки которого поддерживаются при температуре, близкой к абсолютному нулю. Определить, до какой температуры остынет шар через промежуток времени $\tau = 5$ ч, если его первоначальная температура $T_0 = 300$ К. Теплоемкость меди $c_{\text{уд}} = 0,38$ Дж/(г·К), плотность $\rho = 8,93$ г/см³.

1.50. Ртутная дуга имеет мощность $P = 125$ Вт. Какое число фотонов испускается в единицу времени в излучении с длинами волн λ , равными: 612,3; 579,1; 546,1; 404,7; 365,5; 253,7 нм? Интенсивности этих линий составляют соответственно 2; 4; 4; 2,9; 2,5; 4% интенсивности ртутной дуги. Считать, что 80% мощности дуги идет на излучение.

1.51. Определить энергию, импульс и массу фотона, длина волны которого соответствует: а) $\lambda_1 = 0,6$ мкм, т.е. видимой части спектра; б) рентгеновскому излучению с длиной волны $\lambda_2 = 1 \text{ \AA}$; в) гамма-излучению с длиной волны $\lambda_3 = 0,01 \text{ \AA}$.

1.52. При какой температуре средняя тепловая энергия молекул идеального газа равна энергии фотонов, соответствующих излучению: а) человеческого тела ($\lambda_1 = 10$ мкм); б) видимого света ($\lambda_2 = 0,6$ мкм); в) рентгеновского излучения ($\lambda_3 = 0,1 \text{ \AA}$).

1.53. Сколько квантов излучения с длинами волн $\lambda_1 = 10$ мкм и $\lambda_2 = 0,02$ Å содержится в световом пучке с энергией 1 Дж?

1.54. Какое количество фотонов с длиной волны $\lambda = 690$ нм в параллельном пучке имеет суммарный импульс, равный среднему импульсу атома гелия при температуре $T = 300$ К?

1.55. При какой температуре средний импульс нейтрона равен импульсу рентгеновского фотона с длиной волны $\lambda = 1$ Å?

1.56. Подсчитать частоту монохроматического излучения, мощность которого равна $P = 3 \cdot 10^{-2}$ Вт, что соответствует интенсивности потока 10^{14} фотон/с.

1.57. Монохроматический параллельный пучок света, проходя через диафрагму с узкой длинной прямоугольной щелью, ориентированной нормально к потоку, образует на экране дифракционную картину. Найти энергию и импульс фотонов, если известно, что первый минимум возникает в направлении угла $\varphi = 6^\circ$, а ширина щели $b = 5$ мм.

1.58. Дифракционная решетка с периодом $d = 3$ мкм расположена нормально на пути монохроматического плоского светового потока. При этом углы дифракции, отвечающие двум соседним максимумам на экране, равны $\varphi_1 = 23^\circ 35'$ и $\varphi_2 = 36^\circ 52'$. Вычислить энергию фотонов данного светового потока.

1.59. Пучок монохроматического света длиной волны $\lambda = 662$ нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток энергии $\Phi_e = 0,6$ Вт. Определить силу давления на поверхность, а также число N фотонов, падающих на нее за время $t = 5$ с.

1.60. Параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление $p = 10$ мкПа. Определить: 1) концентрацию n фотонов в пучке; 2) число n_1 фотонов, падающих на поверхность площадью $S = 1$ м² за время $t = 1$ с.

1.61. Определить давление солнечного излучения на зачерненную пластинку, расположенную перпендикулярно солнечным лучам и находящуюся вне земной атмосферы на среднем расстоянии от Земли до Солнца (см. задачу 1.3).

1.62. Определить поверхностную плотность I потока энергии излучения, падающего на зеркальную поверхность, если световое давление при нормальном падении лучей равно $p = 10$ мкПа.

1.63. Поток энергии Φ_e , излучаемый электрической лампой, равен 600 Вт. На расстоянии $r = 1$ м от лампы перпендикулярно падающим лучам расположено круглое плоское зеркальце диаметром $d = 1$ см. Принимая, что излучение лампы одинаково во всех

направлениях и что зеркальце полностью отражает падающий на него свет, определить силу F светового давления на зеркальце.

1.64. На зеркальце с идеально отражающей поверхностью площадью $S = 1,5 \text{ см}^2$ падает нормально свет от электрической дуги. Определить импульс p , полученный зеркальцем, если поверхностная плотность потока излучения, падающего на зеркальце, равна $E_e = 0,1 \text{ МВт/м}^2$. Продолжительность облучения $t = 1 \text{ с}$.

1.65. Лазер мощностью $N = 30 \text{ Вт}$ работает в импульсном режиме, испуская монохроматическое излучение. Найти силу давления этого импульса на зеркало, расположенное перпендикулярно направлению излучения.

1.66. Давление монохроматического света $\lambda = 600 \text{ нм}$ на черную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно $p = 0,1 \text{ мкПа}$. Определить число N фотонов, падающих за время $t = 1 \text{ с}$ на поверхность площадью $S = 1 \text{ см}^2$.

1.67. Монохроматическое излучение с длиной волны $\lambda = 500 \text{ нм}$ падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на нее с силой $F = 10 \text{ нН}$. Определить число N_1 фотонов, ежесекундно падающих на эту поверхность.

1.68. Параллельный пучок монохроматического света $\lambda = 662 \text{ нм}$ падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление $p = 0,03 \text{ мкПа}$. Определить концентрацию n фотонов в световом пучке.

1.69. Найти световое давление на стенки электрической 100 - ваттной лампы. Колба лампы представляет собой сферический сосуд радиусом $r = 5 \text{ см}$. Стенки лампы отражают 4% и пропускают 96% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

1.70. На поверхность площадью $S = 0,01 \text{ м}^2$ в единицу времени падает световая энергия $E_e = 1,05 \text{ Дж/с}$. Найти световое давление в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на нее лучи.

1.71. При фотоэффекте с платиновой поверхности электроны полностью задерживаются разностью потенциалов $U_3 = 0,8 \text{ В}$. Найти длину волны применяемого облучения и предельную длину волны λ_0 , при которой еще возможен фотоэффект. Работа выхода для пластины $A_B = 6,3 \text{ эВ}$.

1.72. Фотоны с энергией $\varepsilon = 4,9 \text{ эВ}$ вырывают электроны из металла с работой выхода $A_B = 4,5 \text{ эВ}$. Найти максимальный импульс p_{max} , передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

1.73. Найти длину волны света λ_0 , соответствующую красной границе фотоэффекта, для лития и цезия. Работы выхода соответственно равны: 1,39; 1,89 эВ.

1.74. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_0 = 275$ нм. Найти минимальную энергию ε фотона, вызывающего фотоэффект.

1.75. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda_1 = 275$ нм. Найти работу выхода A_B электрона из металла, максимальную скорость v_{max} электронов, вырываемых из металла светом с длиной волны $\lambda = 180$ нм и максимальную кинетическую энергию T_{max} электронов.

1.76. Чему равны максимальные скорости фотоэлектронов при освещении поверхности цезия и платины резонансными линиями: а) ртути $\lambda = 1850 \text{ \AA}$? б) кальция $\lambda = 4227 \text{ \AA}$? Работа выхода $A_{Cs} = 1,89$ эВ; $A_{Pt} = 5,29$ эВ.

1.77. Красная граница фотоэффекта для калия соответствует длине волны $\lambda = 0,577$ мкм. Вычислить минимальное значение энергии кванта, необходимое для освобождения фотоэлектрона из данного металла.

1.78. Медный шарик, отдаленный от других тел, облучают монохроматическим светом длиной волны $\lambda = 0,2$ мкм. До какого максимального потенциала зарядится шарик, теряя фотоэлектроны? Работа выхода $A_B = 4,47$ эВ.

1.79. Плоскую цинковую пластинку освещают излучением со сплошным спектром, коротковолновая граница которого соответствует длине волны $\lambda = 0,30$ мкм. Вычислить, на какое максимальное расстояние от поверхности пластинки может удалиться фотоэлектрон, если вне пластинки имеется задерживающее однородное электрическое поле напряженностью $E = 10$ В/см. Работа выхода $A_B = 4,0$ эВ.

1.80. Какова была длина волны λ_0 рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом $\theta = 60^\circ$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной $\lambda = 25,4$ пм?

1.81. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\theta = \pi/2$. Найти энергию ε'_ϕ и импульс p'_ϕ рассеянного фотона.

1.82. Энергия квантов рентгеновских лучей $\varepsilon = 0,6$ МэВ. Найти энергию ε'_e электрона отдачи, если длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась на 20%.

1.83. Рентгеновское излучение длиной волны $\lambda = 55,8$ пм рассеивается плиткой графита (Комптон - эффект). Определить длину волны λ' света, рассеянного под углом $\theta = 60^\circ$ к направлению падающего пучка света.

1.84. Определить угол θ рассеянного фотона, испытывающего соударение со свободным электроном, если изменение длины волны при рассеянии $\Delta\lambda = 3,62$ пм.

1.85. Фотон с энергией $\varepsilon_\phi = 0,4$ МэВ рассеялся под углом $\theta = 90^\circ$ на свободном электроне. Определить энергию ε'_ϕ рассеянного фотона и кинетическую энергию T электрона отдачи.

1.86. Определить импульс p'_e электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян на угол $\theta = 180^\circ$.

1.87. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпел рассеяние на угол $\theta = 180^\circ$? Энергия фотона до рассеяния равна $\varepsilon_\phi = 0,255$ МэВ.

1.88. Фотон с энергией $\varepsilon_\phi = 0,25$ МэВ рассеялся на свободном электроне. Энергия рассеянного фотона равна $\varepsilon'_\phi = 0,2$ МэВ. Определить угол рассеяния θ .

1.89. Угол рассеяния фотона $\theta = 90^\circ$. Угол отдачи электрона равен $\varphi = 30^\circ$. Определить энергию ε_ϕ падающего фотона.

1.90. Фотон $\lambda = 1$ пм рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 90^\circ$. Какую долю своей энергии фотон передал электрону?

1.91. Сравнить максимальные комптоновские изменения длины волны при рассеянии фотонов на свободных электронах и ядрах атомов водорода.

1.92. Под некоторым углом θ к первоначальному пучку рентгеновских лучей длиной волны $\lambda = 0,1$ Å комптоновское смещение оказалось $\Delta\lambda = 0,024$ Å. Найти угол θ и величину энергии, переданной при этом электронам отдачи.

1.93. Длина волны падающего кванта равна $\lambda = 0,03$ Å. Какую энергию приобретает комптоновский электрон отдачи при рассеянии кванта под углом $60, 90, 180^\circ$?

1.94. В результате рассеяния кванта с первоначальной энергией $\varepsilon_\phi = 0,8$ МэВ на свободном электроне длина волны кванта оказалась равной комптоновской длине волны. Определить угол, на который рассеялся данный квант.

1.95. Вычислить импульс комптоновского электрона отдачи, если известно, что фотон, первоначальная длина волны которого $\lambda = 0,05$ Å, рассеялся под углом $\theta = 90^\circ$.

1.96. Определить величину комптоновского смещения и угол, под которым рассеялся фотон, если известно, что первоначальная длина волны фотона $\lambda = 0,03 \text{ \AA}$, а скорость электрона отдачи составляет β -часть скорости света ($\beta = 0,6$),

1.97. Пользуясь законом сохранения импульса и формулой Комптона, найти зависимость между углом рассеяния фотона θ и углом φ , под которым отлетает электрон отдачи.

1.98. Определить угол между направлениями движения рассеянного фотона и электрона отдачи при условии, что комптоновское смещение равно $\Delta\lambda = 0,012 \text{ \AA}$, а длина волны налетающего кванта $\lambda = 0,05 \text{ \AA}$.

1.99. Найти длину волны падающего фотона, если известно, что энергии рассеянного фотона и электрона отдачи равны при угле 90° между направлениями их движений.

1.100. Квант, соответствующий коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра при напряжении на трубке $U = 60 \text{ кВ}$, испытывает комптоновское рассеяние на угол $\theta = 120^\circ$ и затем вырывает фотоэлектрон с K -оболочки атома молибдена. Вычислить энергию фотоэлектрона вдали атома, энергия ионизации которого равна $E = 20 \text{ кэВ}$.

1.101. Длина волны λ фотона равна комптоновской длине λ_C протона. Определить комптоновскую длину λ_C , энергию ε и импульс p фотона. Масса протона $m_{p0} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

1.102. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 70,8 \text{ пм}$ испытывают комптоновское рассеяние на парафине. Найти длину волны λ рентгеновских лучей, рассеянных в направлениях: а) $\theta_1 = \pi/2$, б) $\theta_2 = \pi$.

1.103. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 20 \text{ пм}$ испытывают комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90^\circ$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию T и импульс электрона отдачи.

1.104. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta = 90^\circ$. Энергия рассеянного фотона $\varepsilon'_\phi = 0,4 \text{ МэВ}$. Определить энергию ε_ϕ фотона до рассеяния.

1.105. Определить максимальное изменение длины волны при комптоновском рассеянии: 1) на свободных электронах; 2) на свободных протонах. Массы покоя электрона и протона соответственно равны: $m_{e0} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, $m_{p0} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

2. Основы квантовой механики

2.1. Основные понятия и законы

Волны де Бройля

В классической механике свободное движение материальной точки характеризуется энергией E и импульсом \vec{p} . Движение плоской монохроматической волны характеризуется частотой ω и волновым вектором \vec{k} . В квантовой механике оба эти описания являются различными аспектами одного и того же объекта, и связь между величинами для свободной частицы устанавливается соотношениями де Бройля

$$\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}, \quad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad (2.1)$$

где h - постоянная Планка,

$$E = \hbar \cdot \omega = h\nu, \quad (2.2)$$

Для частицы, обладающей импульсом $p = |\vec{p}|$, соотношение (2.1) дает длину плоской волны $\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$, которая называется длиной волны де Бройля для частицы:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}. \quad (2.3)$$

В релятивистском случае, когда скорость частицы сравнима со скоростью света в вакууме

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.4)$$
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_0v}.$$

Следуя идеям де Бройля движение свободной частицы вдоль оси x , обладающей энергией E и импульсом \vec{p} можно описать уравнением плоской монохроматической волны

$$\Psi(x,t) = A \cdot e^{-i(\omega t - kx)} = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(Et - px)}. \quad (2.5)$$

где A – амплитуда.

Скорость распространения дебройлевской волны может быть найдена, как скорость перемещения постоянной фазы $Et - px = \text{const}$, т.е. фазовая скорость будет

$$v_{\text{фаз}} = \frac{dx}{dt} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} \quad (2.6)$$

Скорость движения частицы характеризуется групповой скоростью волн де Бройля

$$v_{\text{гр}} = v = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2.7)$$

Связь длины волны де Бройля с кинетической энергией T частицы

а) если $v \ll c$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{2m_0T}},$$

б) в релятивистском случае

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{T(T + 2E_0)}},$$

где $E_0 = m_0c^2$ - энергия покоя частицы.

Соотношение неопределенностей

Поскольку электрон или любая другая частица обладает свойствами волны, то одновременное точное определение ее координаты и импульса невозможно. Произведение неопределенности координаты на неопределенность соответствующей компоненты импульса не может быть меньше постоянной Планка:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \quad (2.8)$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar$$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - интервалы координат, в которых локализована частица. Эти соотношения называются соотношениями неопределенностей Гейзенберга.

Под неопределенностью ΔA физической величины A подразумевается среднее квадратичное отклонение, вычисляемое по формуле

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}. \quad (2.9)$$

Соотношения неопределенностей также справедливы для других сопряженных пар физических величин (энергия E и время t , момент импульса L и угловая координата φ).

Если система, например, находится в нестационарном состоянии в течении времени Δt , то энергию системы можно измерить лишь с точностью, не превышающей $\hbar/\Delta t$, т.е.

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar. \quad (2.10)$$

Волновая функция и уравнение Шредингера

Основным уравнением нерелятивистской квантовой механики, описывающим поведение микрочастиц в потенциальном силовом поле является уравнение Шредингера.

Полное нестационарное (временное) уравнение Шредингера имеет вид.

$$i\hbar \frac{d\Psi(r,t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(r,t) + U(r,t)\Psi(r,t), \quad (2.11)$$

где $\Psi(r,t)$ - полная волновая функция, m - масса частиц, $U(r,t)$ - потенциальная энергия, Δ - оператор Лапласа, который в декартовых координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Одномерное нестационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{d\Psi(x,t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x,t) + U(x,t)\Psi(x,t), \quad (2.12)$$

где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица. В случае, когда силовое поле, в котором движется частица, стационарно, то есть функция U не зависит от времени и имеет смысл потенциальной энергии, решение этого (2.12) уравнения можно записать в виде

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-\frac{E}{\hbar}t} = \psi(x) \cdot e^{-i\omega t}. \quad (2.13)$$

Для значительного числа явлений в микромире важно находить стационарное решение, не содержащее зависимости от времени. Для стационарных состояний одномерное уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(x))\psi(x) = 0. \quad (2.14)$$

где E - полная энергия, $U(x)$ - потенциальная энергия частицы, m - масса частицы. Решение этого уравнения - пси-функция вида

$$\psi(x) = A \cdot e^{-ikx}, \quad (2.15)$$

где $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))}$.

Это решение прямого физического смысла не имеет. Следует иметь в виду, что волновая функция должна удовлетворять стандартным условиям: однозначность, конечность, непрерывность вместе с первой производной. Она удовлетворяет условию нормировки.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (2.16)$$

Если выполнить интегрирование по всем возможным местоположениям частицы, то вероятность превратится в вероятность достоверного события, поэтому волновая функция нормирована на единицу.

Подынтегральное выражение имеет физический смысл. Это плотность вероятности стационарного состояния, которая равна

$$w(x) = |\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi^*(x), \quad (2.17)$$

где $\psi^*(x)$ - комплексно сопряженное значение ψ -функции. Для одномерного случая вероятность обнаружить частицу в интервале $[x; x+dx]$ определяется формулой

$$dW = w(x)dx \quad (2.18)$$

Для одномерного случая вероятность обнаружить частицу в интервале $[a; b]$ определяется формулой

$$W([a; b]) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx. \quad (2.19)$$

Средние значения физических величин

Если известна волновая функция, описывающая состояние частицы в определенный момент времени, то среднее значение (математическое ожидание) физической величина A , характеризующее поведение частицы, выражается формулой

$$\langle A \rangle = \int_V \psi^* A \psi dV. \quad (2.20)$$

Для одномерного случая, если x меняется от 0 до l .

$$\langle A \rangle = \int_0^l \psi^* A \psi dx. \quad (2.21)$$

Например, среднее значение координаты x микрочастицы

$$\langle x \rangle = \int_0^l x |\psi|^2 dx.$$

Аналогично, среднее значение x^3

$$\langle x^3 \rangle = \int_0^l x^3 |\psi|^2 dx.$$

2.2. Примеры решения задач

Задача 2.1. Найти длину волны де Бройля для 1) электрона, летящего со скоростью $v = 10^6$ м/с; 2) α -частицей, движущейся со скоростью, равной наиболее вероятной скорости при температуре 0°C (273 K); 3) шарика массой 10^6 кг, движущегося со скоростью 1 м/с? В каком из этих случаев необходимо учитывать волновые свойства частиц?

Решение. Для определения длины волны воспользуемся формулой де

$$\text{Бройля. } \lambda = \frac{h}{p}$$

1. Оценим λ_e для электрона.

$$\lambda_e = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6} = 7,3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 7,3 \text{ \AA}.$$

2. Определим λ_α для α -частицы (ядра атома гелия, 4 нуклона $m_\alpha = 4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг)

$$\lambda_\alpha = \frac{h}{m_\alpha v_{\text{нв}}}$$

найдем из формулы для наиболее вероятной скорости скорость

$$\text{движения } \alpha\text{-частицы: } v_{\text{нв}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_\alpha}}.$$

Подставив это значение, найдем

$$\lambda_\alpha = \frac{h}{\sqrt{2m_\alpha T}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 2,73 \cdot 10^2} = 0,93 \text{ \AA}.$$

3. Для шарика массой 10^6 кг

$$\lambda_{\text{ш}} = \frac{h}{mv} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{10^6} = 6,62 \cdot 10^{-21} \text{ \AA}.$$

Волновые свойства частиц можно обнаружить в опытах по дифракции. Явление дифракции наблюдается, если длина волны

соизмерима с размерами препятствия. Обнаружить дифракцию для волн, связанных с движением шарика невозможно, так как шарик является макроскопическим объектом и его движение описывается законами классической механики.

Задача 2.2. Доказать, что скорость движения нерелятивистских микрочастиц v равна групповой скорости $v_{гр}$ волн де Бройля.

Решение. Групповая скорость волн

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}.$$

Поскольку $E = p^2/2m$, то

$$\frac{dE}{dp} = \frac{d(p^2/2m)}{dp} = \frac{2pdp}{2mdp} = \frac{p}{m} = v = v_{гр}.$$

Задача 2.3. Используя понятие волны де Бройля применительно к электрону в атоме водорода, вывести постулат Бора о квантовании момента импульса электрона.

Решение. Покажем, что в стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн де Бройля

$$n = \frac{2\pi r}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{h}{mv}.$$

Поэтому

$$n = \frac{2\pi r \cdot mv}{h}, \quad \text{отсюда } mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 2.4. Во время наблюдения дифракции электронов при рассеянии их от кристалла (опыты Девиссона и Джермера) угол скольжения электронного пучка $\theta = 30^\circ$. Постоянная кристаллической решетки $d = 3 \text{ \AA}$. Пренебрегая преломлением электронных волн определить энергию электронов при которых наблюдаются два первых максимума отражения.

Решение. Угловое положение максимумов при дифракции электронов (как и рентгеновских лучей) определяется с помощью формулы Вульфа-Бреггов

$$2d \sin \theta = n\lambda.$$

Считая длиной волны де Бройля, $\lambda = h/m_0v = h/p$, получим

$$2d \sin \theta = \frac{nh}{p}. \quad \text{Отсюда } p = \frac{nh}{2d \sin \theta}.$$

Кинетическая энергия нерелятивистского электрона связана с его импульсом соотношением

$$W = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{n^2 h^2}{8d^2 m_0 \sin^2 \theta}.$$

Принимая $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, находим энергию

$$W_1 = \frac{1^2 (6,62 \cdot 10^{-34})^2}{8(3 \cdot 10^{-10})^2 9,1 \cdot 10^{-31} 2,5 \cdot 10^{-1} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 16,7 \text{ эВ}.$$

$$W_2 = \frac{2^2 (6,62 \cdot 10^{-34})^2}{8(3 \cdot 10^{-10})^2 9,1 \cdot 10^{-31} 2,5 \cdot 10^{-1} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 66,9 \text{ эВ}.$$

Задача 2.5. Определить длину волны де Бройля для движущегося электрона, если известно, что масса m его на 1% больше массы покоя m_0 .

Решение. Электрон релятивистский, следовательно, $m_e = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 + 0,01m_0 = 1,01m_0$. Так как $\lambda = \frac{h}{c \cdot \sqrt{m^2 - m_0^2}}$, то находим

скорость электрона $v_e = c \sqrt{1 - (m_0/m)^2} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$, а длина волны электрона равна $\lambda = 1,7 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 0,17 \text{ \AA}$.

Задача 2.6. Параллельный поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью, ширина которой $b = 0,1 \text{ мм}$. Определить скорость электрона, если известно, что на экране, отстоящем от щели на расстоянии $l = 50 \text{ см}$, ширина центрального дифракционного максимума $\Delta x = 80 \text{ мкм}$.

Решение. Так как электроны обладают волновыми свойствами, воспользуемся формулой для дифракции на щели. Согласно условию задачи электроны, попадающие на первый дифракционный максимум, отклоняются в пределах угла φ (рис 2.2).

Его границы – минимумы первого порядка. Линейное расстояние между ними –

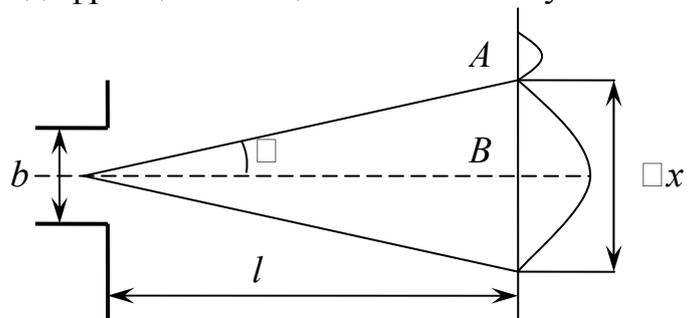


Рис. 2.2.

Δx . Условие минимума при дифракции от щели $b \sin \varphi = k\lambda$. Из $\triangle OAB$ найдем $\text{tg } \varphi = \Delta x / 2l \approx \sin \varphi \approx \varphi$, так как φ мал. Следовательно, при $k = 1$

$$\frac{\Delta x}{2l} = \frac{\lambda}{b} = \frac{h}{m v b}, \text{ так как } \lambda = \frac{h}{m v}. \text{ Отсюда получим}$$

$$v = \frac{2 h l}{\Delta x m b} = \frac{2 \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{-5} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-4}} = 9 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Задача 2.7. Найти неопределенность координаты Δx : 1) для электрона с энергией 1 эВ и скоростью $v = 6 \cdot 10^7$ см/с, найденной с точностью 10%; 2) для маленькой капли массой $m = 5 \cdot 10^{-7}$ г, диаметром $d = 0,1$ мм, движущийся со скоростью $v = 10^{-2}$ см/с, измеренной с точностью 10%.

Решение. Электрон с энергией 1 эВ нерелятивистский. Неопределенность скорости электрона $\Delta v_x = 6 \cdot 10^4$ м/с. Неопределенность координаты электрона

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{\hbar}{m_e \Delta v_x} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{6,28 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 6 \cdot 10^4} = 0,019 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 19 \text{ \AA}.$$

Это значительно больше размеров атома (1 \AA).

Неопределенность скорости капли $\Delta v_x = 10^{-5}$ м/с. Неопределенность координаты капли

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{\hbar}{m \Delta v_x} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{6,28 \cdot 5 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{-5}} = 2,1 \cdot 10^{-20} \text{ м} = 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ \AA}.$$

Это во много раз меньше диаметра капли.

Задача 2.8. Оценить неопределенность в угловой координате $\Delta \varphi$ момента импульса электрона L в атоме водорода.

Решение. В соответствии с постулатом Бора момент импульса электрона в атоме водорода квантуется $L = m v r = n \hbar$. Момент импульса L и угловая координата φ – сопряженные физические величины. Соотношение неопределенности для них имеет вид $\Delta L \Delta \varphi \geq \hbar$. Для оценки в случае, если $\Delta L = L$ то $\Delta \varphi \approx \frac{\hbar}{L} = \frac{\hbar}{n \hbar} = \frac{1}{n}$. Для основного состояния атома водорода $n = 1$, тогда $\Delta \varphi = 1 \text{ рад} = 57,3^\circ$. Это значит, что говорить об определенной траектории электрона в невозбужденном атоме водорода нельзя.

Задача 2.9. Кинетическая энергия электрона в атоме водорода $T = 10$ эВ. Используя соотношение неопределенности, оценить минимальные размеры атома.

Решение. Неопределенности координаты и импульса связаны соотношением $\Delta r \Delta p \geq \hbar$. Если атом имеет линейный размер l , то можно считать $\Delta r = l/2$. Неопределенность импульса не должна превышать самого импульса. Тогда $l \geq 2\hbar/p$. Импульс связан с кинетической энергией соотношением $p = \sqrt{2mT}$. Следовательно,

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mT}} = \frac{2 \cdot 6,62 \cdot 10^{-34}}{6,28 \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 1,24 \text{ \AA}.$$

Задача 2.10. Используя соотношение неопределенности, оценить ширину энергетического уровня в атоме водорода, находящемся: 1) в возбужденном состоянии, где время жизни $\tau = 10^{-8}$ с; 2) в основном состоянии, где время жизни $\tau = \infty$.

Решение. Неопределенность времени жизни не должна превышать самого времени жизни, $\Delta\tau = \tau$. Из соотношения неопределенности $\Delta E \Delta\tau \geq \hbar$ получим для оценки $\Delta E \tau \approx \hbar$. Здесь ΔE - ширина энергетического уровня или энергетическая зона.

Если $\tau = 10^{-8}$ с, то

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{10^{-8}} = 1,05 \cdot 10^{-26} \text{ Дж} = 7 \cdot 10^{-8} \text{ эВ}.$$

Если, $\tau = \infty$, то $\Delta E = 0$.

Задача 2.11. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками и шириной l (Рис.2.3). Найти возможные значения энергии, выражения для собственных функций частицы и распределение вероятности обнаружения частицы по ширине ямы.

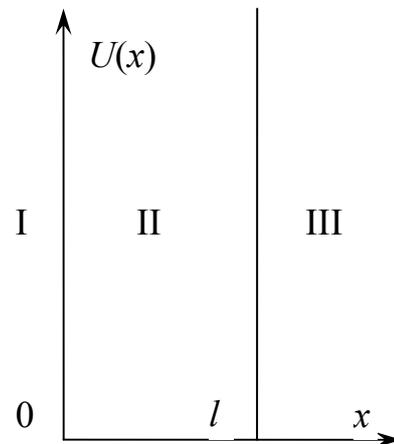


Рис. 2.3.

Решение. По условию задачи

$$U(x) = 0 \text{ при } 0 < x < l;$$

$$U(x) = \infty \text{ при } x \leq 0, x \geq l.$$

Все пространство $-\infty < x < \infty$ разобьем на три области: I, II, III. Поскольку потенциальная яма имеет бесконечно высокие стенки, то электрон не может выйти за ее пределы, т.е. вероятность обнаружить электрон в областях I и III равна нулю: $|\psi_1(x)|^2 = 0$ и $|\psi_3(x)|^2 = 0$.

Граничные условия непрерывности волновой функции ψ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = l$ имеют вид

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0; \quad \psi_2(l) = \psi_3(l) = 0.$$

Запишем уравнение Шредингера для электрона в области II

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi_2 = 0.$$

Здесь

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

С учетом введенного обозначения уравнение Шредингера запишем в виде

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k^2\psi_2 = 0.$$

Его решение будем искать в виде

$$\psi_2(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx),$$

где A и B - некоторые постоянные, определяемые из граничных условий. Используя граничные условия при $x = 0$ получим, что константа $B = 0$. Подставляя $x = l$, находим $\psi_2(l) = 0$, то есть $A\sin(kl) = 0$. Поскольку $A \neq 0$, то $\sin(kl) = 0$. Тогда

$$kl = n\pi,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Откуда находим возможные значения энергии электрона

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2.$$

Таким образом, граничные условия выполняются лишь для дискретного ряда значений энергии E_n . Следовательно, из решения уравнения Шредингера следует, что частица, находящаяся в потенциальной яме, может иметь только дискретный спектр энергий.

Теперь решение уравнения Шредингера можно записать в виде $\psi_2(x) = A\sin(kl)$, или подставив значения $k = n\pi/l$, получим

$$\psi_2(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Постоянную A найдём из условия нормировки на единицу:

$$\int_0^l |\psi_2(x)|^2 dx = 1.$$

$$\int_0^l A_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = A_n^2 \int_0^l \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{l}x\right)\right] dx = \frac{1}{2} A_n^2 l = 1.$$

Следовательно, $A_n = \sqrt{2/l}$. Для волновой функции ψ_2 получим нормированное выражение

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Плотность вероятности обнаружения частицы в состояниях, описываемых найденной ψ -функцией, по определению равна

$$w = \frac{dW}{dx}$$

Вероятность dW обнаружить частицу в интервале dx равна

$$dW = w dx = \psi(x)\psi^*(x)dx = |\psi|^2 dx = \frac{2 \sin^2(n\pi x/l) dx}{l}.$$

$\psi(x)$, $\psi^*(x)$ - комплексно сопряженные значения $\psi(x)$ -функции. Состояния электронов, описываемые этой функцией, являются стационарными состояниями. На рис. 2.4 приведены графики: (а) - значений энергии E_n , (б) - волновых функций $\psi_n(x)$ и (в) - плотностей распределения вероятности $w_n(x) = |\psi_n(x)|^2$.

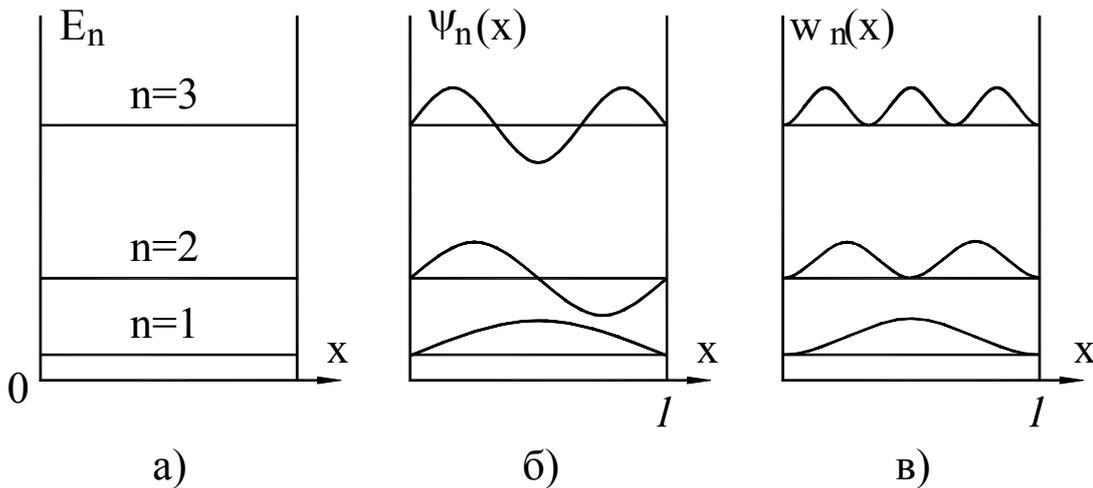


Рис. 2.4

График $w_n(x) = |\psi_n(x)|^2 = \psi_n(x)\psi_n^*(x)$ характеризует распределение вероятности обнаружения частицы внутри ямы при различных значениях энергии частицы. Как видно из рисунка, в низшем энергетическом состоянии $n=1$ (основное состояние) с наибольшей вероятностью можно найти частицу около середины ямы, а вероятность найти ее у стенок равна нулю. Этот результат резко отличается от того, который можно ожидать для макроскопической частицы. Классическую частицу с равной вероятностью можно найти в любом месте пространства.

Задача 2.12. Показать, что спектр энергии свободной частицы с периодической ψ -функцией непрерывен.

Решение. Для свободной частицы волновая функция имеет вид $\psi(x) = Ae^{ikx}$, где k - волновое число. Если на концах участка длиной l ψ -функция имеет одинаковые значения, то есть является периодической, то $\psi(x) = \psi(x+l)$ (квантование на длину периодичности). Следовательно $Ae^{ikx} = Ae^{ik(x+l)}$. Это означает, что $e^{ikl} = 1$. Используя формулу Эйлера, получим

$$e^{ikl} = \cos kl + i \sin kl = 1;$$

$$i \sin kl = 0; \cos kl = 1.$$

$$\text{Следовательно, } kl = 2\pi n; k = \frac{2\pi n}{l}; k^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{l^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Откуда получим выражение для энергии частицы

$$E = \frac{n^2 \hbar^2}{2ml^2}, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Если частица имеет макроскопические размеры, то несмотря на малую массу частицы, спектр энергии практически непрерывен. Расстояние между энергетическими уровнями:

$$\Delta E = \frac{\hbar^2((n+1)^2 - n^2)}{2ml^2} = \frac{\hbar^2(2n+1)}{2ml^2} \approx 0.$$

Задача 2.13. Моноэнергетический поток электронов с энергией E падает на низкий ($E > U_0$) потенциальный барьер бесконечной ширины (рис.2.5).

Записать стационарные уравнения Шредингера. Представить вид их решения. Найти коэффициенты отражения и прозрачности барьера.

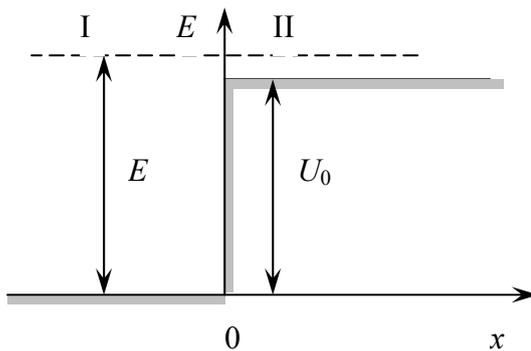


Рис. 2.5.

Решение. Движению электронов происходит в двух областях:

- 1) $U = 0$ ($x < 0$)
- 2) $U = U_0$ ($x \geq 0$)

Уравнения Шредингера для этих областей:

$$\psi_1'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1 = 0 \quad (m - \text{масса}$$

электрона)

$$\psi_2'' + \frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2} \psi_2 = 0$$

Учитывая, что $\frac{2mE}{\hbar^2} = k_1^2$ и $\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2} = k_2^2$

где k_1, k_2 - волновые числа, решения уравнений Шредингера представим в виде:

$$\psi_1(x) = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x} \quad (x < 0)$$

$$\psi_2(x) = a_2 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x} \quad (x > 0)$$

где a и b - амплитуды волн.

Слагаемые правой части функции $\psi(x)$ можно рассматривать как суперпозицию двух волн (прямой и отраженной), но так как в области 2 нет отраженной волны, то $b_2 = 0$. Значит $\psi_2(x) = a_2 e^{ik_2 x}$

Воспользуемся условием непрерывности ψ -функции и ее первой производной ψ' на границе раздела:

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \Rightarrow a_1 + b_1 = a_2$$

$$\psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0) \Rightarrow ik_1(a_1 - b_1) = ik_2 a_2$$

$$a_1 = \frac{a_2}{2} \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \right) = \frac{a_2}{2k_1} (k_1 + k_2)$$

$$b_1 = \frac{a_2}{2} \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) = \frac{a_2}{2k_1} (k_1 - k_2)$$

Коэффициент отражения R равен отношению интенсивностей отраженной и падающей волн, а те в свою очередь пропорциональны квадратам амплитуд:

$$R = \left(\frac{b_1}{a_1} \right)^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

Коэффициент прозрачности:

$$D = 1 - R = 1 - \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

D всегда больше нуля.

Задача 2.14. Моноэнергетический поток электронов с энергией E падает на высокий ($E < U_0$) потенциальный барьер бесконечной ширины (рис.2.6). Записать уравнения Шредингера, представить вид их решения. Найти распределение плотности вероятности $w(x)$.

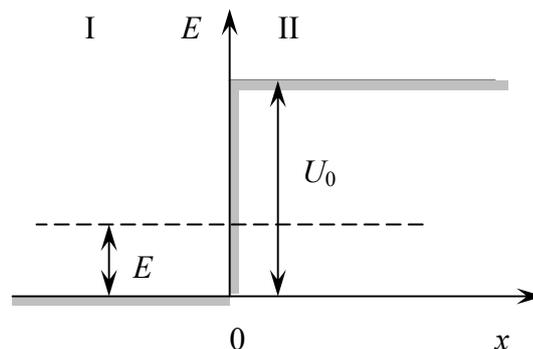


Рис. 2.6.

Решение. Стационарные уравнения Шредингера для областей 1 и 2:

$$\psi_1'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1 = 0; \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_2'' - \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} \psi_2 = 0; \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}$$

Решение уравнений:

$$\psi_1(x) = a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}$$

$$\psi_2(x) = a_2 e^{k_2 x} + b_2 e^{-k_2 x}$$

Так как при $x \rightarrow \infty$, слагаемое $a_2 e^{k_2 x} \rightarrow \infty$, а это нарушение свойства ограниченности функции $\psi_2(x)$. Тогда $a_2 = 0$ и

$$\psi_2(x) = b_2 e^{-k_2 x}.$$

Используем свойства непрерывности функций и их производных:

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \Rightarrow a_1 + b_1 = b_2$$

$$\psi_1'(x=0) = \psi_2'(x=0) \Rightarrow ik_1(a_1 - b_1) = -k_2 b_2$$

$$a_1 - b_1 = -\frac{1}{i} \frac{k_2}{k_1} b_2, \text{ но } -\frac{1}{i} = i, \text{ то есть } a_1 - b_1 = i \frac{k_2}{k_1} b_2$$

Решаем систему двух уравнений, получим

$$a_1 = \frac{b_2}{2} \left(1 + i \frac{k_2}{k_1} \right)$$

$$b_1 = \frac{b_2}{2} \left(1 - i \frac{k_2}{k_1} \right)$$

Из этих выражений следует, что a_1 и b_1 - комплексно сопряженные числа. Их можно представить в виде, не связанном с b_2 :

$$a_1 = a e^{i\varphi}$$

$$b_1 = a e^{-i\varphi}; \quad \varphi = \text{const}$$

Используя уравнения Эйлера:

$$a_1 = a(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad b_1 = a(\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

$$b_2 = a_1 + b_1 = 2a \cos \varphi$$

Тогда решения уравнений Шредингера:

$$\psi_1(x) = a e^{i\varphi} e^{ik_1 x} + a e^{-i\varphi} e^{-ik_1 x} = a e^{i(k_1 x + \varphi)} + a e^{-i(k_1 x + \varphi)} =$$

$$= a [\cos(k_1 x + \varphi) + i \sin(k_1 x + \varphi) + \cos(k_1 x + \varphi) - i \sin(k_1 x + \varphi)] = 2a \cos(k_1 x + \varphi).$$

Это косинусоида.

$$\psi_2(x) = b_2 e^{-k_2 x} = 2a \cos \varphi \cdot e^{-k_2 x} .$$

Это экспонента.

Плотность вероятности электронов вдоль оси x :

$$w(x) = |\psi(x)|^2$$

$$w_1(x) = 4a^2 \cos^2(k_1 x + \varphi), \text{ при } x = 0 \quad w_1(0) = 4a^2 \cos^2 \varphi$$

$$w_2(x) = 4a^2 \cos^2 \varphi \cdot e^{-2k_2 x}, \text{ при } x = 0 \quad w_2(0) = 4a^2 \cos^2 \varphi$$

$$w_1(0) = w_2(0)$$

Графическая интерпретация $\psi(x)$ и $w(x)$

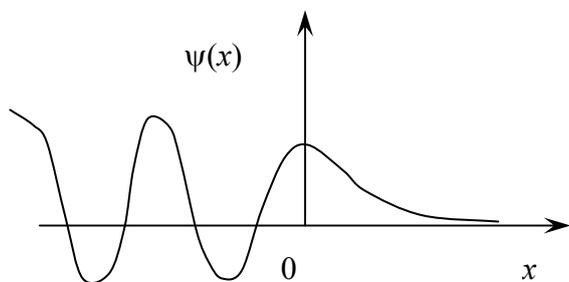


Рис. 2.7.

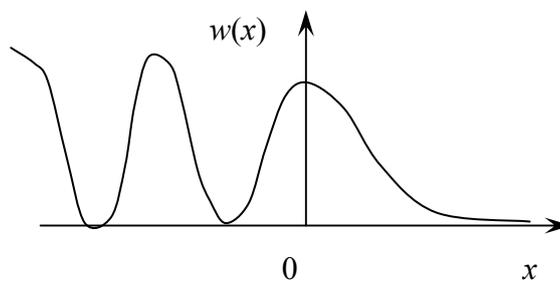


Рис. 2.8.

Задача 2.15. Частица с массой m и энергией E налетает слева на высокий ($E < U_0$) потенциальный барьер конечной ширины l (рис.2.9).

а) Найти коэффициент прозрачности барьера D для частицы (m, E)

б) вычислить вероятность прохождения через барьер $U_0 = 10$ эВ и $l = 10^{-8}$ см электрона ($E = 5$ эВ) и протона ($E = 5$ эВ).

в) Записать вид функции $w(x)$

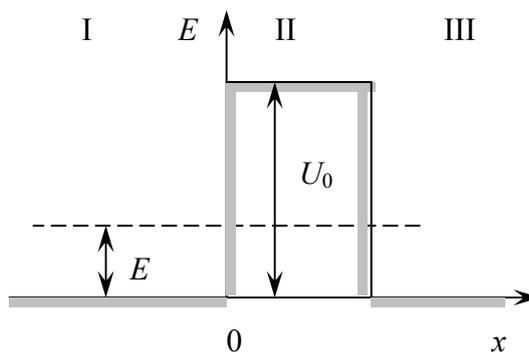


Рис. 2.9.

Решение. Запишем стационарные уравнения Шредингера для трех областей ($x < 0$; $0 \leq x \leq l$; $x > l$) области 1 и 3:

$$\psi_{1,3}'' + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_{1,3} = 0; \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_2'' + \frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2} \psi_2 = 0; \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}}$$

Решения этих уравнений:

$$\psi_1(x) = a_1 e^{ikx} + b_1 e^{-ikx}$$

$$\psi_2(x) = a_2 e^{k_2 x} + b_2 e^{-k_2 x}$$

$$\psi_3(x) = a_3 e^{ik(x-l)}$$

Волновой функции $\psi_3(x)$ только одно слагаемое, так как в области 3 частица может двигаться только слева направо.

Для нахождения соотношений между амплитудами ψ -функций воспользуемся условиями непрерывности ψ -функций и их первых производных.

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \Rightarrow a_1 + b_1 = a_2 + b_2$$

$$\psi_2(l) = \psi_3(l) \Rightarrow a_2 e^{k_2 l} + b_2 e^{-k_2 l} = a_3$$

$$\psi_1'(0) = \psi_2'(0) \Rightarrow ik(a_1 - b_1) = k_2(a_2 - b_2)$$

$$\psi_2'(l) = \psi_3'(l) \Rightarrow k_2(a_2 e^{k_2 l} - b_2 e^{-k_2 l}) = ika_3$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \\ a_1 - b_1 = \frac{k_2}{ik}(a_2 - b_2) \end{cases}$$

Выразим a_1 через a_3 , так как коэффициент прозрачности барьера $D = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2$. Для этого, во-первых, решим систему, исключив b_1 . Учтем сначала, что $-i = 1/i$.

$$2a_1 = i \frac{k_2}{k} (b_2 - a_2) + a_2 + b_2 = i \frac{k_2}{k} b_2 - i \frac{k_2}{k} a_2 + a_2 + b_2 = a_2 \left(1 - i \frac{k_2}{k}\right) + b_2 \left(1 + i \frac{k_2}{k}\right)$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \left[a_2 \left(1 - i \frac{k_2}{k}\right) + b_2 \left(1 + i \frac{k_2}{k}\right) \right]$$

Вторая система:

$$\begin{cases} a_2 e^{k_2 l} + b_2 e^{-k_2 l} = a_3 \\ k_2 (a_2 e^{k_2 l} - b_2 e^{-k_2 l}) = ika_3 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_2 e^{k_2 l} + b_2 e^{-k_2 l} = a_3 \\ a_2 e^{k_2 l} - b_2 e^{-k_2 l} = \frac{ik}{k_2} a_3 \end{cases}$$

Исключим вычитанием a_2

$$b_2 e^{-k_2 l} + b_2 e^{-k_2 l} = a_3 - \frac{ik}{k_2} a_3$$

$$2b_2 e^{-k_2 l} = a_3 \left(1 - \frac{ik}{k_2}\right); \quad b_2 = \frac{a_3 \left(1 - \frac{ik}{k_2}\right)}{2e^{-k_2 l}}$$

Теперь исключим сложением b_2

$$2a_2 e^{k_2 l} = a_3 + \frac{ik}{k_2} a_3 = a_3 \left(1 + \frac{ik}{k_2}\right)$$

$$a_2 = \frac{a_3 \left(1 + \frac{ik}{k_2}\right)}{2e^{k_2 l}}$$

Тогда $a_1 = f(a_3)$

$$a_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{a_3 \left(1 + \frac{ik}{k_2}\right) \left(1 - \frac{ik_2}{k}\right)}{2e^{k_2 l}} + \frac{a_3 \left(1 - \frac{ik}{k_2}\right) \left(1 + \frac{ik_2}{k}\right)}{2e^{-k_2 l}} \right]$$

Так как $k_2 l \gg 1$ и $\frac{1}{e^{-k_2 l}} = e^{k_2 l}$, то первым слагаемым этой суммы можно пренебречь, то есть

$$a_1 \approx \frac{a_3 \left(1 - \frac{ik}{k_2}\right) \left(1 + \frac{ik_2}{k}\right) e^{k_2 l}}{4}$$

Коэффициент прозрачности барьера D :

$$D = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \approx \frac{16 \frac{k^2}{k_2^2} e^{-2k_2 l}}{\left(1 + \frac{k^2}{k_2^2}\right)^2}$$

Так как $\frac{k}{k_2} = \sqrt{\frac{E}{U_0 - E}}$, то

$$D \approx C e^{-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}}, \quad \text{где } C = \frac{16 \frac{k^2}{k_2^2}}{\left(1 + \frac{k^2}{k_2^2}\right)^2} \approx 1$$

Для электрона $D_e \approx 0,267$ вероятность проникновения через барьер существенна, а для протона $D_e \approx 10^{-47}$ ничтожно мала.

Задача 2.16. На пути электрона с длиной волны де Бройля $\lambda = 1,5 \text{ \AA}$ находится потенциальный барьер высотой $U_0 = 40 \text{ эВ}$. Определить длину волны де Бройля после прохождения барьера.

Решение. Движение электронов в направлении x разбиваем на две области. В области I $x < 0$ $U(x) = 0$, поэтому электрон движется как свободная частица. Уравнение Шредингера в области I имеет вид

$$\psi_1'' + k_1^2 \cdot \psi_1 = 0,$$

где $k_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2} = 2\pi/\lambda_1$, $\lambda = 1,5 \text{ \AA}$. Отсюда найдем энергию электрона

$$E = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2m\lambda_1^2} = \frac{\hbar^2}{2m\lambda_1^2} = \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (1,5 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 66,9 \text{ эВ}.$$

Для области II $x > 0$ $U(x) = U_0$ уравнение Шредингера имеет вид $\psi_2'' + k_2^2 \psi_2 = 0$, где $k_2 = \sqrt{2m(E - U_0)/\hbar^2} = 2\pi/\lambda_2$. Отсюда найдем

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E - U_0)}} = \frac{h}{\sqrt{2m(E - U_0)}} = \\ &= \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} (66,9 - 40) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}} = 2,37 \text{ \AA}. \end{aligned}$$

Задача 2.17. Поток моноэнергетических электронов с энергией $E = 149 \text{ эВ}$ падает на высокий прямоугольный потенциальный барьер бесконечной ширины высоты $U_0 = 150 \text{ эВ}$ (см. рис 2.6). Рассчитать относительную вероятность нахождения электрона на расстояниях: $x_1 = 1 \text{ \AA}$, $x_2 = 5 \text{ \AA}$, $x_3 = 10 \text{ \AA}$ от границы барьера.

Решение. Оценим относительную вероятность обнаружения частицы в области II при указанных в условиях задачи значениях x . Относительная вероятность рассчитывается по формуле $|\psi_2|^2/a_2^2 = e^{-2k_2x}$, где $k_2 = \sqrt{2m(U_0 - E)/\hbar^2}$.

При заданной разности $U_0 - E = 1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ и $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ получим:

$$x_1 = 1 \text{ \AA}; e^{-2k_2 x_1} = e^{-1,028} = 0,358$$

$$x_2 = 5 \text{ \AA}; e^{-2k_2 x_2} = e^{-5,2} = 0,005$$

$$x_3 = 10 \text{ \AA}; e^{-2k_2 x_3} = e^{-10,28} = 3,43 \cdot 10^{-5}.$$

С увеличением x вероятность обнаружения частицы в области II экспоненциально убывает.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

2.18. Вычислить длину волны де Бройля электрона, движущегося со скоростью $v = 7,4 \cdot 10^8 \text{ см/с}$.

2.19. Найти отношения длин волн де Бройля электрона и протона, прошедших ускоряющую разность потенциалов $U = 1000 \text{ В}$.

2.20. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U_0 = 200 \text{ В}$ имеет длину волны де Бройля $\lambda = 0,0202 \text{ \AA}$. Найти массу частицы, если известно, что ее заряд численно равен заряду электрона.

2.21. Вычислить длины волн де Бройля электрона λ_1 , протона λ_2 и атома урана ^{238}U λ_3 , имеющих кинетическую энергию $T = 100 \text{ эВ}$.

2.22. Какую энергию ΔE необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его длина волны де Бройля уменьшилась от $\lambda_1 = 1,0 \text{ \AA}$ до $\lambda_2 = 0,5 \text{ \AA}$.

2.23. На грань кристалла никеля падает пучок электронов. Кристалл поворачивают так, что угол скольжения меняется. Когда этот угол равен $\theta = 64^\circ$, наблюдается максимальное отражение электронов, соответствующее максимуму первого порядка. Приняв расстояние между атомными плоскостями $d = 2 \text{ \AA}$, определить скорость электронов.

2.24. При увеличении энергии электрона на $\Delta E = 200 \text{ эВ}$ его длина волны де Бройля изменилась в $\eta = 2$ раза. Найти первоначальную длину волны электрона.

2.25. Найти длину волны де Бройля молекул водорода, движущихся с наиболее вероятной скоростью в газе при температуре $T = 20^\circ \text{C}$.

2.26. Протон с длиной волны $\lambda_2 = 1,7 \text{ нм}$ упруго рассеялся под углом 90° на первоначально покоившейся частице, масса которой в $n = 4$ больше массы протона. Определить длину волны λ_1 рассеянного протона.

2.27. Поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой щелью шириной $b = 2 \text{ мкм}$. Найти скорость электронов, если на экране, расположенном от щели на расстоянии $l = 50 \text{ см}$ ширина центрального дифракционного максимума $\Delta x = 0,36 \text{ мм}$.

2.28. Найти кинетическую энергию электронов T , падающих нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, если на экране, отстоящем от диафрагмы на $l = 75 \text{ см}$ расстояние между соседними максимумами $\Delta x = 7,5 \text{ мкм}$. Расстояние между щелями $d = 25 \text{ мкм}$.

2.29. Узкий пучок моноэнергетических электронов падает под углом скольжения $\theta = 30^\circ$ на естественную грань монокристалла алюминия. Расстояние между соседними кристаллическими плоскостями, параллельными этой грани монокристалла, $d = 0,2 \text{ нм}$. При каком ускоряющем напряжении U_0 наблюдается максимум зеркального отражения? Известно, что следующий максимум зеркального отражения возникает при увеличении ускоряющего напряжения в $\eta = 2,25$ раза.

2.30. Пучок электронов с кинетической энергией $T = 180 \text{ эВ}$ падает нормально на поверхность монокристалла никеля. В направлении, составляющем угол $\alpha = 55^\circ$ нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения четвертого порядка. Найти межплоскостное расстояние d , соответствующее этому отражению.

2.31. Электрон движется по окружности радиуса $R = 0,5 \text{ см}$ в однородном магнитном поле с индукцией $B = 8 \text{ мТл}$. Определить длину волны де Бройля для электрона.

2.32. Определить длину волны де Бройля для электрона находящегося на второй орбите атома водорода.

2.33. С какой кинетической энергией движется электрон, если длина волны де Бройля равна его комптоновской длине волны?

2.34. Релятивистская частица с массой m движется с кинетической энергией T . Найти длину волны де Бройля частицы.

2.35. Вычислить волну де Бройля релятивистских электронов, подлетающих к катоду рентгеновской трубки, если длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра равна $\lambda_{\text{к}} = 10 \text{ пм}$.

2.36. При каких значениях кинетической энергии электрона и протона ошибка в вычислении длины волны де Бройля по нерелятивистской формуле не превышает 1%?

2.37. Пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $U_0 = 133\text{В}$ падает под углом $\theta = 45^\circ$ на естественную грань монокристалла серебра. При этом вертикально отраженный пучок образует максимум третьего порядка. Межплоскостное расстояние $d = 2\text{Å}$. Найти внутренний потенциал серебра. Внутренний потенциал кристалла $U_0 = A_{\text{вых}}/e$.

2.38. Какова энергия нейтрона T , имеющего длину волны $\lambda = 2\text{Å}$? При какой температуре T_1 его энергия при тепловом равновесии имела бы эту величину?

2.39. Оценить кинетическую энергию, которой должны обладать на выходе из ускорителя электроны, для того, чтобы они могли в экспериментах по рассеянию эффективно использоваться для исследования внутренней структуры объектов с линейными размерами

порядка 1) $l \approx 1\text{Å}$ (атом), 2) $\lambda = 10^{-15}\text{м}$ (атомное ядро). Во втором случае считать, что электрон релятивистский, то есть

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2m_0c^2)}}.$$

2.40. В опытах по дифракции электронов на поликристаллической фольге найдено, что диаметр дифракционного кольца, соответствующего отражению первого порядка от плоскостей с межплоскостным расстоянием d , равен $D = 3\text{ см}$. Расстояние от фольги до экрана $l = 15\text{ см}$. Энергия электронов равна $T = 200\text{ эВ}$. Найти величину d .

2.41. Пучок электронов с энергией T проходит через тонкую поликристаллическую золотую фольгу, а затем попадает на фотопластинку. Области почернения на пластинке имеют форму концентрических колец с центрами на оси пучка. Рассчитать радиусы первого и второго колец, если расстояние от фольги до пластинки $l = 10\text{ см}$, $d = a/\sqrt{2}$, где постоянная решетки $a = 2,88 \cdot 10^{-10}\text{ м}$.

2.42. Оценить наименьшие ошибки с которыми можно определить скорость электрона Δv_1 , протона Δv_2 и шарика Δv_3 массой $m = 1\text{ мг}$, если их координаты установлены с неопределенностью $\Delta x = 1\text{ мкм}$.

2.43. Оценить неопределенность скорости электрона Δv в атоме водорода, полагая размер атома $l = 0,1\text{ нм}$, $\Delta x \approx l/2$. Сравнить

полученное значение Δv со скоростью электрона v_1 на первой боровской орбите

2.44. В некоторый момент область локализации свободного электрона $\Delta x_0 = 0,1$ нм. Оценить ширину области локализации этого электрона Δx спустя промежуток времени $t = 1$ с. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

2.45. Во сколько раз длина волны де Бройля λ меньше неопределенности ее координаты Δx , которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1%.

2.46. Предполагая, что неопределенность координаты Δx движущейся частицы равна длине волны де Бройля λ , определить относительную неопределенность импульса $\Delta p/p$ этой частицы.

2.47. Оценить, имеет ли смысл понятие траектории электрона в камере Вильсона, летящего со скоростью $v = 1$ км/с, если толщина следа $\Delta x \approx 10^{-1}$ мм.

2.48. Оценить минимальную кинетическую энергию T_{\min} электрона, локализованного в области размером $l = 0,1$ нм.

2.49. Электрон с кинетической энергией $T = 10$ эВ локализован в области $l = 0,1$ мкм. Найти относительную неопределенность скорости электрона. Считать $\Delta x = l/2$.

2.50. Оценить кинетическую энергию нуклона в ядре, полагая радиус ядра $r \approx 10^{-13}$ см.

2.51. Частица массы m локализована в области размером l . Оценить кинетическую энергию T частицы, при которой ее относительная неопределенность будет около 0,01.

2.52. Используя соотношение неопределенности $\Delta x \Delta p \approx \hbar$ оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять $\Delta x \approx l/2$, где линейный размер атома $l = 0,1$ нм.

2.53. Приняв, что минимальная энергия нуклона в ядре $E = 10$ МэВ, оценить линейные размеры ядра.

2.54. Атом испустил фотон с длиной волны $\lambda = 0,58$ мкм за время $\tau = 10^{-8}$ с. Оценить неопределенность Δx с которой можно установить координату фотона в направлении его движения, а также относительную неопределенность $\Delta \lambda/\lambda$ его длины волны.

2.55. Типичное время жизни τ возбужденных ядер имеет порядок 10^{-12} с. Найти неопределенность энергии ΔE (в МэВ) испускаемых γ -лучей.

2.56. Свободно движущаяся нерелятивистская частица имеет относительную неопределенность кинетической энергии $\Delta T/T$. Оценить, во сколько раз неопределенность координаты Δx такой частицы больше ее волны де Бройля λ .

2.57. Оценить относительную ширину спектральной линии $\Delta\omega/\omega$, если время жизни атома в возбужденном состоянии $\tau \approx 10^{-8}$ с, а длина волны излучаемого фотона $\lambda = 0,6$ мкм.

2.58. Написать стационарное уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора. Учесть, что сила, возвращающая частицу в равновесие $F = -bx$, где b - коэффициент пропорциональности, x - смещение.

2.59. Написать уравнение Шредингера для свободного электрона, движущегося в положительном направлении оси x со скоростью v .

2.60. Основное состояние электрона в электростатическом поле ядра атома водорода описывается радиальной волновой функцией

$R(r) = A \cdot e^{-\frac{r}{r_1}}$, где A - некоторая постоянная, r_1 - первый боровский радиус. Найти расстояние r от электрона до ядра, при котором плотность вероятности $w(r)$ имеет максимальное значение.

2.61. Состояние частицы описывается волновой функцией $\psi(x) = A \cdot \exp(-\alpha \cdot x^2)$, где α - положительная постоянная. Найти нормировочный коэффициент A .

2.62. Найти нормировочный коэффициент A для волновой функции $\psi(x) = A \cdot \sin(k \cdot x)$, которая удовлетворяет граничным условиям $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

2.63. Основное состояние электрона в электростатическом поле ядра атома водорода описывается радиальной волновой функцией $R(r) = A \cdot \exp(-r/r_1)$, где A - некоторая постоянная,

$r_1 = \frac{4\pi \cdot \epsilon_0 \hbar^2}{m \cdot a^2}$ - первый боровский радиус. Найти вероятность обнаружения электрона в области $r \geq 2r_1$.

2.64. Радиальная волновая функция некоторой частицы имеет вид $R(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, где r - расстояние от этой частицы до силового центра, A и a - постоянные. Определить коэффициент A .

2.65. Электрон находится в возбужденном состоянии, описываемом радиальной волновой функцией: $R(r) = A \left(1 - \frac{r}{2r_1}\right) \cdot e^{-\frac{r}{2r_1}}$,

где r_1 - радиус первой боровской орбиты. Найти нормировочный коэффициент A .

2.66. Электрон находится в возбужденном состоянии, описываемом радиальной волновой функцией: $R(r) = A \left(1 - \frac{r}{2r_1} \right) \cdot e^{-\frac{r}{2r_1}}$,

где r_1 - радиус первой боровской орбиты. Найти значение r , при котором плотность распределения вероятности $w(r)$ имеет максимальное значение.

2.67. Частица массой m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти энергию частицы E в стационарном состоянии, описываемом волновой функцией, пропорциональной $\sin kx$, где k - заданная постоянная, x - расстояние от одного края ямы.

2.68. Частица массой m находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти: 1) массу частицы, если ширина ямы l и разности энергий третьего и второго энергетических уровней равна ΔE ; 2) квантовое число n энергетического уровня частицы, если интервалы энергии до соседних с ним верхнего и нижнего уровней относятся как $\eta:1$, где $\eta = 1,4$.

2.69. Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной l . Найти вероятность W обнаружения частицы в области $l/3 < x < 2l/3$.

2.70. Частица массой m находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Максимальное значение линейной плотности вероятности нахождения частицы равно w_{\max} . Найти ширину ямы l и энергию частицы в этом состоянии.

2.71. Электрону в потенциальной яме шириной l отвечает волновое число $k = \pi n/l$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Используя связь энергии электрона E с волновым числом k получить выражение для собственных значений энергии E_n .

2.72. Частица находится в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти отношение разности соседних энергетических уровней к энергии частицы в трех случаях: 1) $n = 3$; 2) $n = 10$; 3) $n \rightarrow \infty$. Пояснить физический смысл полученных результатов.

2.73. Электрон находится в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной $l = 0,5$ нм. Найти (в эВ) наименьшую разность ΔE_{\min} энергетических уровней электронов.

2.74. Собственная функция, описывающая состояние частицы, имеет вид $\psi_n(x) = C \sin(n\pi x/l)$. Используя условия нормировки, определить постоянную C .

2.75. Решение уравнения Шредингера для бесконечно глубокой потенциальной ямы можно записать в виде $\psi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$, где $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Используя граничные условия и условия нормировки определить 1) коэффициенты C_1 и C_2 2) собственные значения энергии E_n 3) выражение для собственной нормированной ψ -функции.

2.76. В одномерной потенциальной яме шириной l находится электрон. Вычислить вероятность W обнаружения электрона на первом энергетическом уровне в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

2.77. Вычислить отношение вероятностей W_1/W_2 нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

2.78. Электрон находится в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной l . Определить среднее значение координаты электрона ($0 < x < l$).

2.79. Зная решение уравнения Шредингера для низкого потенциального барьера $\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$, $\psi_2(x) = A_2 e^{-k_2 x}$ определить из условия непрерывности ψ -функций и их производных на границе барьера отношение амплитуд B_1/A_1 и A_2/A_1 .

2.80. Зная отношение амплитуд $B_1/A_1 = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$ для волны, отраженной от барьера и $A_2/A_1 = 2k_1/(k_1 + k_2)$ для проходящей волны, найти выражения для коэффициента отражения R и коэффициента прохождения D .

2.81. На пути электрона с длиной волны де Бройля $\lambda_1 = 1 \text{ \AA}$ находится потенциальный барьер высотой $U_0 = 120 \text{ эВ}$. Определить длину волны де Бройля λ_2 после прохождения барьера.

2.82. Электрон с энергией $E = 100 \text{ эВ}$ падает на потенциальный барьер высотой $U_0 = 64 \text{ эВ}$. Определить вероятность W того, что электрон отразится от барьера.

2.83. Определить коэффициент преломления волн де Бройля на границе потенциальной ступени (рис. 2.10). Кинетическая

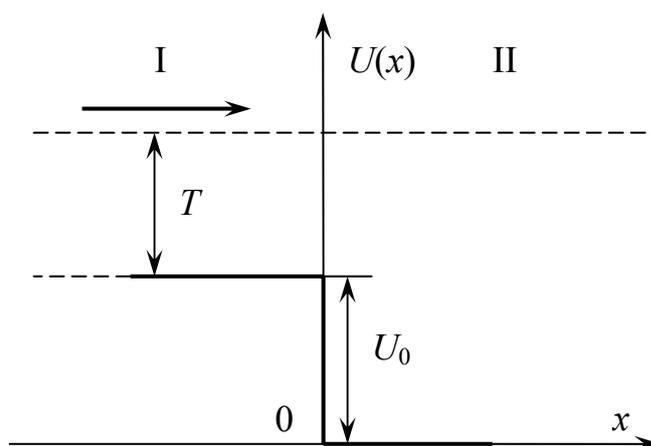


Рис. 2.10.

энергия протонов $T = 16$ эВ, а высота потенциальной ступени - $U_0 = 9$ эВ.

2.84. Коэффициент отражения протона от потенциального барьера $R = 2,5 \cdot 10^{-5}$. Определить, какой процент составляет высота барьера U_0 от кинетической энергии T подающих на барьер протонов.

2.85. Вывести формулу связывающего коэффициент преломления n на граница низкого потенциального барьера и коэффициент отражения R от него.

2.86. Электрон с энергией $E = 10$ эВ падает на прямоугольный потенциальный барьер. Определить высоту барьера U_0 , при которой показатель преломления волн де Бройля n численно равен коэффициенту отражения R .

2.87. Кинетическая энергия электрона в два раза превышает высоту потенциального барьера. Определить коэффициент отражения R и коэффициент прохождения D электронов для барьера.

2.88. Коэффициент прохождения электронов через низкий потенциальный барьер равен коэффициенту отражения $D = R$. Определить, во сколько раз кинетическая энергия T электронов больше высоты потенциального барьера U_0 .

2.89. Вывести формулу, связывающую коэффициент прохождения D электронов через потенциальный барьер и коэффициент преломления n волн де Бройля.

2.90. Коэффициент прохождения протонов через потенциальный барьер $D = 0,8$. Чему равен показатель преломления n волн де Бройля на границе барьера?

2.91. Вычислить коэффициент прохождения D электронов с энергией $E = 100$ эВ через потенциальный барьер с высотой $U_0 = 99,75$ эВ.

2.92. Для областей I и II высокого потенциального барьера (см. рис. 2.6) волновые функции имеют вид $\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}$, $\psi_2(x) = A_2 e^{-kx}$. Используя непрерывность ψ -функций и их первых производных на границе барьера, найти отношения амплитуд A_2/A_1 .

2.93. Электрон проходит через прямоугольный потенциальный барьер шириной $d = 0,5$ нм. Высота барьера больше энергии электрона на 1%. Вычислить коэффициент прозрачности D для случаев 1) $E = 10$ эВ; 2) $E = 100$ эВ.

2.94. Ширина прямоугольного барьера. $d = 0,2$ нм. Разность энергий $U_0 - E = 1$ эВ. Во сколько раз изменится вероятность

прохождения электрона через барьер, если разность энергий возрастет в 10 раз?

2.95. При какой ширине d прямоугольного потенциального барьера коэффициент прозрачности для электронов $D = 0,01$. Разность энергий $U_0 - E = 10$ эВ.

2.96. Электрон с энергией E движется в положительном направлении оси x . При каком значении $U_0 - E$, выраженном в эВ коэффициент прозрачности $D = 0,001$, если ширина барьера $d = 0,1$ нм?

2.97. Электрон с энергией $E = 9$ эВ движется в положительном направлении оси x . Оценить вероятность W того, что электрон пройдет через потенциальный барьер, если его высота $U_0 = 10$ эВ и ширина $d = 0,2$ нм.

2.98. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $d = 0,1$ нм. При какой разности энергий $U_0 - E$ вероятность прохождения электрона через барьер $W = 0,99$.

3. Основы квантовой физики атомов

3.1. Основные понятия и законы

Теория Бора для атома водорода и водородоподобных ионов

Первый постулат Бора: существуют некоторые стационарные состояния атома водорода, находясь в которых он не излучает энергии. Этим стационарным состояниям соответствуют вполне определенные (стационарные) орбиты, по которым движется электрон.

Второй постулат Бора: при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается квант энергии. Излучение происходит при переходе электрона в атоме из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией

$$E_n - E_m = \Delta E = h\nu. \quad (3.1)$$

Третий постулат Бора: в стационарном состоянии атома, когда электрон находится на с орбите с энергией E_n , момент импульса электрона принимает дискретные значения, удовлетворяющие условию:

$$L_n = mvr = n\hbar, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

Здесь m – масса электрона, v – скорость электрона, r – радиус его орбиты, n – главное квантовое число (номер энергетического уровня), \hbar – постоянная Планка.

Целое число n равно количеству длин волн де Бройля для электронов, укладываемых на длине стационарной орбиты, т.е. отношению длины окружности к длине волны де Бройля.

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r m v}{h} = \frac{m v r}{\hbar} = n. \quad (3.3)$$

Второй закон Ньютона для электрона в атоме или ионе с $Z \geq 1$ ($\text{He}^+ Z=2, \text{Li}^{++} Z=3$) имеет вид

$$F = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m v_n^2}{r_n}, \quad (3.4)$$

Из (3.2) и (3.4) получим энергию электрона, находящегося на n -ой боровской орбите:

$$E_n = -\frac{mZ^2|e|^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (3.5)$$

Скорость электрона, находящегося на n -ой боровской орбите:

$$v_n = \frac{Z|e|^2}{2\varepsilon_0 h} \cdot \frac{1}{n}. \quad (3.6)$$

Радиус орбиты

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z |e|^2} \cdot n^2. \quad (3.7)$$

Обобщенная сериальная формула Бальмера-Ридберга

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R_\lambda \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (3.8)$$

$$v = Z^2 R_\nu \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right),$$

где $R_\lambda = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$, $R_\nu = R_\lambda c = 3,288 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ - постоянные Ридберга, n_i – номер энергетического уровня, с которого электрон переходит в спектре испускания, n_f - номер энергетического уровня, на который электрон переходит в спектре испускания ($n_f < n_i$).

В атоме водорода переход на энергетический уровень $n = 1$ – соответствует серии Лаймана, $n = 2$ - серии Бальмера, $n = 3$ - серии Пашена, $n = 4$ - серии Бреккета (рис. 3.1).

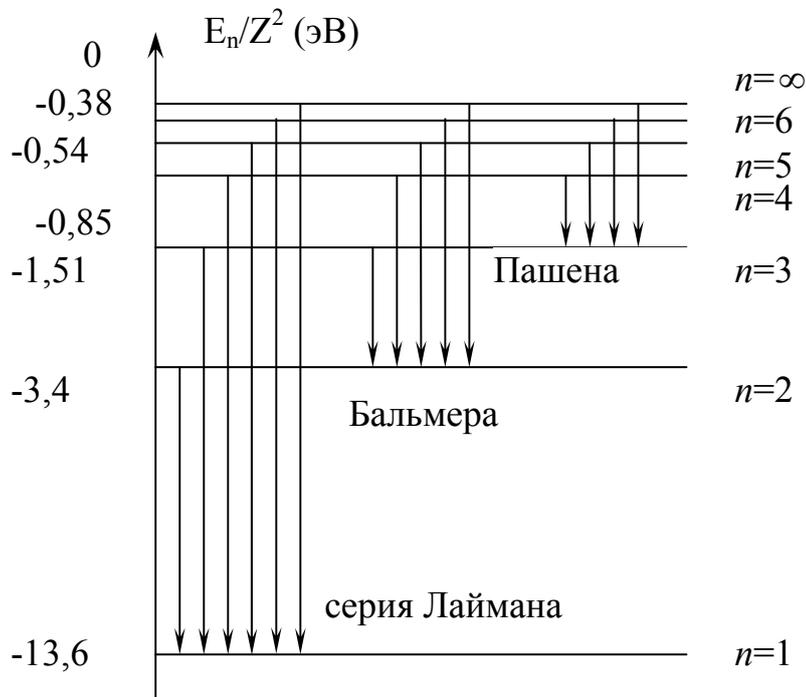


Рис. 3.1.

Энергия ионизации – это та энергия, которую необходимо сообщить электрону, находящемуся в основном состоянии (в состоянии с наименьшей энергией), чтобы он перешел на бесконечно

удаленный уровень, т.е. атом превратился в ион. Для атома водорода энергия ионизации равна $E_{\text{ион}} = E_{\infty} - E_1 = 0 - (-13,6) = 13,6 \text{ эВ}$.

Атом водорода и водородоподобные ионы в сферических координатах. Квантовые числа

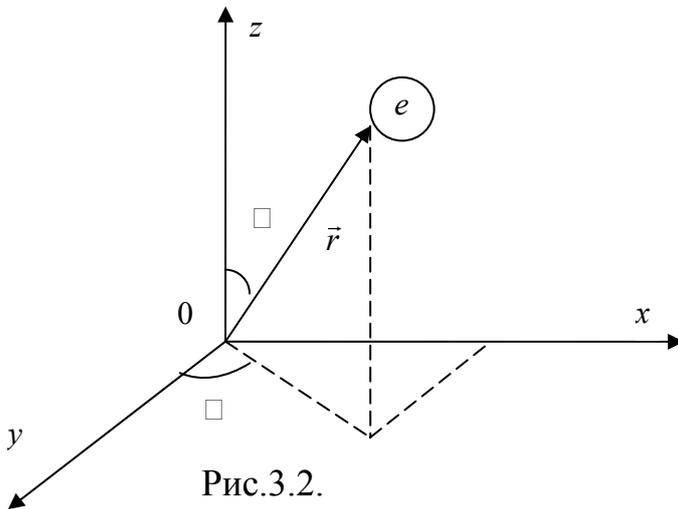


Рис.3.2.

В декартовых координатах неудобно описывать движение электронов в атоме водорода и водородоподобных ионов (He^+ , Li^{++}). Его потенциальная энергия $E_n = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ зависит только от расстояния электрона до ядра. Поле является центрально-симметричным.

Поэтому для описания движения электрона можно выбрать сферическую систему координат с центром, расположенным в ядре (рис.3.2).

Здесь

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \sin \varphi; \quad y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z &= r \cos \theta; \quad \Psi(x, y, z) = \Psi(r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний в сферических координатах

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] + \\ + \frac{2m}{\hbar} (E - U) \Psi = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\Psi = \Psi(r, \theta, \varphi)$ - волновая функция, E - полная энергия частицы, U - потенциальная энергия частицы (являющаяся функцией координат).

Символическая запись Ψ -функции, описывающей состояние электрона и атома водорода

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) \quad (3.11)$$

где n, l, m - квантовые числа: главное, орбитальное, магнитное.

Будем искать волновую функцию $\Psi = \Psi(r)$ в виде произведения функций $R(r)$ только от радиуса и $F(\theta, \varphi)$ только от угловых координат θ, φ .

$$\Psi(r) = R(r)F(\theta, \varphi) \quad (3.12)$$

Подставляем это произведение в (3.10) и умножая все члены на r^2/R .

Можем переписать уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) r^2 = \\ = - \frac{1}{F \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{F \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = \lambda, \end{aligned} \quad (3.13)$$

Первая часть есть функция только от r , а вторая – только от θ, φ , поэтому равенство их при всех значениях r, θ, φ , и возможно лишь в том случае, если каждая из частей равенства есть постоянная величина, обозначенная здесь λ . Таким образом, уравнение Шредингера распалось на 2 уравнения, которые можно записать в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left\{ \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{\lambda}{r^2} \right\} R = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \lambda F = 0. \quad (3.15)$$

Так как решение трехмерного уравнения Шредингера зависит от трех чисел n, l, m , то волновая функция $\Psi = \Psi(r, \theta, \varphi)$ может быть представлена в виде произведения 3-х функций от каждой из сферических координат

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r) \Theta_{l,m}(\theta) \Phi_m(\varphi) \quad (3.16)$$

Здесь $\Theta_{l,m}(\theta) \Phi_m(\varphi) = F(\theta, \varphi)$.

Подставляя в 3.15 функцию $F(\theta, \varphi)$ в виде произведения $\Theta_{l,m}(\theta) \Phi_m(\varphi)$ и умножая все члены на $\frac{\sin^2 \theta}{\Theta \Phi}$, можно переписать это уравнение в виде

$$\frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2. \quad (3.17)$$

Здесь опять левая часть равенства есть функция только от θ , а правая – лишь от φ , следовательно, они могут быть равны друг другу при всех значениях θ и φ , если каждая из них есть постоянная, обозначенная здесь как m^2 . Уравнение 3.17 переходит поэтому в 2 уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi. \quad (3.19)$$

Решение последнего из уравнений

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}. \quad (3.20)$$

Функция $\Phi(\varphi)$ для ее однозначности должна быть периодической с периодом 2π , так как физически φ есть один и тот же угол, что и $\varphi + 2\pi$. Такая периодичность будет иметь место, если параметр m равен любому целому числу, положительному или отрицательному, включая нуль:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (3.21)$$

Решение уравнения (3.16) можно получить в виде

$$F_{l,m}(\theta, \varphi) = P_l^m(\theta) e^{im\varphi}. \quad (3.22)$$

$P_l^m(\theta)$ представляют из себя шаровые функции. Некоторые (для $l \leq 2$) показаны в таблице

l	m	$F_{l,m}(\theta, \varphi)$
0	0	const
1	0	$c \cos \theta$
1	1	$c \sin \theta e^{\pm i\varphi}$
2	0	$c(3 \cos^2 \theta - 1)$
2	1	$c \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}$
2	2	$c \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$

Перейдем к решению уравнения (3.14) для радиальной части волновой функции $\Psi = \Psi(r)$, обозначенной $R(r)$. Постоянная разделения λ в этом уравнении равна $l(l+1)$. Поэтому

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left\{ \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} R = 0 \quad (3.23)$$

Выполнив дифференцирование в первом члене и вводя обозначения

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2} E = A, \quad \frac{\pi m Z e^2}{\epsilon_0 h^2} = B, \quad (3.24)$$

можем переписать

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[A + \frac{2B}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0, \quad (3.25)$$

Рассмотрим случай электрона, связанного с ядром, когда полная энергия отрицательна, т.е. $E < 0$, при этом $A < 0$.

Подставляя сюда значения A и B убедимся, что это требование равносильно следующему

$$E = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2} \frac{1}{(l+1)^2} = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{h^2} \frac{1}{n^2}, \quad (3.26)$$

В последнем выражении n обозначает целое число, равное $l+1$, при этом $n \geq 1$, n - главное квантовое число.

Таким образом, в области $E < 0$ спектр собственных значений энергии дискретный, и эти дискретные собственные значения энергии E_n совпадают с дискретными значениями энергии по Бору.

Этим собственным значениям энергии соответствуют собственные значения Ψ -функции, определенные целочисленными параметрами n, l, m

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = R_{n,l}(r) \Theta_{l,m}(\theta) \Phi_m(\varphi) = A e^{-\frac{r}{r_0}} e^{im\varphi} \cdot \sum_{i=0}^{n-l-1} a_i \left(\frac{2r}{r_0}\right)^{l+i} \sin^{|m|} \theta \sum_{i=0}^{l-|m|} b_i \cos^i \theta \quad (3.27)$$

Целочисленные параметры n, l, m характеризуют состояние электрона в атоме и являются квантовыми числами.

Радиальная часть решения

$$R_{n,l}(r) = A e^{-\frac{r}{r_0}} \cdot \sum_{i=0}^{n-l-1} a_i \left(\frac{2r}{r_0}\right)^{l+i} \quad (3.28)$$

характеризует распределение плотности вероятности электронного облака по радиусу, т.е. распределение плотности вероятности нахождения электрона. Квантовое число n определяет энергию электрона в атоме и может принимать значения $1, 2, 3, \dots, \infty$. Переход электрона в состояние с $n = \infty$ соответствует ионизации атома, электрон в этом случае становится свободным, энергия электрона в этом случае положительна и может принимать любые значения.

Момент импульса электрона, находящегося в состоянии, определяемом квантовыми числами n, l

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (3.29)$$

где l - орбитальное квантовое число, которое может принимать значения $0, 1, 2 \dots n-1$ (всего n значений).

Проекция вектора L на направление магнитного поля

$$L_z = m\hbar, \quad (3.30)$$

где m - магнитное квантовое число. Число m может принимать значения $0, \pm 1, \pm 2 \dots \pm l$ (всего $2l+1$ значений). Соотношение (3.30) отражает принцип пространственного квантования.

Состояние электрона в атоме определяется введенными квантовыми числами n, l, m . Если $n=1$, то орбитальное квантовое число $l=0$, а магнитное квантовое число $m=0$. Если $n=2$, то орбитальное квантовое число может иметь 2 значения $l=0, l=1$. При этом магнитное квантовое число m может принимать такие значения: если $l=0$, то $m=0$, а если $l=1$, то m может принимать 3 значения - $m=0, \pm 1$.

Таким образом, каждому значению энергии E_n (кроме E_1) соответствует несколько волновых функций $\Psi_{n,l,m}$, отличающихся значениями квантовых чисел n, l, m . Например E_2 , соответствует четыре волновые функции $\Psi_{2,0,0}, \Psi_{2,1,0}, \Psi_{2,1,-1}, \Psi_{2,1,1}$. Это означает, что электрон в атоме водорода может иметь одно и то же значение энергии, находясь в различных состояниях.

Состояния с одинаковой энергией называют вырожденными, а число различных состояний с одинаковым значением энергии называется кратностью вырождения. Каждому уровню с главным квантовым числом n соответствует n состояний, отличающихся квантовыми числами $l=0, 1, 2 \dots n-1$. Такое вырождение имеется только в кулоновском поле $\phi = ke/r$. В свою очередь, каждое состояние с определенным l вырождено $2l+1$ раз по значению m , поэтому общая кратность вырождения стационарного состояния (стационарного уровня) с квантовым числом n будет $\sum_{l=1}^{n-1} (2l+1) = n^2$.

Так, состояние, относящиеся к различным значениям $l=0, 1, 2 \dots$ принято обозначать соответственно буквами $s, p, d, f \dots$ латинского алфавита. Например, состояние с нулевым орбитальным моментом ($l=0$) называют s -состоянием, состояние с $l=1$ p -состоянием, и т.д.. При $n=1$ имеется одно состояние $1s$ ($l=0, m=0$), при $n=2$ l принимает 2 значения, ($l=0, l=1$) поэтому имеется 2 состояния $2s$ и $2p$ и т.д.

Рассмотрим спектр функций распределения электрона в водородоподобных атомных системах для различных значений орбитального квантового числа l и для значений главного квантового числа

В s -состоянии ($l=0, m=0$) волновая функция сферически симметрична, не зависит от углов θ, ϕ . При $l > 0$, т.е. для p -

состояний, d -состояний и т.д. электронное облако уже не будет сферически симметрично, т.к. $\Psi(r)$ будет зависеть от угла θ .

Вероятность того, что электрон находится в области объемом dV в окрестности точки с координатами r, θ, φ

$$dW = |\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)|^2 dV, \quad (3.31)$$

где

$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr. \quad (3.32)$$

Нормированные собственные функции $\Psi(r)$, отвечающие $1s$ -состоянию и $2s$ -состоянию

$$\Psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}, \quad \Psi_{2,0,0}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a^3}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{2a}}, \quad (3.33)$$

где в качестве единицы длины принят борковский радиус

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar}{e^2 m} = 52,9 \text{ пм. Или}$$

$$\Psi_{1,0,0}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\rho}, \quad \Psi_{2,0,0}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (2 - \rho) e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad (3.34)$$

где $\rho = r/a$ - безразмерная единица длины.

Вероятность dW найти электрон в атоме водорода находящимся в s -состоянии в интервале $(r, r + dr)$ одинаков по всем направлениям ми определяется формулой

$$dW = |\Psi_{n,0,0}(r)|^2 4\pi r^2 dr \quad (3.35)$$

Орбитальный магнитный момент электрона

$$\mu_l = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad \text{где } l = 0, 1, 2 \dots (n-1), \quad (3.36)$$

а $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}$ - магнетон Бора.

Многоэлектронные атомы. Спин электрона. Принцип Паули

Релятивистская квантовая теория постулирует, что кроме момента импульса, связанного с движением электрона вокруг ядра, электрон имеет собственный момент импульса, называемый спином.

Спин и спиновый магнитный момент электрона

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad \mu_s = 2\mu_B \sqrt{s(s+1)},$$

где s - спиновое квантовое число. Для электрона, протона и нейтрона $s = 1/2$, μ_B - магнетон Бора.

Квантовое число m_s определяет проекцию спина на направление магнитного поля (ось Z)

$$|L_s|_Z = \hbar m_s, \quad (3.37)$$

где $m_s = \pm s = \pm 1/2$.

Таким образом, состояние любого электрона в атоме определяется набором 4-х квантовых чисел: $n; l; m; m_s$.

В невозбужденном атоме электроны занимают состояния с возможно низкими значениями энергии. При распределении электронов по состояниям соблюдается принцип Паули, согласно которому в каждом состоянии может находиться не более одного электрона. Другими словами, в атоме не может быть двух электронов с одинаковыми наборами чисел $n; l; m; m_s$.

При заданных значениях n, l существует $2(2l+1)$ различных состояний, при определенном $n - 2n^2$ различных состояний. Все состояния с определенным значением n образуют оболочку. Оболочки принято обозначать заглавными латинскими буквами:

n	1	2	3	4	...
Оболочка	K	L	M	N	...

K-оболочка содержат только s -состояния ($l = 0$), L-оболочка имеет s -($l = 0$) и p -($l = 1$) подоболочки и т.д. В соответствии с принципом Паули s -подоболочка может содержать не более 2 электронов, p -подоболочка – не более 6, K-оболочка может вместить не более 2 электронов, L-оболочка – не более 8 и т.д..

Значение орбитального квантового числа l	0	1	2	3	4	5
Спектроскопический символ	s	p	d	f	g	h

Электронная конфигурация записывается следующим образом: число, стоящее слева перед спектроскопическим символом, означает главное квантовое число n , а сам спектроскопический символ отвечает тому или иному значению орбитального квантового числа l (например, обозначению $2p$ отвечает электрон с $n = 2$ и $l = 1$; $2p^2$ означает, что таких электронов в атоме 2, и т.д.).

В следующей таблице приведено распределение электронов по состояниям для ряда элементов периодической системы. В последней графе записана электронная конфигурация основного состояния.

Элемент	К	L		Электронная конфигурация
	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>p</i>	
H	1	-	-	1 <i>s</i>
He	2	-	-	1 <i>s</i> ²
Li	2	1	-	1 <i>s</i> ² 2 <i>s</i>

Полный момент импульса электрона

$$L_j = \hbar \sqrt{j(j+1)}, \quad (3.38)$$

где j – внутреннее квантовое число ($j = l + 1/2, l - 1/2$).

Момент импульса атома складывается из моментов всех электронов электронной оболочки. Для большинства атомов из таблицы Менделеева характерна схема сложения моментов, называемая L–S-связью. Орбитальные моменты отдельных электронов складываются в результирующий орбитальный момент атома \vec{L}_L , спиновые моменты электронов – в спиновый момент атома \vec{L}_S . Затем результирующие моменты и складываются в полный момент атома \vec{L}_J .

Полный орбитальный момент атома

$$L_L = \hbar \sqrt{L(L+1)}, \quad (3.39)$$

где L – полное орбитальное квантовое число.

Полный спиновый момент атома

$$L_S = \hbar \sqrt{S(S+1)}, \quad (3.40)$$

где S – полное спиновое квантовое число.

Полный момент импульса атома

$$L_J = \hbar \sqrt{J(J+1)}, \quad (3.41)$$

где J – полное внутреннее квантовое число атома.

Символическое обозначение состояния атома $^{2S+1}L_J$. Эту запись называют спектральным термом, где $2S+1$ – мультиплетность. Вместо полного орбитального квантового числа L пишут символ в соответствии с таблицей:

Значение	0	1	2	3	4	5
Символ	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>

Пример. Терм $^2P_{3/2}$ расшифровывается следующим образом: мультиплетность $2S+1=2$, следовательно $S=1/2$, символу P соответствует $L = 1$, а $J=3/2$.

Магнитный момент атома

$$\mu_J = g\mu_B \sqrt{J(J+1)},$$

где g – множитель (или фактор) Ланде,

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

Проекция магнитного момента атома на направления внешнего магнитного поля (совпадающего с осью Z)

$$\mu_{J,Z} = g\mu_B m_J,$$

где m_J - полное магнитное квантовое число ($m_J = J, J-1, \dots, -J$).

Правило отбора для квантовых чисел S, L, J, m_S, m_L, m_J

$$\Delta S = 0; \Delta m_S = 0;$$

$$\Delta L = \pm 1; \Delta m_L = 0, \pm 1;$$

$$\Delta J = \pm 1; \Delta m_J = 0, \pm 1;$$

Не осуществляются переходы $J = 0 \rightarrow J = 0$, а при $J = 0$ - переходы $m_J = 0 \rightarrow m_J = 0$.

Излучение атома происходит при переходе из верхнего стационарного уровня в нижнее. При этом испускается квант с энергией $h\nu_{n_2 n_1} = E_{n_2} - E_{n_1}$.

При записи соответствующих переходов, а также при построении схемы переходов следует учитывать правила отбора квантовых чисел, согласно которым $\Delta L = \pm 1; \Delta m_L = 0, \pm 1$. На примере атома водорода:

Серия Лаймана возникает при переходе электрона с более высоких энергетических уровней $n_2 = 2, 3, \dots$ на первый энергетический уровень $n_1 = 1$ ($1s$ -состояние). (см. рис. 3.1.)

Серия Бальмера возникает при переходе электрона в состоянии $2s, 2p$ ($n_1 = 2$) с более высоких энергетических уровней ($n_2 > 2$). На рис. 3.1 показаны переходы, соответствующие сериям Лаймана и Бальмера с учетом правил отбора ($\Delta L = \pm 1$).

Используя спектроскопические обозначения можно записать:

Серия Лаймана $np \rightarrow 1s$;

$$ns \rightarrow 2p$$

Серия Бальмера $nd \rightarrow 2p$;

$$np \rightarrow 2s$$

Сила, действующая на атом в неоднородном магнитном поле,

$$F_z = \frac{\partial B}{\partial z} \mu_{J,z} \quad (3.42)$$

где $-\frac{\partial B}{\partial z}$ - градиент магнитной индукции.

Решение квантовомеханической задачи о движущемся электроны в поле дает, что энергия состояния зависит от квантовых чисел n и l :

$$E = -\frac{Z_a^2 R \hbar c}{(n - \delta)^2}, \quad (3.43)$$

Где δ - поправка, зависящая от квантового числа l . Поправку δ называют квантовым дефектом или ридберговской поправкой.

Величина δ для данного элемента убывает с увеличением l .

Исходя из (3.43) можно получить выражение для длин волн спектральных линий, излучаемых при переходе валентного электрона

$$\frac{1}{\lambda} = Z_a^2 R \left(\frac{1}{(n_f - \delta_f)^2} - \frac{1}{(n_i - \delta_i)^2} \right), \quad (3.44)$$

Где индекс « f » относится к нижнему, а индекс « i » - к верхнему уровням перехода, n_i - номер энергетического уровня, с которого электрон переходит в спектре испускания, n_f - номер энергетического уровня, на который электрон переходит в спектре испускания.

Характеристическое рентгеновское излучение

Если один из электронов внутренней оболочки атома удален каким-либо внешним воздействием, например, ударом внешнего быстрого электрона, то на освободившееся место могут переходить электроны из других оболочек. При этом испускается излучение, лежащее в рентгеновском диапазоне.

Любой электрон внутренней оболочки находится в поле ядра с зарядом Ze и тех электронов, которые ближе к ядру. (Влиянием более удаленных от ядра электронов можно пренебречь, поскольку распределение отрицательного заряда близко к сферически симметричному). Энергию электрона в таком поле можно записать в виде

$$E = -\frac{R \hbar c (Z - \sigma)^2}{n^2}, \quad (3.45)$$

где поправка σ учитывает экранирующее действие внутренних электронов. Поскольку строение внутренних оболочек у всех атомов одинаковое, поправка σ практически не зависит от Z . Для электрона в К-оболочке $\sigma \approx 1$, в L-оболочке $\sigma \approx 7,5$.

При переходе электрона из одной внутренней оболочки на другую испускается излучение с частотой и длиной волны (закон Мозли)

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{(Z - \sigma_f)^2}{n_f^2} - \frac{(Z - \sigma_i)^2}{n_i^2} \right) = R \left(\frac{(Z - \sigma)^2}{n_f^2} - \frac{(Z - \sigma)^2}{n_i^2} \right), \quad (3.46)$$

где индекс « f » относится к конечному, а индекс « i » - к начальному состоянию электрона, обычно в задачах принимают $\sigma_i = \sigma_f = \sigma$.

При переходе на К-оболочку излучаются К-линии ($K_\alpha, K_\beta, K_\gamma \dots$), при переходе на L-оболочку излучаются L-линии ($L_\alpha, L_\beta, L_\gamma \dots$).

3.2. Примеры решения задач

Задача 3.1. Вычислить радиус первой орбиты атома водорода (боровский радиус) и скорость электрона на этой орбите.

Решение. Радиус орбиты

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2 n^2}{\pi m Z |e|^2}; \quad Z=1; \quad n=1; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 4\pi^2 \hbar^2}{\pi m |e|^2} = \frac{\varepsilon_0 4\pi \hbar^2}{m e^2};$$

$$r_1 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 0,529 \text{ \AA}.$$

Скорость электрона на 1-ой орбите

$$v = \frac{\hbar}{mr} = 2,18 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Задача 3.2. Определить потенциал ионизации и первый потенциал возбуждения атома водорода.

Решение. Потенциал ионизации – эта та ускоряющая разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы приобрести энергию, достаточную для ионизации атома водорода. Ионизация соответствует переходу электрона в атоме водорода из основного состояния, то есть состояния с минимальной энергией ($n = 1$) в состояние с $n = \infty$ ($E = 0$).

$$U_{\text{ион}} = \frac{E_{\text{ион}}}{e} = \frac{13,6 \text{ эВ}}{e} = 13,6 \text{ В}.$$

Первый потенциал возбуждения - эта та ускоряющая разность потенциалов, которую должен пройти электрон, чтобы приобрести энергию, достаточную для перевода атома водорода из основного ($n = 1$) в первое возбужденное ($n = 2$) состояние. Используя формулу Бальмера-Ридберга, получим:

$$\frac{1}{\lambda_{1,2}} = R_\lambda \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), n_f = 2, n_i = 1.$$

Энергия кванта

$$E_{\text{возб}} = h\nu_{1,2} = \frac{hc}{\lambda_{1,2}} = hcR_\lambda \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} hcR_\lambda = \frac{3}{4} 13,6 \text{ эВ} = 10,2 \text{ эВ}.$$

Задача 3.3. Найти длинноволновую и коротковолновую границы серий Бальмера и Пашена для атома водорода и однократно ионизированного гелия.

Решение. Для атома водорода длинноволновая граница серии Бальмера соответствует переходу с минимальной энергией кванта в данной серии, т.е. $n_i = 3, n_f = 2$.

$$\lambda_{\text{дв}} = 1 / \left[R_\lambda \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \right] = 6,56 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Для атома водорода коротковолновая граница серии Бальмера соответствует переходу с максимальной энергией кванта в данной серии, т.е. $n_i = \infty, n_f = 2$.

$$\lambda_{\text{кв}} = 1 / \left[R_\lambda \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) \right] = 3,65 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Для атома водорода длинноволновая граница серии Пашена соответствует переходу с минимальной энергией кванта в данной серии, т.е. $n_i = 4, n_f = 3$.

$$\lambda_{\text{дв}} = 1 / \left[R_\lambda \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) \right] = 18,75 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Для атома водорода коротковолновая граница серии Пашена соответствует переходу с максимальной энергией кванта в данной серии, т.е. $n_i = \infty, n_f = 3$.

$$\lambda_{\text{кв}} = 1 / \left[R_\lambda \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) \right] = 8,2 \cdot 10^{-7} \text{ м (инфракрасная область)}.$$

Аналогично для иона гелия ($Z = 2$) соответствующие длины волн в 4 раза меньше.

Серия Бальмера

$$\lambda_{\text{дв}} = \frac{6,56 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{4} = 1,64 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \quad \lambda_{\text{кв}} = \frac{3,65 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{4} = 0,91 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Серия Пашена

$$\lambda_{\text{дв}} = \frac{18,75 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{4} = 4,69 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \quad \lambda_{\text{кв}} = \frac{8,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}}{4} = 2,05 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Задача 3.4. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от газоразрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки $d = 5$ мкм. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом $\varphi = 41^\circ$.

Решение. Определим длину волны наблюдаемой линии. Из условия максимума при дифракции на решетке следует

$$d \sin \varphi = k\lambda, \text{ где } k = 5; \sin 41^\circ = 0,6561, \text{ откуда } \lambda = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Полученная длина волны лежит в видимой области спектра, следовательно относится к серии Бальмера, которая излучается при переходах на уровень $n = 2$. Запишем формулу Бальмера-Ридберга для этой серии

$$\frac{1}{\lambda} = R_\lambda \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

Откуда получим

$$\frac{1}{n_i^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda R_\lambda}, \quad n_i = \sqrt{\frac{4\lambda R_\lambda}{\lambda R_\lambda - 4}} = 3.$$

Наблюдаемая линия излучается при переходе с уровня $n_i = 3$ на уровень $n_f = 2$.

Задача 3.5. С какой минимальной кинетической энергией должен двигаться атом водорода, чтобы при неупругом лобовом соударении с другим, покоящимся атомом водорода, один из них оказался способным испустить фотон? Предполагается, что до соударения оба атома находились в основном состоянии.

Решение. Из закона сохранения энергии $T_0 = T_1 + T_2 + E_B$, где T_0 - начальная кинетическая энергия движущегося атома; T_1 и T_2 - кинетические энергии атомов после столкновения; E_B - энергия возбуждения одного из атомов.

Поскольку в условии задачи речь идет о минимальном значении T_0 , то E_B также минимальна; т.е. переход происходит на уровень $n = 2$. Найдем, что $E_B = E_2 - E_1 = Rhc(1 - 1/4) = Rhc \cdot 3/4$; $E_B = 10,2$ эВ. Из минимальности T_0 следует также, что соударение абсолютно неупругое, так как в этом случае наибольшая доля кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию, а значит, скорости атомов после соударения равны и $T_1 = T_2 = T$. Из закона сохранения импульса $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, где \vec{p}_0 - начальный импульс движущегося атома, а \vec{p}_1 и \vec{p}_2 - импульсы атомов после соударения. Как следует из вышесказанного,

$p_1 = p_2 = p$, так что $\begin{cases} T_0 = 2T + E_B \\ p_0 = 2p \end{cases}$, откуда, используя связь импульса и

кинетической энергии $p = \sqrt{2mT}$, получаем $T = \frac{T_0}{4}$ и

$$T_0 = 2E_B = Rhc \frac{3}{2}; T_0 = 20,4 \text{ эВ.}$$

Задача 3.6. Проанализировать физический смысл решения уравнения Шредингера для атома водорода в основном состоянии. Охарактеризовать картину распределения электронного облака в атоме водорода для основного состояния.

Решение. Состояние электрона в атоме водорода с квантовыми числами $n = 1$, $l = 0$ и $m = 0$ называется основным состоянием и символически обозначается как $1s$ -состояние. Уравнение Шредингера для основного состояния водородоподобного атома имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E_1 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0.$$

Решением этого уравнения в основном состоянии является волновая функция электрона, которая зависит только от r

$$\psi_{100}(r, \theta, \varphi) = \psi(r) = Ae^{-\frac{r}{r_0}}.$$

Это означает, что s -состояние электрона в атоме сферически симметрично, угловая часть решения $Y(\theta, \varphi) = 1/4\pi$ не зависит от углов, следовательно, распределение электронного облака в пространстве сферически симметрично.

Найдем первую и вторую производные ψ -функции по r

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{1}{r_0} Ae^{-\frac{r}{r_0}}, \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{1}{r_0^2} Ae^{-\frac{r}{r_0}}.$$

Подставив их в уравнение Шредингера, получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{2}{rr_0} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = E_1.$$

Это уравнение удовлетворяется для любых значений r при выполнении двух условий:

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2}, \quad \frac{\hbar^2 2}{2mrr_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Из второго условия следует $r_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}$, что совпадает с радиусом первой боровской орбиты для водорода. Подставив его в выражение для E_1 , находим

$$E_1 = -\frac{me^4}{32\pi^2\hbar^2\epsilon_0^2}.$$

Это выражение соответствует энергии для основного состояния атома водорода в теории Бора.

Задача 3.7. Определить кратность вырождения уровня атома водорода с квантовым числом n , для которого энергия связи электрона равна 1,51 эВ.

Решение. Определим главное квантовое число указанного уровня.

Энергия связи уровня $E = \frac{Rhc}{n^2}$ (Дж) или $E = \frac{Rhc}{n^2 e}$ (эВ). Отсюда $n^2 = 9$, $n = 3$. Уровню с данной энергией соответствует ряд различных состояний, отличающихся квантовыми числами l , m , m_s . Число таких состояний и есть кратность вырождения. При заданном n квантовое число l принимает n различных значений ($l = 0, 1, \dots, (n-1)$). Каждому значению l соответствует $2l + 1$ различных значений числа m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$). Следовательно, разных наборов чисел l и m при данном n будет

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2 = 9.$$

Состояниям с заданными n, l, m соответствуют два разных состояния, отличающиеся числами m_s $\left(m_s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\right)$.

Следовательно искомая кратность вырождения $N = 2n^2$; $N = 18$.

Задача 3.8. Определить энергию электрона атома водорода в состоянии, для которого волновая функция имеет вид $\psi(r) = A(1 + ar)e^{-\alpha r}$, где A , a и α – некоторые постоянные.

Решение. Волновая функция, представляющая состояние с некоторой энергией, является решением уравнения Шредингера. Подставим волновую функцию в уравнение Шредингера. Поскольку заданная волновая функция не зависит от углов, в уравнении останутся только производные по r . Получим уравнение:

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E\psi.$$

Подставив сюда заданную волновую функцию и произведя дифференцирование, придем к уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(-4a\alpha + \alpha^2 + ar\alpha^2 + \frac{2a}{r} - \frac{2\alpha}{r} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0} = E(1+ar), \quad \text{или,}$$

сгруппировав члены по степеням r , получим

$$\left[\frac{\hbar^2(\alpha^2 - 4a\alpha)}{2m} + \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0} + E \right] + r \left(Ea + \frac{\hbar^2 a \alpha^2}{2m} \right) + \frac{1}{r} \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} + \frac{\hbar^2(a - \alpha)}{m} \right] = 0.$$

Поскольку при подстановке решения в уравнение должно получаться тождество, соотношение должно обращаться в нуль при любом r . Это возможно, только если коэффициенты при всех степенях r равны нулю:

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m}(-4a\alpha + \alpha^2) + \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0} + E = 0, \\ Ea + \frac{\hbar^2 a \alpha^2}{2m} = 0, \\ \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} + \frac{\hbar^2}{m}(a - \alpha) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $E = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}$; подставив это выражение в первое уравнение, получим $\alpha = \frac{me^2}{8\pi\epsilon_0 \hbar^2}$.

Окончательно для энергии, получим

$$E = -\frac{me^4}{128\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -\frac{me^4}{32h^2\epsilon_0^2} = -\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{4}.$$

Сравнивая полученное соотношение с выражением для энергии E_n , заметим, что найденное значение энергии соответствует уровню $n = 2$.

Задача 3.9. Показать, что наиболее вероятное расстояние электрона от ядра в основном состоянии атома водорода равно радиусу первой боровской орбиты, если известно, что собственная функция

имеет вид $\psi_{100}(r, \theta, \varphi) = \psi(r) = Ae^{-\frac{r}{r_0}}$. Радиус первой боровской орбиты $r_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}$.

Решение. Вероятность того, что электрон в основном состоянии атома водорода находится от ядра в интервале расстояний от r до $r+dr$ определяется выражением

$$dW = |\psi|^2 dV = A^2 e^{-2r/r_0} \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Чтобы определить наиболее вероятное расстояние r_{\max} электрона от ядра, исследуем функцию плотности вероятности $w = \frac{dW}{dr} = A^2 e^{-2r/r_0} \cdot 4\pi r^2$ на экстремум. Необходимое условие

экстремума $\frac{dw}{dr} = 0$.

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{2}{r_0} A^2 e^{-2r/r_0} \cdot 4\pi r^2 + A^2 e^{-2r/r_0} \cdot 8\pi r = 0.$$

Откуда плотность вероятности

$$r_{\max} = r_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}.$$

Задача 3.10. Известно, что собственная функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид $\psi_{100}(r, \theta, \varphi) = \psi(r) = Ae^{-\frac{r}{r_0}}$, где A – некоторая постоянная, r_0 – радиус первой боровской орбиты. Найти: 1) постоянную A , 2) среднее значение радиуса атома в основном состоянии.

Решение. Для нахождения постоянной A запишем условия нормировки указанной ψ -функции

$$\int_0^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1.$$

Элемент объема шарового слоя $dV = 4\pi r^2 dr$ и выражение волновой функции из условий задачи подставим в условие нормировки

$$\int_0^{+\infty} A^2 e^{-2r/r_0} 4\pi r^2 dr = 1.$$

Перепишем это выражение в виде

$$r_0^3 4\pi A^2 \int_0^{+\infty} e^{-2r/r_0} \frac{r^2}{r_0^2} \frac{dr}{r_0} = 1.$$

Проведя замену переменной $x = r/r_0$, возьмем интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-2x} x^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 de^{-2x} = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2x} 2x dx = \\ &= -\frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = -\frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Подставив полученное значение интеграла в условия нормировки, найдем постоянную $A = 1/\sqrt{\pi r_0^3}$, следовательно, волновая

функция имеет вид $\psi_1(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}}$.

Среднее значение радиуса атома

$$\langle r \rangle = \frac{\int_0^{+\infty} r |\psi|^2 4\pi r^2 dr}{\int_0^{+\infty} |\psi|^2 4\pi r^2 dr} = \frac{\int_0^{+\infty} |\psi|^2 4\pi r^3 dr}{r_0^3 \int_0^{+\infty} r^3 e^{-2r/r_0} dr}.$$

Введем переменную $y = 2r/r_0$, возьмем интеграл и получим среднее значение радиуса атома

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \frac{4}{r_0^3} \int_0^{+\infty} \frac{y^3 e^{-y} dy}{16} = \frac{r_0}{4} \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y} dy = -\frac{r_0}{4} \int_0^{+\infty} y^3 de^{-y} = \\ &= \frac{r_0}{4} \int_0^{+\infty} e^{-y} 3y^2 dy = -\frac{3r_0}{4} \int_0^{+\infty} y^2 de^{-y} = \frac{6r_0}{4} \int_0^{+\infty} e^{-y} y dy = \frac{3r_0}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{3r_0}{2}. \end{aligned}$$

Задача 3.11. Доказать, что каждый энергетический уровень nl атома водорода вырожден. Найти кратность вырождения для $n = 1, 2, 3$.

Решение. Состояние электрона в атоме полностью определяется набором четырех квантовых чисел: n - главное, l - орбитальное, m - магнитное, m_s - спиновое. Полная энергия в атоме водорода

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2 \hbar^2 \epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2} \text{ эВ}.$$

Поскольку собственные значения энергии электрона зависят только от главного квантового числа n , то состояния электрона вырождены. Кратность вырождения, то есть количество возможных состояний с заданной полной энергией E равна $2n^2$. Найдем

количество возможных состояний для различных значений главного квантового числа.

$n = 1$, основное состояние, $E_1 = -13,6$ эВ. Соответствующие этому состоянию квантовые числа: $n = 1, l = 0, m = 0, m_s = \pm 1/2$. Возможно всего два состояния $2n^2 = 2$. В условных обозначениях основное состояние записывается $1s$. Первый энергетический уровень состоит из одного подуровня.

$n = 2$, первое возбужденное состояние, $E_2 = -13,6/4$ эВ. В этом состоянии квантовые числа: $n = 2, l = 0, 1, m = 0, \pm 1, m_s = \pm 1/2$.

$n = 2$	$l = 0$	$m = 0$	$m_s = \pm 1/2$	2 состояния $2s$
$n = 2$	$l = 1$	$m = 0$	$m_s = \pm 1/2$	
$n = 2$	$l = 1$	$m = +1$	$m_s = \pm 1/2$	} 6 состояний $2p$
$n = 2$	$l = 1$	$m = -1$	$m_s = \pm 1/2$	

Всего для $n = 2$ возможно 8 состояний электронов. Второй энергетический уровень в атоме водорода состоит из двух подуровней $2s$ и $2p$.

$n = 3$, возбужденное состояние, $E_3 = -13,6/9$ эВ. Соответствующие квантовые числа и возможные состояния:

$n = 3$	$l = 0$	$m = 0$	$m_s = \pm 1/2$	} 2 состояния $3s$
$n = 3$	$l = 1$	$m = 0$	$m_s = \pm 1/2$	
$n = 3$	$l = 1$	$m = +1$	$m_s = \pm 1/2$	} 6 состояний $3p$
$n = 3$	$l = 1$	$m = -1$	$m_s = \pm 1/2$	
$n = 3$	$l = 2$	$m = 0$	$m_s = \pm 1/2$	} 10 состояний $3d$
$Dn = 3$	$l = 2$	$m = -1$	$m_s = \pm 1/2$	
$n = 3$	$l = 2$	$m = -2$	$m_s = \pm 1/2$	
$n = 3$	$l = 2$	$m = +1$	$m_s = \pm 1/2$	
$n = 3$	$l = 2$	$m = +2$	$m_s = \pm 1/2$	

Всего для $n = 3$ возможно 18 состояний электронов. Третий энергетический уровень в атоме водорода состоит из трех подуровней $3s, 3p, 3d$.

Задача 3.12. Определить энергию, орбитальный, спиновый механические моменты импульса и магнитный момент электрона в

атоме, находящемся в состоянии $4p$. Найти кратность вырождения и число возможных состояний электрона для значения $n = 4$.

Решение. Состояние $4p$ характеризуется следующими квантовыми числами: главное $n = 4$, орбитальное $l = 1$, магнитное $m = 0, \pm 1$, спиновое $m_s = \pm \frac{1}{2} \left(s = \frac{1}{2} \right)$. Собственные значения электрона определяются главным квантовым числом n

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} = -\frac{13,6}{4^2} = -0,85 \text{ эВ.}$$

Орбитальный момент импульса определяется квантовым числом l и рассчитывается по формуле

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)} = \hbar \sqrt{1(1+1)} = 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 1,4 = 1,48 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с.}$$

Спиновый момент импульса определяется квантовым числом s и рассчитывается по формуле

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)} = \hbar \sqrt{1/2(1/2+1)} = 8,9 \cdot 10^{-35} \text{ Дж} \cdot \text{с.}$$

Проекция спинового момента импульса на ось Z определяется квантовым числом m_s и рассчитывается по формуле

$$L_z = \hbar m_s = 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 1/2 = 0,5025 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с.}$$

Орбитальный магнитный момент определяется из выражения

$$p_m = -\frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)} = -9,3 \cdot 10^{-24} \cdot 1,4 = -1,3 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл.}$$

Подсчитаем число возможных состояний электрона состояния $4p$.

$n = 4$	$l = 1$	$m = 0$	$m_s = \pm 1/2$	два состояния
$n = 4$	$l = 1$	$m = +1$	$m_s = \pm 1/2$	два состояния
$n = 4$	$l = 1$	$m = -1$	$m_s = \pm 1/2$	два состояния

Кратность вырождения (степень вырождения) для $n = 4$ равна $2n^2 = 32$.

Задача 3.13. Написать электронную конфигурацию, соответствующую атомам гелия, лития, неона, натрия.

Решение. Распределение электронов по состояниям в атоме подчиняется принципу Паули. Исходя из этого принципа максимальное число электронов с данным значением главного числа n равно $2n^2$, а максимальное число электронов с данным значением орбитального квантового числа l равно $2(2l+1)$. Таким образом, в состоянии с $n = 1, l = 0$, то есть в $1s$ -состоянии может находиться 2 электрона, что обозначается $1s^2$.

Состояние с $n = 2$, $l = 0, 1$, то есть в состоянии $2s2p$ может находиться $2n^2 = 8$ электронов, из них 2 электрона в $2s$ -состоянии и 6 электронов в $2p$ -состоянии, что обозначается как $2s^22p^6$.

В состоянии с $n = 3$, $l = 0, 1, 2$, то есть в состоянии $3s3p3d$ может находиться $2n^2 = 18$ электронов, из них 2 электрона в $3s$ -состоянии и 6 электронов в $3p$ -состоянии и 10 электронов в $3d$ -состоянии, что обозначается как $3s^23p^63d^{10}$.

Итак, электронная конфигурация атома, у которого полностью заполнены 3 оболочки, имеет вид $1s^22s^22p^63s^23p^63d^{10}$.

Запишем электронные конфигурации в атомах:

гелий He $Z = 2$ - $1s^2$,
 литий Li $Z = 3$ - $1s^22s^1$,
 неон Ne $Z = 10$ - $1s^22s^22p^6$,
 натрий Na $Z = 11$ - $1s^22s^22p^63s^1$.

Задача 3.14. Записать спектральное обозначение терма для электронной конфигурации $1s^22p3d$ при максимально возможном полном механическом моменте.

Решение. $1s$ -электроны образуют полностью заполненную оболочку, все механические моменты которой равны нулю. Момент атома будет определяться $2p$ - и $3d$ -электронами ($l_1 = 1$, $l_2 = 2$). Результирующее L может принимать значения $L = 3, 2, 1$; $L_{max} = 3$. Результирующее S может принимать значения $S = 1, 0$; $S_{max} = 1$. При $L_{max} = 3$, $S_{max} = 1$ J может принимать значения $J = 4, 3, 2$; $J_{max} = 4$.

Следовательно, терм при максимально возможном значении полного механического момента запишется в виде 3F_4 .

Задача 3.15. Потенциал ионизации иона Mg II равен 15,03 В. Определить ридберговскую поправку для S -уровня иона Mg II.

Решение. Порядковый номер Mg $Z = 12$. Электронная конфигурация основного состояния магния $1s^22s^22p^63s^2$. Основной уровень - $3S$.

При однократной ионизации получаем ион Mg II (Mg^+) с одиннадцатью электронами.

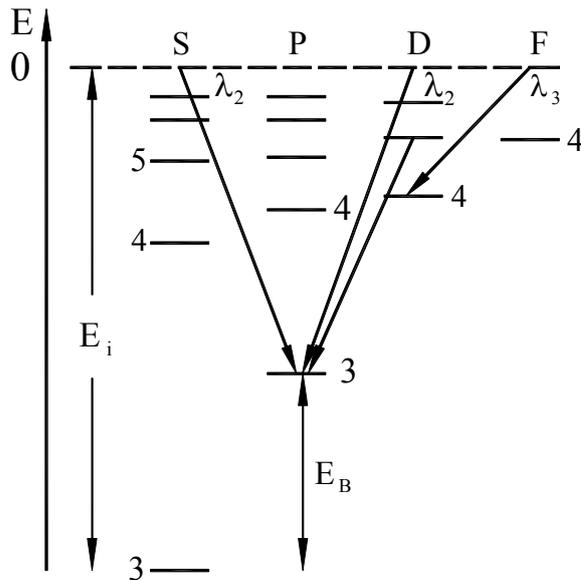


Рис. 3.3.

Заряд остова иона Mg II $Z_a = 2$, он имеет электронную конфигурацию $1s^2 2s^2 2p^6$. Диаграмма переходов Mg II показана на рис. 3.3.

Энергия уровня

$$E_n = -\frac{Z_a^2 R \hbar c}{(n - \delta)^2}$$

Энергия ионизации

$$E_i = \frac{R \hbar c \cdot 4}{(3 - \delta_s)^2} = 15,03 \text{ эВ.}$$

Откуда найдем

поправку S -уровней

$$\delta_s = 1,1.$$

Задача 3.16. Возможен ли терм 3D при электронной конфигурации $1s^2 2s^2 p^2$?

Решение. Терму 3D соответствуют $L = 2$; $S = 1$. Моменты атома создаются двумя эквивалентными p -электронами ($2p^2$). Остальные электроны находятся в заполненных подоболочках.

Возможные значения $l = 0, 1, 2$; возможные значения $s = 0, 1$. Так что, если не принимать во внимание принцип Паули, терм 3D возможен. Проверим, соответствует ли он принципу Паули.

При $l = 2$ квантовое число проекций орбитального момента атома m принимает значения $m = 2, 1, 0, -1, -2$. Чтобы получить $m = 2$ (или -2), оба p -электрона должны иметь одинаковые значения $m = 1$ (или -1). Аналогично, при $s = 1$ квантовое число проекции спинового момента принимает значения $s = 1, 0, -1$. Чтобы иметь $m_s = 1$ (или -1), оба электрона должны иметь одинаковые $m_s = \pm 1/2$.

Таким образом, для осуществления термина 3D оба электрона должны находиться в одном и том же состоянии ($n = 2$, $l = 1$, $m_l = 1$ (или -1) и $m_s = +1/2$ (или $-1/2$)), что противоречит принципу Паули. Следовательно, терм 3D невозможен.

Задача 3.17. Определить напряжение на рентгеновской трубке с никелевым антикатодом, если разность длин волн между K_α -линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра $\lambda_{\text{аб}} = 0,84 \text{ \AA}$.

Решение. При бомбардировке антикатаода ускоренными электронами в рентгеновской трубке возникает наряду с характеристическим сплошной рентгеновский спектр. Коротковолновая граница сплошного спектра определяется соотношением $eU = hc/\lambda_{\text{гд}}$, где U – напряжение на рентгеновской трубке. $\lambda_{\text{гп}}$ найдем из условия $\lambda_{K_{\alpha}} - \lambda_{\text{гп}} = 0,84 \text{ \AA}$.

$$\frac{1}{\lambda_{K_{\alpha}}} = R \left[(Z - \sigma_1)^2 - \frac{(Z - \sigma_2)^2}{4} \right].$$

Подставив $Z_{\text{Ni}} = 28$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 7,4$, получим $\lambda_{\text{гп}} = 1,47 - 0,84 = 0,63 \text{ \AA}$, $\lambda_{K_{\alpha}} = 1,47 \text{ \AA}$, $U = hc/\lambda_{\text{гп}}e = 19,7 \cdot 10^3 \text{ В}$.

3.3. Задачи для самостоятельного решения

3.18. Вычислить постоянную Ридберга, если известно, что для ионов He II разность длин волн между головными линиями серий Бальмера и Лаймана $\Delta\lambda = 133,7 \text{ нм}$.

3.19. Найти первый потенциал возбуждения: а) однократно ионизованного гелия; б) двукратно ионизованного лития.

3.20. Определить квантовое число n для возбужденного состояния атома водорода, если известно, что при последовательном переходе в основное состояние атом излучил два фотона с длинами волн $\lambda_1 = 0,6563 \text{ мкм}$ и $\lambda_2 = 0,1216 \text{ мкм}$.

3.21. Найти длины волн головной линии и границы ионизации серии Лаймана для атома водорода.

3.22. Вычислить потенциал ионизации иона лития Li^{++} .

3.23. Какие спектральные линии могут излучаться при столкновении электрона с энергией $E = 12,7 \text{ эВ}$ с покоившимся атомом водорода, находившимся в основном состоянии.

3.24. Найти длину волны фотона, соответствующую переходу электрона со второго квантового состояния в основное: а) в однократно ионизованном атоме гелия; б) в двукратно ионизованном атоме лития.

3.25. Атомарный водород, возбуждаемый некоторым монохроматическим источником света, испускает только три спектральные линии. Определить квантовое число энергетического уровня, на который возбуждаются атомы, а также длины волн испускаемых линий.

3.26. Какие спектральные линии появятся в спектре атома водорода при облучении его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 102,6 \text{ нм}$?

3.27. Вычислить потенциал ионизации однократно ионизированного гелия He^+ .

3.28. Сколько линий наблюдается в спектре поглощения атомарного водорода в диапазоне длин волн от 945 до 1100 Å?

3.29. Найти квантовое число, определяющее возбужденное состояние атома водорода, если известно, что при переходе в нормальное состояние он испустил всего один фотон с длиной волны 972,5 Å.

3.30. Возбужденный атом водорода при переходе в основное состояние испустил последовательно два кванта с длинами волн 12818 Å и 1025,7 Å. Вычислить энергию первоначального состояния данного атома и соответствующее ему квантовое число.

3.31. Определить длину волны и частоту, соответствующую 5-й спектральной линии серии Бальмера атомарного водорода.

3.32. Длина волны головной линии серии Лаймана в спектре атомарного водорода соответственно равна $\lambda_1 = 1215$ Å. Известны, кроме того, значения скорости света и постоянной Планка. Вычислить на основании этих данных энергию ионизации атома водорода.

3.33. Каким сериям принадлежат следующие спектральные линии атомарного водорода: 3970 Å, 6563 Å и 9015 Å? Каким переходам они отвечают?

3.34. Разница в длинах волн между головными линиями серии Лаймана и Бальмера в спектре атомарного водорода составляет $\Delta\lambda = 5347$ Å. Вычислить значение постоянной Планка, считая массу электрона, его заряд и скорость света известными.

3.35. При наблюдении полученного с помощью дифракционной решетки с периодом $d = 2$ мкм спектра атомарного водорода обнаружено, что одна из спектральных линий серии Бальмера во втором порядке ($k = 2$) соответствует углу дифракции $\varphi = 29^\circ 05'$. Определить квантовое число энергетического уровня атома, переходу с которого отвечает данная линия.

3.36. Квант света с энергией 15 эВ выбивает фотоэлектрон из атома водорода, находящегося в основном состоянии. С какой скоростью движется электрон вдали от ядра?

3.37. Вычислить изменение длины волны фотона, которое возникает вследствие отдачи атома водорода при излучении. Какую скорость приобретает атом водорода при переходе электрона со второго в первое состояние?

3.38. Определить кинетическую энергию электрона, выбитого при ионизации атома водорода, находившегося в основном состоянии, фотоном головной линии серии Лаймана, однократно ионизированного гелия.

3.39. Электрон с энергией $E = 12,8$ эВ при соударении с атомом водорода, находившемся в основном состоянии, переводит его в возбужденное состояние. Найти длины волн, которые будут излучаться при переходе в основное состояние.

3.40. Покоившийся атом водорода испустил фотон, соответствующий головной линии серии Бальмера. Чему равна скорость атома после излучения фотона?

3.41. Покоившийся атом водорода поглотил квант света с длиной волны $\lambda = 80$ нм. С какой скоростью будет двигаться вырванный из атома электрон вдали от ядра?

3.42. Покоившийся атом водорода поглотил фотон, в результате чего электрон, находившийся на второй боровской орбите, вылетел из атома со скоростью $v = 6 \cdot 10^5$ м/с. Найти частоту поглощенного фотона.

3.43. Определить изменение орбитального момента количества движения электрона в атоме водорода при испускании им фотона с длиной волны 12818 \AA . Известно, что данная линия принадлежит серии Пашена ($n = 3$).

3.44. Электрон в атоме находится в f – состоянии. Найти орбитальный момент импульса L электрона и максимальное значение проекции момента импульса L_{Zmax} на направление внешнего магнитного поля.

3.45. Вычислить полную энергию электрона E , орбитальный момент импульса L и его проекцию на ось z . Электрон находится в $2p$ – состоянии в атоме водорода.

3.46. Атом водорода перешел из возбужденного состояния в основное, испустив квант света. Найти возможные значения полного момента импульса электрона в исходном состоянии.

3.47. Электрон в атоме находится в состоянии с $n = 4$, причем момент импульса электрона имеет наибольшее из возможных значений. Определить наименьший угол, который может составить момент импульса с осью Z .

3.48. Атом водорода, находясь в основном состоянии, поглотил квант света с энергией $E = 10,2$ эВ. Записать электронную конфигурацию атома в конечном состоянии.

3.49. Атом водорода перешел в основное состояние, испустив квант света с длиной волны $\lambda = 97,2$ нм. Определить: а) кратность вырождения исходного энергетического уровня; б) возможные значения момента импульса электрона в исходном состоянии.

3.50. Вычислить орбитальный момент импульса (L) электрона, находящегося в атоме в s - состоянии.

3.51. Вычислить орбитальный момент импульса (L) электрона, находящегося в атоме в p -состоянии.

3.52. Определить возможные значения проекции момента импульса орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля. Электрон находится в d -состоянии.

3.53. Атом водорода, находившийся первоначально в основном состоянии поглотил квант света с энергией $E = 10,2$ эВ. Определить изменение орбитального момента импульса электрона.

3.54. Момент импульса орбитального движения электрона в атоме водорода $L = 1,83 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Найти магнитный момент p_m , обусловленный орбитальным движением электрона.

3.55. Вычислить полную энергию E электрона, находящегося в $2p$ -состоянии в атоме водорода.

3.56. Вычислить орбитальный момент импульса (L) электрона, находящегося в $2p$ -состоянии в атоме водорода.

3.57. Вычислить магнитный момент p_m электрона, находящегося в $2p$ -состоянии в атоме водорода.

3.58. Атом водорода находится в основном состоянии. Собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид $\psi(r) = Ce^{-r/a}$, где C – некоторая постоянная. Найти из условия нормировки постоянную C .

3.59. Собственная функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид $\psi(r) = Ce^{-r/a}$, где $a = \hbar^2 4\pi\epsilon_0 / me^2$ – радиус первой боровской орбиты. Определить расстояние, на котором вероятность нахождения электрона максимальна.

3.60. Собственная функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид $\psi(r) = Ce^{-r/a}$, где $a = \hbar^2 4\pi\epsilon_0 / me^2$ – радиус первой боровской орбиты. Определить отношение вероятностей W_1/W_2 пребывания электрона в сферических слоях $\Delta r = 0,01a$ толщиной и радиусами $r_1 = 0,5a$ и $r_2 = 1,5a$.

3.61. Собственная функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где $a = \hbar^2 4\pi\epsilon_0 / me^2$ – радиус первой боровской орбиты. Вычислить: 1) вероятность W_1 того, что электрон находится внутри области, ограниченной сферой радиуса a ; 2) вероятность W_2 того, что электрон находится вне этой области; 3) отношение вероятностей W_2/W_1 .

3.62. Собственная функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где $a = \hbar^2 4\pi\epsilon_0 / me^2$ - радиус первой боровской орбиты. Найти среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра.

3.63. Электрон в возбужденном атоме водорода находится в $3p$ -состоянии. Определить изменение магнитного момента Δp_m , обусловленного орбитальным движением электрона при переходе в основное состояние.

3.64. Атом водорода находится в $1s$ -состоянии. Собственная функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид $\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где $a = \hbar^2 4\pi\epsilon_0 / me^2$ - радиус первой боровской орбиты. Определить вероятность W нахождения электрона в атоме внутри сферы радиуса $r = 0,1a$ Замечание: при интегрировании можно использовать разложение в ряд Маклорена $e^{-2R} = 1 - 2R + (2R)^2 / 2! - \dots$, где $R = r/a$.

3.65. Указать число электронов в M -оболочке многоэлектронного атома, которые имеют одинаковые квантовые числа: а) $m_s = +1/2$; б) $m = -2$; в) $m_s = -1/2$ и $m = 0$; г) $m_s = 1/2$ и $l = 2$.

3.66. Найти число электронов в атоме, у которого заполнены K и L оболочки, $3s$ -оболочка и наполовину $3p$ -оболочка. Написать электронную конфигурацию атома.

3.67. Найти число электронов в атоме, у которого заполнены K, L, M -оболочки, $4s, 4p$ и $4d$ -подоболочки.

3.68. Сколько электронов в атоме натрия имеют одинаковые квантовые числа а) $m = 0$; б) $l = 1, m_s = +1/2$. Атом находится в основном состоянии.

3.69. Дать символические обозначения возможных состояний атома водорода, если главное квантовое число электрона $n = 3$.

3.70. Какое максимальное число s, p и d -электронов может находиться в K, L, M -оболочках атома?

3.71. Определить возможные значения квантового числа j электронной системы, для которой: 1) $S = 2, L = 1$; 2) $S = 1, L = 3$. Найти возможные значения полного момента импульса L_j .

3.72. Заполненный электронный слой атома характеризуется квантовым числом $n = 3$. Указать число электронов в этом слое, который имеют одинаковые следующие квантовые числа: 1) $m_s = +1/2$, 2) $m = -2$, 3) $m_s = -1/2$ и $m = 0$, 4) $m_s = +1/2$ и $l = 2$.

3.73. Написать электронную конфигурацию атомов: 1) бора, 2) углерода, 3) натрия.

3.74. Определить возможные значения квантового числа j , соответствующие полному моменту импульса электронной системы, у которой $L = 3$, а 1) $S = 3/2$, 2) $S = 2$, 3) $S = 5/2$, 4) $S = 4$.

3.75. Записать основные термы для следующих атомов: 1) водород, 2) гелий, 3) бериллий, 4) литий, 5) бор.

3.76. Перечислить возможные термы для следующих состояний атомов: 1) 2S , 2) 2P , 3) 4P , 4) 3D .

3.77. Определить кратности вырождения следующих термов: 1) ${}^2D_{3/2}$, 2) 3F_2 , 3) 1F .

3.78. Определить возможные мультиплетности ($2S + 1$) термов следующих атомов: 1) литий, 2) бериллий, 3) бор, 4) углерод, 5) азот.

3.79. Выписать спектральные обозначения состояний, у которых мультиплетность одинакова и равна пяти, а кратность вырождения равна семи.

3.80. Выписать спектральные обозначения состояний для трехэлектронной системы, состоящей из s , p и d электронов.

3.81. Атом находится в состоянии 4F , имея максимально полный механический момент. Определить кратность вырождения этого состояния по J .

3.82. Определить разность энергий связи электрона в K - и L -оболочках в атоме ванадия. Поправки для K - и L -оболочек принять равными 1 и 7,4 соответственно.

3.83. С каких элементов периодической системы следует ожидать появления K - и L -серий характеристического рентгеновского спектра?

3.84. Используя закон Мозли, вычислить длины волн и энергии фотонов, соответствующих K_α -линиям алюминия и кобальта.

3.85. Вычислить минимальное напряжение на рентгеновской трубке с антикатодом из вольфрама ${}_{74}W$, при котором появится K -серия.

3.86. При облучении криптона рентгеновским излучением с длиной волны $\lambda = 0,65 \text{ \AA}$ вырывается электрон из K -оболочки. Определить кинетическую энергию вырванного электрона.

4. Основы физики твердого тела

4.1. Основные понятия и законы

К твердым телам относятся те, которые длительное время сохраняют свою форму. Они подразделяются на кристаллические и аморфные. Для идеальных кристаллических тел характерны ближний и дальний порядок, т.е. повторяющееся упорядоченное расположение элементов в трехмерном пространстве. Кристаллообразующие элементы (частицы – атомы, ионы, молекулы), чередуются в определенном порядке вдоль прямых линий, образуя в плоском сечении кристалла систему одинаковых элементарных ячеек (квадратов, прямоугольников, параллелограммов, шестиугольников).

Объем $V_{я}$ элементарной ячейки в кристалле

$$\begin{aligned} V_{к} &= a^3 \text{ (кубическая решетка)} \\ V_{г} &= \sqrt{2}a^3 \text{ (гексагональная решетка)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь a – параметр решетки, например, для Na $a = 4,28 \text{ \AA}$.

Расстояние d между соседними атомами в кубической решетке:

а) гранецентрированной $d = a/\sqrt{2}$;

б) объемно центрированной $d = \sqrt{3}a/2$

Например, для Na $d = 3,7 \text{ \AA}$. Самая симметричная – это кубическая ячейка.

Основные типы кристаллических твердых тел:

а) ионные кристаллы (NaCl, CaCO₃ и др. соли). В узлах решетки чередуются положительные и отрицательные ионы, между которыми гетерополярная связь;

б) валентные (атомные) кристаллы (C, Ge, Te...). В узлах нейтральные атомы, между которыми гомеополярная связь, полупроводники;

в) молекулярные кристаллы (Ar, CH₂...). В узлах находятся молекулы, связь между которыми осуществляется ван-дер-ваальсовыми силами;

г) металлы (Na, Cu, Al...). В узлах находятся положительные ионы без внешних (валентных) электронов, образующих электронный газ.

О микроструктуре кристаллов можно судить по материалам рентгенографического анализа. Длина рентгеновских волн и межатомные расстояния в пространственных решетках кристаллов

имеют совпадающий порядок (10^{-10} м). По отношению к рентгеновским лучам кристалл представляет собой трехмерную дифракционную решетку (плоский срез, последовательные атомные плоскости – рис. 4.1), где θ - угол скольжения, d - расстояние между атомными плоскостями.

Условие максимума в отраженных рентгеновских лучах

$$2d \sin \theta = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

Это условие Вульфа-Брегга (Бреггов).

На примере «металлического» кристалла скорость валентных электронов электронного газа $v \sim 10^5$ м/с.

Время пребывания электрона вблизи узла решетки

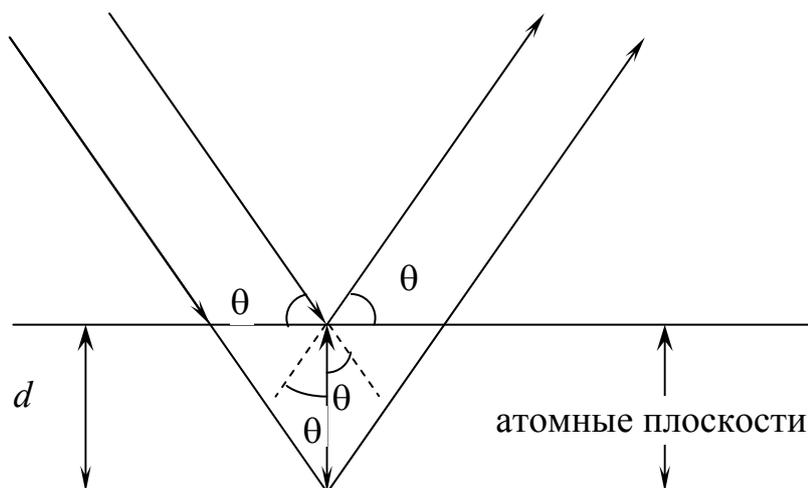


Рис. 4.1.

$$\tau \sim \frac{d}{v} \sim \frac{10^{-10}}{10^5} = 10^{-15} \text{ с}$$

Воспользуемся соотношением неопределенностей

$$\Delta E \tau \sim \hbar$$

$$\Delta E \sim \frac{\hbar}{\tau} = \frac{10^{-34}}{10^{-15}} = 10^{-19} \text{ Дж} \sim 0,7 \text{ эВ} \quad (4.3)$$

Эта неопределенность энергии - ширина энергетической зоны.

Число дискретных уровней зоны

$$Z = kN \quad (4.4)$$

где N - число ионов (атомов) в кристалле, k - кратность вырождения соответствующего энергетического уровня (максимальное число электронов, находящихся на нем с соблюдением принципа Паули).

Элементы квантовой статистики

К свободным электронам в кристаллах (металлах) применяется статистический метод исследования как к большому числу частиц, подчиняющихся законам квантовой механики. Квантовая статистика строится на принципе неразличимости тождественных частиц (например, электронов в металлах).

Концентрация электронов, энергия которых заключена в интервале значений от E до $E + dE$

$$dn(E) = g(E) \cdot f(E, T) dE. \quad (4.5)$$

Полное число электронов в единице объема в интервале энергий от 0 до E равно

$$n = \int_0^E g(E) \cdot f(E, T) dE, \quad (4.6)$$

$g(E)$ - плотность электронных состояний в единице объема, определяет число квантовых состояний в единичном интервале энергий

$$g(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E}, \quad (4.7)$$

m и E – масса и энергия свободных электронов.

Электроны относятся к фермионам (частицам с полуцелым спином) и подчиняются принципу Паули. Системы электронов описываются квантовой статистикой Ферми-Дирака:

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}, \quad (4.8)$$

$f(E, T)$ - функция распределения Ферми-Дирака, определяющая вероятность заполнения электронами состояния с энергией E ,

k – постоянная Больцмана, E_F – энергия Ферми.

Энергия Ферми в металле при $T = 0$

$$E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}, \quad (4.9)$$

n - концентрация свободных электронов. Для некоторых металлов $E_F(0)_{Ag} = 5,5$ эв, $E_F(0)_{Li} = 4,7$ эв.

Если $T = 0$ и $E > E_F$, то $f(E, T) = 0$, уровни энергии, лежащие выше E_F , свободны; если $E < E_F$, то $f(E, T) = 1$ (уровни энергии, лежащие ниже уровня Ферми, полностью заняты электронами).

При $T > 0$ уровни энергии, лежащие выше E_F , заполняются электронами, а уровни, лежащие ниже E_F , обедняются. (Рис.4.2)

Это происходит в области энергий $\pm kT$ вблизи уровня Ферми (k – константа Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К).

Электронный газ, подчиняющийся квантовой статистике Ферми-Дирака, является вырожденным, энергия электронов не зависит от температуры. Температура вырождения электронного газа

$$T_F = E_F / k,$$

где k – постоянная Больцмана.

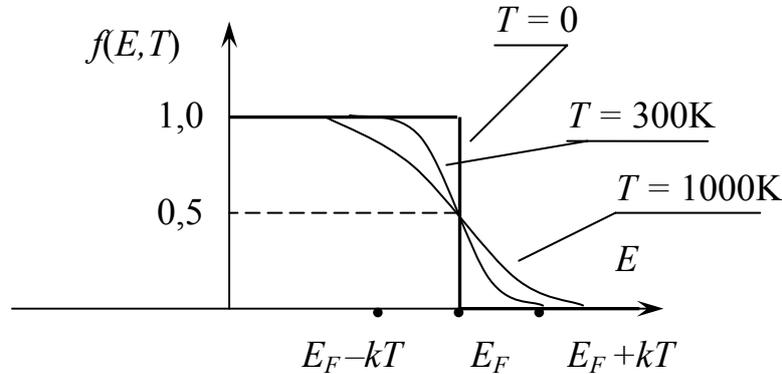


Рис.4.2

Если энергия электронов значительно превышает энергию Ферми $E - E_F \gg kT$, то распределение Ферми-Дирака переходит в классическое распределение Максвелла-Больцмана

$$f(E, T) = const \cdot e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (4.10)$$

Такой электронный газ невырожден.

Средняя энергия электронов в зоне при любой температуре T

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot g(E) f(E, T) \cdot dE}{n} \quad (4.11)$$

При $T = 0$ и $E < E_F$ $f(E, T) = 1$ формула (4.11) упрощается:

$$\langle E(0) \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E \cdot g(E) dE}{\int_0^{E_F} g(E) dE} \quad (4.12)$$

При $T = 0$ и $E > E_F$ $f(E, T) = 0$;

Средние значения скорости электронов при любой температуре T рассчитываются по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{\infty} v \cdot g(v) f(E, T) \cdot dv}{\int_0^{\infty} g(v) f(E, T) \cdot dv}, \quad (4.13)$$

где $g(v)$ - плотность электронных состояний в единичном интервале скоростей, $g(v)dv = (m^3 v^2 / \pi^2 \hbar^3) dv$.

Среднее значение скорости при $T = 0$

$$\langle v(0) \rangle = \int_0^{v_{\max}} v \cdot g(v) dv \Big/ \int_0^{v_{\max}} g(v) dv, \quad (4.14)$$

где v_{\max} - определяется энергией Ферми

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = E_F(0). \quad (4.15)$$

Электрические свойства твердых тел

Удельная проводимость (электропроводность) собственных полупроводников

$$\sigma_{n,p} = e \cdot n_{n,p} (\mu_n + \mu_p), \quad (4.16)$$

где e – заряд электрона, $n_{n,p}$ - концентрация носителей зарядов (электронов и дырок), μ_n, μ_p - подвижности электронов и дырок. Подвижность – это отношение скорости дрейфа к напряженности поля: $\mu = v/E$, $\sigma = 1/\rho$, ρ - удельное сопротивление, σ - удельная проводимость.

С ростом температуры удельное сопротивление ρ для металлов растет по линейному закону

$$\rho = \rho_0 \alpha T, \quad (4.17)$$

где ρ_0 - удельное сопротивление при $T = 300$ К, α - температурный коэффициент сопротивления

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}. \quad (4.18)$$

Для полупроводников и диэлектриков с увеличением температуры удельное сопротивление ρ уменьшается, а удельная проводимость σ растет

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\Delta E_3}{2kT}}, \quad (4.19)$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E_3}{2kT}}, \quad (4.20)$$

где ΔE_3 – ширина запрещенной зоны.

Зависимости концентрации электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне от температуры для полупроводников и диэлектриков

$$n(T) = \frac{1}{4} \left(\frac{2mk}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{\Delta E_3}{2kT}}, \quad (4.21)$$

где m – масса носителей заряда.

Концентрация носителей заряда в зависимости от температуры полупроводника

$$n_{np} = n_0 e^{-\frac{\Delta E_3}{2kT}}, \quad (4.22)$$

где n_0 - концентрация электронов в валентной зоне.

В эффекте Холла n_0 - концентрация электронов в валентной зоне, разность потенциалов U_X

$$U_X = R_X \cdot j \cdot B \cdot d, \quad (4.23)$$

где R_X - постоянная Холла, j - плотность тока, B - индукция магнитного поля, d - высота образца.

Постоянная Холла для металлического проводника

$$R_X = \frac{1}{e \cdot n}. \quad (4.24)$$

Постоянная Холла для полупроводникового образца с зарядами одного знака q :

$$R_X = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{q \cdot n}. \quad (4.25)$$

Тепловые свойства твердых тел. Фононы

Количество теплоты, необходимое для нагревания тела от температуры T_1 до температуры T_2

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} mc(T)dT, \quad (4.26)$$

где m - масса тела, $c(T)$ - удельная теплоемкость, которая связана с молярной теплоемкостью $C_m(T)$ соотношением $c(T) = \frac{C_m(T)}{M}$, здесь M - молярная масса.

Молярная теплоемкость твердого тела

$$C_m = \frac{dU_m}{dT}, \quad (4.27)$$

где U_m - внутренняя энергия моля твердого тела. Согласно классической теории $U_m = 3RT$ ($R = 8,31$ Дж/моль·К).

Закон Дюлонга и Пти: в случае высоких температур все твердые тела имеют одинаковую молярную теплоемкость

$$C_m = 3R \quad (4.28)$$

При низких температурах теплоемкость зависит от температуры. Температура, при которой спектр колебаний атомов становится практически непрерывным, то есть становится существенным квантование энергии колебаний, называется характеристической температурой Дебая θ . Она определяется из условия

$$\theta = \frac{\hbar\omega_{\max}}{k} \quad (4.29)$$

где ω_{\max} – максимальная частота колебаний атомов в узлах кристаллической решетки.

Некоторые значения температуры Дебая.

Таблица 4.1

Вещество	θ К	Вещество	θ К
Свинец	88	Медь	315
Натрий	150	Никель	370
Золото	170	Алюминий	390
Серебро	215	Железо	420
Вольфрам	310	Бериллий	1160

С учетом реального спектра колебаний атомов решетки молярная теплоемкость кристалла по Дебаю

$$C_m = 3R \left[12 \left(\frac{T}{\theta} \right)^3 \cdot \int_0^{\theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3(\theta/T)}{e^{\theta/T} - 1} \right]. \quad (4.30)$$

Здесь $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$.

В области низких температур ($T \ll \theta$) эта формула принимает вид

$$C_m = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\theta} \right)^3. \quad (4.31)$$

R – универсальная газовая постоянная. Это соотношение называется законом Дебая. Теплоемкость вещества пропорциональна кубу температуры. Закон Дебая для диэлектриков и полупроводников выполняется вплоть до абсолютного нуля температур.

Электронная теплоемкость одновалентных металлов вблизи абсолютного нуля линейно зависит от T :

$$C_{me} = \frac{\pi^2 R k T}{2 E_F}. \quad (4.32)$$

k – постоянная Больцмана. Молярная теплоемкость электронного газа для металлов с валентностью Z находится по формуле

$$C_{meZ} = \frac{\pi^2 R Z}{2} \frac{k T}{E_F}. \quad (4.33)$$

Теплопроводность твердых тел. Фононы.

Энергия тепловых волн в твердом теле квантована. Квант тепловой энергии называется фононом. Фонон может существовать только в кристалле и поэтому он является квазичастицей.

Энергия фонона

$$E = h\nu = \hbar\omega; \quad (4.34)$$

импульс фонона

$$p = 2\pi \frac{\hbar}{\lambda}. \quad (4.35)$$

Фононы относятся к бозонам (спин $s = 0$). Их распределение по энергиям описывается функцией Бозе - Эйнштейна

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} - 1}$$

Длина волны фонона $\lambda = \nu T$, где ν – скорость тепловой волны, совпадающая со скоростью звука $\nu_{ЗВ}$; T - период. Скорость фонона является групповой скоростью звуковых волн в кристалле.

Звуковые волны распространяются в кристалле в виде продольных ν_{\parallel} и поперечных ν_{\perp} волн, скорости которых определяются по формулам

$$\nu_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \nu_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (4.36)$$

где E и G – модули продольной и поперечной упругости (модуль Юнга и модуль сдвига), ρ - плотность материала твердого тела.

Максимальная частота колебаний атомов может быть выражена через продольную и поперечную скорость

$$\omega_{max} = \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 n}{\nu_{\parallel}^{-3} + 2\nu_{\perp}^{-3}}}, \quad (4.37)$$

где n – число атомов в единице объема.

Если $\nu_{\parallel} = \nu_{\perp}$, то $\omega_{max} = \nu \sqrt[3]{6\pi^2 n}$.

Для оценки минимальной длины волны в кристалле используется выражение

$$\lambda_{min} = \frac{2\pi\nu}{\omega_{max}} = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{6\pi^2 n}} \approx \frac{2}{\sqrt[3]{n}}.$$

Так как величина $1/\sqrt[3]{n}$ соответствует минимальному расстоянию между атомами в узлах кристаллической решетки d , то

$$\lambda_{min} = 2d. \quad (4.38)$$

4.2. Примеры решения задач

Задача 4.1. K_α линия ванадия отражается в первом порядке от системы плоскостей (100) монокристалла NaCl под углом скольжения $\theta = 26,5^\circ$. Найти постоянную решетки a данного кристалла.

Решение. Кубический кристалл NaCl изображен на рис.4.3. Постоянная решетки $a = 2d$. Условие максимума в соответствии с (4.2):

$$2d \sin \theta = k\lambda.$$

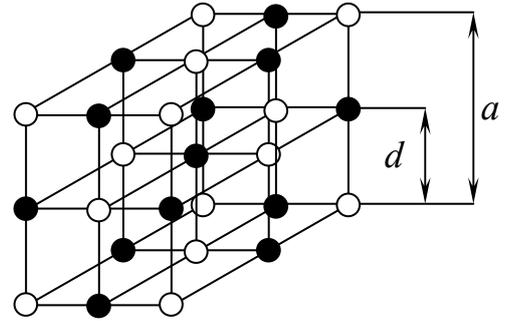
По условию задачи $k = 1$:

$$2d \sin \theta = \lambda.$$

Длина волны λ (K_α линия ванадия)

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = R_\lambda (Z - 1)^2 \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right] = \frac{3}{4} R_\lambda (Z - 1)^2.$$

Рис. 4.3



R_λ – постоянная Ридберга

$$2d \sin \theta = \frac{3}{4} R_\lambda (Z - 1)^2$$

$Z = 23$ (порядковый номер ванадия)

Постоянная решетки

$$a = 2d = \frac{3R_\lambda (Z - 1)^2}{4d \sin \theta} = 5,63 \text{ \AA}$$

Задача 4.2. Получить выражение для граничной (максимальной) энергии E_{\max} свободных электронов в металле, при температуре $T = 0^\circ\text{K}$, если известна их концентрация n и выражение для их максимальной скорости.

Вычислить E_{\max} для серебра, полагая, что на каждый атом серебра приходится по одному свободному электрону.

Решение. Граничная энергия электрона в металле при $T = 0^\circ\text{K}$ – это энергия Ферми (4.9):

$$E_{\max} = E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

Максимальная скорость нерелятивистских электронов из выражения для кинетической энергии:

$$T_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

Отсюда:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}} = \frac{\hbar}{m} (3\pi^2 n)^{1/3}.$$

По условию задачи на каждый атом серебра приходится по одному свободному электрону. Следовательно:

$$E_{\max Ag} = E_{F Ag}(0) = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3}.$$

Здесь m_e - масса электрона, n_e - концентрация свободных электронов

$n_e = n_a$ (концентрация атомов)

$$n_a = \frac{\nu N_A}{V} = \frac{MN_A}{\mu V} = \rho \frac{N_A}{\mu}.$$

Для серебра

$$\rho = 10,5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \mu = 107,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$n_a = n_e = \frac{10,5 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{107,9 \cdot 10^{-3}} = 5,86 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Тогда

$$E_{\max Ag} \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2 (3 \cdot 3,14^2 \cdot 5,86 \cdot 10^{28})^{2/3}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 8,7 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 5,46 \text{ эВ}.$$

Задача 4.3. Подучить с помощью распределения Ферми-Дирака вероятность заселения электронами энергетических уровней

а) больших

б) меньших уровня Ферми на $\Delta E = E - E_F = \pm 2kT$.

Решение. Указанная функция распределения (4.8) имеет вид:

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1};$$

а) $\Delta E = E - E_F = 2kT$, тогда

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{2kT}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^2 + 1} = \frac{1}{7,39 + 1} = \frac{1}{8,39} = 0,12$$

б) $\Delta E = E - E_F = -2kT$, тогда

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{-2kT}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{-2} + 1} = \frac{1}{1,135} = 0,88.$$

Задача 4.4. Найти с помощью распределения Ферми при $T = 0^\circ\text{K}$:

а) среднюю кинетическую энергию свободного электрона в металле, если известна его энергия Ферми $E_F(0)$;

б) суммарную кинетическую энергию в 1 см^3 золота, полагая, что на каждый атом золота приходится по одному свободному электрону.

Решение. Средняя энергия электрона ($E_{max} = E_F(0)$) в соответствии с (4.12):

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E g(E) dE}{\int_0^{E_F} g(E) dE}$$

Плотность электронных состояний в единице объема (4.7)

$$g(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{E}$$

Тогда:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{E} dE}{\int_0^{E_F} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{E} dE} = \frac{\int_0^{E_F} E^{3/2} \cdot \sqrt{E} dE}{\int_0^{E_F} E^{1/2} \cdot \sqrt{E} dE} = \frac{\frac{2}{5} E_F^{5/2}}{\frac{2}{3} E_F^{3/2}} = \frac{3}{5} E_F(0);$$

Суммарная кинетическая энергия всех электронов в 1 см^3 золота $E_\Sigma = N_e \langle E \rangle$; $N_e = n_e V$ ($V = 1 \text{ см}^3$; n_e – концентрация электронов).

По условию $n_e = n_a$; $n_a = \frac{\rho_{\text{Au}} N_A}{\mu_{\text{Au}}}$; $\rho_{\text{Au}} = 19,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$;

$$\mu_{\text{Au}} = 197 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$n_a = \frac{19,3 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{197 \cdot 10^{-3}} = 5,9 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Энергия Ферми для золота:

$$E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n_a)^{2/3} = \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} (3 \cdot 3,14 \cdot 5,9 \cdot 10^{28})^{2/3} = 8,78 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Суммарная энергия:

$$E_\Sigma = n_a V \frac{3}{5} E_F = 5,9 \cdot 10^{28} \cdot 10^{-6} \cdot 0,6 \cdot 8,78 \cdot 10^{-19} = 3,12 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Задача 4.5. Какая часть η свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле кинетическую энергию, превышающую половину максимальной энергии?

Решение. Искомую величину η можно определить как отношение концентраций электронов с соответствующими диапазонами энергий:

$$\eta = \frac{\Delta n}{n};$$

Концентрация электронов, энергии которых лежат в диапазоне от E до $E + dE$ (4.5)

$dn(E) = g(E)f(E)TdE$. Так как $E \leq E_F$, то $f(E, T) = 1$ ($T = 0$) и $dn(E) = g(E)dE$ В соответствии с (4.7):

$$g(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{E}$$

Максимальная энергия $E_{max} = E_F(0)$. Значения Δn :

$$\Delta n = \int_{E_F/2}^{E_F} dn = \int_{E_F/2}^{E_F} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_{E_F/2}^{E_F} E^{3/2} dE;$$

$$\text{Обозначим } \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} = A.$$

$$\text{Тогда } \Delta n = A \int_{E_F/2}^{E_F} E^{1/2} dE;$$

искмое отношение

$$\eta = \frac{\Delta n}{n} = \frac{\int_{E_F/2}^{E_F} E^{1/2} dE}{\int_0^{E_F} E^{1/2} dE} = 1 - \frac{1}{2^{3/2}} = 0,64.$$

Задача 4.6. Найти с помощью распределения Ферми для свободных электронов в металле при $T = 0$ К среднюю скорость этих электронов v , полагая известной максимальную скорость v_{max} .

Решение. Среднее значение скорости при $T = 0$ К (4.1)

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{v_{max}} v g(v) dv}{\int_0^{v_{max}} g(v) dv}.$$

Плотность состояний по скоростям $g(v)dv$ можно получить из плотности состояний по энергиям $g(E)dE$ (4.7):

$$g(E)dE = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{E} dE$$

Для нерелятивистских электронов

$$E = \frac{mv^2}{2}; \sqrt{E} = v\sqrt{\frac{m}{2}}; dE = \frac{m}{2} 2v dv = mv dv$$

$$g(v)dv = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot v \sqrt{\frac{m}{2}} mv dv = \frac{1}{\pi^2} \frac{m^3}{\hbar^3} \cdot v^2 dv$$

$$\langle v \rangle = \frac{\int_0^{v_{\max}} v \frac{m^3}{\pi^2 \hbar^3} v^2 dv}{\int_0^{v_{\max}} \frac{m^3}{\pi^2 \hbar^3} v^2 dv} = \frac{v_{\max}}{4} = \frac{3}{4} v_{\max}$$

Задача 4.7. Ширина запрещенной зоны чистого полупроводника равна $\Delta E = 1\text{эВ}$. Найти вероятность попадания электрона на уровни вблизи дна зоны проводимости при температурах $T_1 = 0\text{ К}$ и $T_2 = 290\text{ К}$. Будет ли увеличиваться эта вероятность, если на полупроводник действует электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda_1 = 1\text{ мкм}$, $\lambda_2 = 2\text{ мкм}$.

Решение. Для чистого полупроводника уровень Ферми лежит посередине запрещенной зоны (рис.4.4).

Функция распределения Ферми – Дирака определяет вероятность нахождения электрона в состоянии с энергией E

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$$

При $E > E_F$ и $T = 0$ $f(E, 0) = 0$.

При $T = 0$ электрон не может попасть на уровень вблизи дна зоны проводимости.

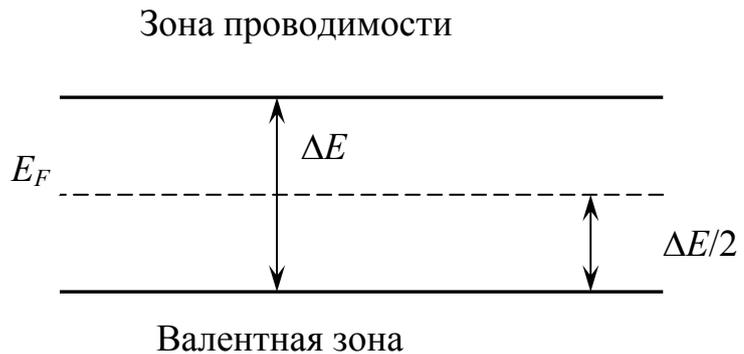


Рис 4.4

Расстояние между уровнем Ферми и дном зоны проводимости
 $E - E_F = \Delta E/2 = 0,5 \text{ эВ} = 0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

Тогда вероятность при $T = 290 \text{ К}$ будет

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{\Delta E/2}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{0,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290}} + 1} \approx 2 \cdot 10^{-9}$$

Энергии квантов действующего излучения:

$$\varepsilon_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\varepsilon_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-6} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,24 \text{ эВ}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc}{2\lambda_1} = \frac{\varepsilon_1}{2} = 0,62 \text{ эВ}$$

Так как $\varepsilon_1 > \Delta E$ (ширины запрещенной зоны), то вероятность заполнения указанного уровня увеличивается и при $T = 0 \text{ °К}$ и при $T = 290 \text{ °К}$. Так как $\varepsilon_2 < \Delta E$, то вероятность не изменится.

Задача 4.8. Запрещенная зона в Ge равна приблизительно $\Delta E = 0,75 \text{ эВ}$. При какой длине волны Ge начнет поглощать электромагнитное излучение?

Решение. Поглощение излучения определенной длины волны λ означает передачу энергии электронам валентной зоны для перехода их в зону проводимости

$$\frac{hc}{\lambda} = e\Delta\varphi = \Delta E$$

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{7,5 \cdot 10^{-1} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,655 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$= 1,655 \text{ мкм} = 16,55 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 16550 \text{ \AA}$ Это – инфракрасное (ИК) излучение, длинноволновый край полосы поглощения чистого германия.

Задача 4.9. Чистый кристаллический германий содержит $4,5 \cdot 10^{28} \text{ атомов/м}^3$. При температуре 300 °К один атом из каждых $2 \cdot 10^9$ атомов ионизован. Подвижности электронов и дырок при этой температуре соответственно равны $\mu_n = 0,4 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ и $\mu_p = 0,2 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. Определить удельную проводимость чистого германия.

Решение. В соответствии с формулой (4.16)

$$\sigma = \sigma_{n,p} = n_{n,p} \cdot e(\mu_n + \mu_p)$$

Концентрация электронов и дырок собственных носителей

$$n_{n,p} = \frac{4,5 \cdot 10^{28}}{2 \cdot 10^9} = 2,25 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

$$\text{Тогда } \sigma = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,25 \cdot 10^{19} (0,4+0,2) = 2,16 \text{ См/м} = 2,16 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}.$$

Задача 4.10. Характерная особенность полупроводников – наличие отрицательного температурного коэффициента сопротивления α . Вычислить α для чистого германия при температуре $T = 300$ °К. Ширина запрещенной зоны германия $\Delta E_0 = 0,75$ эВ.

Решение. Удельное сопротивление Ge (4.19):

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{\Delta E}{2kT}} \text{ Тогда } \frac{\partial \rho}{\partial T} = \rho_0 e^{\frac{\Delta E}{2kT}} \left(-\frac{\Delta E}{2kT^2} \right).$$

Температурный коэффициент сопротивления

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} = -\frac{\Delta E}{2kT^2}.$$

$$\text{Тогда } \alpha = -\frac{7,5 \cdot 10^{-1} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 9 \cdot 10^4} = -0,048 \text{ К}^{-1}.$$

Задача 4.11. Некоторый образец германия *n*-типа имеет постоянную Холла $R_X = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \text{ Кл}^{-1}$ и удельное сопротивление $\rho = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Найти концентрацию и подвижность электронов проводимости.

Решение. В соответствии с (4.25) постоянная Холла

$$R_X = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{qn}.$$

Отсюда концентрация

$$n = \frac{3\pi}{8qR_X} = \frac{3 \cdot 3,14}{8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,3 \cdot 10^{-3}} = 0,117 \cdot 10^{22} = 1,17 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$$

Проводимость $\sigma = 1/\rho = q \cdot n_n \cdot \mu_n$.

Подвижность электронов проводимости

$$\mu_n = \frac{1}{\rho q n_n} = \frac{1}{1,7 \cdot 10^{-2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,17 \cdot 10^{21}} = 0,31 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

Задача 4.12. Можно ли считать температуры $T_1 = 20$ К и $T_2 = 30$ К низкими для железа, если известно, что теплоемкость при этих температурах равна соответственно $C_{V1} = 0,226$ Дж·моль⁻¹К⁻¹ и $C_{V2} = 0,76$ Дж·моль⁻¹К⁻¹.

Решение. Отношение теплоемкостей при этих температурах $C_{V1}/C_{V2} = 3,36$

Отношение температур

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^x = \frac{C_{V2}}{C_{V1}}; \quad x \lg \frac{T_2}{T_1} = \lg \frac{C_{V2}}{C_{V1}}$$

$$x = \frac{\lg \frac{C_{V2}}{C_{V1}}}{\lg \frac{T_2}{T_1}} = \frac{\lg 3,36}{\lg 1,5} = \frac{0,526}{0,176} \approx 3.$$

Температуры можно считать низкими, т.к. отношение теплоемкостей соответствует закону Дебая (4.31).

Задача 4.13. Скорость поперечных упругих волн в алюминии $v_{\perp} = 3130$ м/с, продольных $v_{\parallel} = 6400$ м/с. Определить температуру Дебая θ для алюминия.

Решение. Температуру Дебая θ определим из (4.29)

$$\theta = \frac{\hbar \omega_{\max}}{k}$$

ω_{\max} – максимальная частота колебаний атомов в узлах решетки (4.37)

$$\omega_{\max} = \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 n}{v_{\parallel}^{-3} + 2v_{\perp}^{-3}}} = \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 n}{1/v_{\parallel}^3 + 2/v_{\perp}^3}}$$

Концентрация атомов Al в решетке

$$n = \frac{\rho N_A}{M}; \quad \rho_{Al} = 2,7 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad M_{Al} = 27 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$\theta = \frac{\hbar}{k} \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 n}{M(1/v_{\parallel}^3 + 2/v_{\perp}^3)}} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}}{1,38 \cdot 10^{-23}} \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 3,14^2 \cdot 2,7 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{2,7 \cdot 10^{-2} \left(\frac{1}{(6,4 \cdot 10^3)^3} + \frac{2}{(3,13 \cdot 10^3)^3} \right)}} =$$

$$= 408 \text{ К}$$

Задача 4.14. Кристаллический образец характеризуется температурой Дебая $\theta = 300$ К и скоростью звука $v = 5,2$ км/с. Для фонона с максимальной энергией, которая может возбуждаться в этом образце, определить энергию, импульс и длину волны де-Бройля, сравнить ее с постоянной решетки $a \approx 0,3$ нм.

Решение. Энергия $\varepsilon = \hbar\omega_{\max} = k\theta = 1,38 \cdot 10^{-23} 3 \cdot 10^2 = 4,14 \cdot 10^{-21}$ Дж = $= 4,14 \cdot 10^{-21} / 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,58 \cdot 10^{-2}$ эВ.

$$\text{Импульс фонона } p = \frac{\hbar\omega_{\max}}{v} = \frac{4,14 \cdot 10^{-21}}{5,2 \cdot 10^3} = 0,8 \cdot 10^{-24} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Длина волны де-Бройля

$$\lambda_{\phi} = \frac{h}{p} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{8 \cdot 10^{-25}} = 0,8 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 0,8 \text{ нм}$$

λ фонона с максимальной энергией совпадает по порядку величины с максимальной длиной тепловой волны в кристалле: $\lambda_{\min} \approx 2a = 0,6$ нм.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

4.15. Сравнить длину волны де Бройля для электрона, движущегося со скоростью $v = 2 \cdot 10^5$ м/с с постоянной кристаллической решетки металла $d = 5 \cdot 10^{-10}$ м. Нужно ли учитывать дифракционные явления на узлах решетки.

4.16. Пучок рентгеновских лучей с длиной волны λ падает на поверхность поворачивающегося монокристалла. Найти λ , если известно, что направления на максимумы 2-го и 3-го порядков от системы плоскостей с межплоскостным расстоянием $d = 2,8 \text{ \AA}$ образуют между собой угол $\theta = 60^\circ$.

4.17. Определить угол, под которым пучок рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 1,1 \text{ \AA}$ отражался в максимальном порядке от системы кристаллических плоскостей, расстояние между которыми $d = 2,5 \text{ \AA}$.

4.18. Пользуясь формулой средней квадратической скорости определить среднюю тепловую скорость свободного электрона при комнатной температуре $T = 300$ К.

4.19. Определить максимальную энергию и максимальную скорость электронов в золоте при $T = 0$ К, принимая, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Плотность Au $\rho = 19,3 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса золота $M = 197 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.20. Вычислить энергию Ферми и максимальную скорость электронов в алюминии при $T = 0$ К, считая, что на каждый атом алюминия приходится по три свободных электрона. Плотность алюминия $\rho = 2,69 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.21. Определить отношение концентраций n_1/n_2 свободных электронов в меди и литии при $T = 0$ К, если известно, что максимальные энергии электронов в этих металлах соответственно равны $E_{max1} = 6,2$ эВ, $E_{max2} = 4,72$ эВ.

4.22. Определить число свободных электронов, приходящихся на один атом натрия при температуре при $T = 0$ К. Уровень Ферми для натрия $E_F = 3,12$ эВ, плотность $\rho = 970$ кг/м³, молярная масса $M = 23 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.23. При какой концентрации свободных электронов в кристалле температура вырождения электронного газа равна 0°C ?

4.24. Определить граничную энергию E_{max} для свободных электронов в литии при температуре при $T = 0$ К, полагая, что на каждый атом лития приходится по одному свободному электрону. Найти температуру вырождения электронного газа в литии. Плотность лития $\rho = 540$ кг/м³, молярная масса $M = 7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.25. До какой температуры надо было бы нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов оказалась равной средней энергии свободных электронов в серебре при $T = 0$ К? Считать, что на каждый атом Ag приходится один свободный электрон. Плотность серебра $\rho = 10,5 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 108 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.26. Какова вероятность заполнения электронами энергетического уровня в металле, расположенного на $0,01$ эВ ниже уровня Ферми, при температуре $+18^\circ\text{C}$?

4.27. Как и во сколько раз изменится вероятность заполнения электронами энергетического уровня в металле, если уровень расположен на $0,01$ эВ ниже уровня Ферми и температура изменяется от 200 до 300 К?

4.28. Определить температуру, при которой в твердом проводнике вероятность нахождения электрона с энергией $0,5$ эВ над уровнем Ферми равна 2% ?

4.29. Определить вероятность того, что электрон в металле займет энергетическое состояние, находящееся в интервале энергий $\Delta E = 0,05$ эВ ниже и выше уровня Ферми для двух температур 1) $T_1 = 300\text{K}$, 2) $T_2 = 60$ К.

4.30. Найти величину энергетических интервалов (в единицах kT) между уровнем Ферми и уровнями, вероятность заполнения которых равна соответственно $0,1$ и $0,9$. Дать графическую интерпретацию на графике $f(E, T)$.

4.31. При какой температуре металла вероятность того, что электрон займет энергетическое состояние, находящееся в интервале

$\Delta E = 0,02$ эВ выше уровня Ферми, равна $0,4$? При какой температуре вероятность того, что электрон в металле будет иметь энергию, равную энергии Ферми, равна $0,5$?

4.32. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle E \rangle$ электронов в металле при температуре при $T = 0$ К, если энергия Ферми $E_F = 8$ эВ.

4.33. Вычислить максимальную и среднюю кинетические энергии электронов в металле при температуре $T = 0$ К, полагая, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Плотность металла $\rho = 860$ кг/м³, молярная масса $M = 39 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.34. Найти максимальную энергию электронов в металле при абсолютном нуле, если средняя кинетическая энергия электронов при $T = 0$ К равна $4,2$ эВ.

4.35. Определить температуру, при которой в проводнике вероятность нахождения электрона с энергией $0,1$ эВ над уровнем Ферми равна 5% .

4.36. Зависит ли средняя энергия $\langle E \rangle$ свободных электронов в кристалле от числа атомов, образующих кристалл? Найти среднюю энергию свободных электронов в кристалле при $T = 0$ К, энергия Ферми которого равна 5 эВ.

4.37. Полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, определить температуру T , при которой средняя кинетическая энергия электронов классического электронного газа равна средней энергии свободных электронов в меди при $T = 0$ К. Плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.38. Найти число электронов в зоне в интервале энергий от 0 до E_F при $T = 0$ К для металла объемом 5 см³, энергия Ферми которого $E_F = 5,5$ эВ.

4.39. Какая часть η свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле кинетическую энергию, превышающую половину максимальной?

4.40. Написать выражение для интервала ΔE_i между соседними уровнями энергии свободных электронов в металле. Положив объем образца равным 1 см³, вычислить интервал ΔE_i (в эВ) между соседними уровнями энергии свободных электронов для значений энергии а) $E_1 = 1$ эВ, б) $E_2 = 3$ эВ.

4.41. Какая часть η свободных электронов в металле имеет при абсолютном нуле кинетическую энергию, превышающую среднюю энергию?

4.42. Пятьдесят четыре процента всех свободных электронов в литии имеют энергию, превышающую некоторое значение энергии

Ферми в литиевом проводнике при $T = 0$ К. Вычислить величину этой энергии, полагая, что на каждый атом лития приходится один свободный электрон. Плотность лития $\rho = 0,54$ г/см³, молярная масса $M = 7 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.43. Половина свободных электронов в серебре при $T = 0$ К обладает кинетическими энергиями, большими, чем некоторая энергия E . Найти E , полагая, что на каждый атом серебра приходится один свободный электрон. Плотность серебра $\rho = 10,5 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 108 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.44. Металл находится при температуре $T = 0$ К. Определить, во сколько раз число электронов с кинетической энергией от $E_F/4$ до $E_F/2$ отличается от числа электронов с энергией от 0 до $E_F/2$.

4.45. Определить отношение концентрации электронов n_1 в металле при $T = 0$ К, энергия которых отличается от максимальной не более чем на $0,02 E_F$, к концентрации электронов n_2 , энергия которых не превышает значения $0,5 E_F$.

4.46. Найти отношение концентрации электронов n_1 в металле при $T = 0$ К, энергия которых отличается от максимальной не более чем на $\Delta E = 0,04 E_F$, к концентрации электронов n_2 , энергия которых не превышает значения $E = 0,04 E_F$.

4.47. Найти относительное число свободных электронов в металле, энергия которых отличается от энергии Ферми не более чем на $\eta = 2\%$, если температура металла $T = 0$ К.

4.48. До какой температуры надо нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов стала равна средней энергии свободных электронов в золоте при $T = 0$ К? Считать, что на каждый атом золота приходится один свободный электрон. Плотность золота $\rho = 19,3 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 197 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.49. Полагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, найти среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в меди при $T = 0$ К. Плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса меди $M = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.50. Выразить среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в металле при $T = 0$ К через максимальную скорость v_{max} . Вычислить $\langle v \rangle$ для серебра, полагая энергию Ферми равной 5,5 эВ.

4.51. Используя квантовую статистику, показать, что средняя квадратичная скорость свободных электронов в металле при $T = 0$ К равна $0,7775 v_{max}$. Найти среднюю квадратичную скорость электронов для металла, энергия Ферми которого равна 6 эВ.

4.52. Определить максимальную и среднюю квадратичную скорости электронов кальция при $T = 0$ К. Считать, что на каждый атом кальция приходится два свободных электрона. Плотность кальция $\rho = 1,53 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.53. Зная распределение электронов в металле по энергиям $dn(E)$, найти распределение электронов по скоростям $dn(v)$ при любой температуре T , а также при $T = 0$ К. Найти относительное число свободных электронов, скорости которых при $T = 0$ К отличаются от максимальной скорости не более чем на $\eta = 1,0$ %.

4.54. Определить, во сколько раз число свободных электронов со скоростями, лежащими в интервале от $v_{max}/4$ до $v_{max}/2$, отличается от числа электронов, скорости которых лежат в интервале от 0 до $v_{max}/4$. Температуру металла принять равной 0 К.

4.55. Определить число свободных электронов в единице объема бериллия, скорости которых отличаются от максимальной не более чем на 25% при $T = 0$ К. Считать, что на каждый атом бериллия приходится два свободных электрона. Плотность бериллия $\rho = 1,84 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.56. Найти относительное число свободных электронов, скорости которых при $T = 0$ К отличаются от средней квадратичной не более чем на $\eta = 2$ %. Зная закон распределения электронов по энергиям $dn(E)$ при $T = 0$ К, получить распределение по скоростям $dn(v)$.

4.57. Определить проводимость чистого германия, если известно, что при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ один атом из каждых $N = 1,8 \cdot 10^9$ ионизован. Подвижности электронов и дырок при этой температуре $\mu_n = 3900$ см²/(В·с) и $\mu_p = 1900$ см²/(В·с). Плотность германия $\rho = 5,33 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса Ge $M = 73 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.58. Определить удельное сопротивление чистого кремния, если известно, что при температуре $T = 323$ К один атом из каждых $3 \cdot 10^{11}$ ионизован. Подвижности электронов и дырок при этой температуре $\mu_n = 1340$ см²/(В·с) и $\mu_p = 460$ см²/(В·с). Плотность кремния $\rho = 2,33 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.59. Собственный полупроводник имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho = 0,48$ Ом·м. Определить концентрацию n -носителей тока, если подвижность электронов $\mu_n = 0,36$ м²/(В·с), подвижность дырок $\mu_p = 0,16$ м²/(В·с).

4.60. Определить подвижность дырок в полупроводнике p -типа, удельное сопротивление которого $\rho = 0,3 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ при концентрации дырок $n_p = 4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

4.61. При комнатной температуре электропроводность образца собственного кремния равна $4,3 \cdot 10^{-4} \text{ См/м}$. Какова концентрация собственных носителей тока? Если через образец проходит ток, то какая часть этого тока обусловлена электронами? Подвижности электронов и дырок в кремнии $\mu_n = 0,135$ и $\mu_p = 0,048 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.62. При облучении некоторого полупроводника светом в нем образовалось дополнительное количество электронов и дырок $\Delta n_n = \Delta n_p = 0,92 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$, в результате чего сопротивление этого полупроводника оказалось $R = 184 \text{ Ом}$. Полупроводник имеет форму куба со стороной $l = 0,1 \text{ м}$. Подвижность электронов и дырок $\mu_n = 0,132 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, $\mu_p = 0,048 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. Определить начальное сопротивление полупроводника R_0 .

4.63. Сопротивление кристалла PbS при температуре 20°С равно 10^4 Ом . Определить его сопротивление при $t = +80^\circ \text{С}$. Ширина запрещенной зоны равна $0,6 \text{ эВ}$.

4.64. Удельное сопротивление чистого германия при температуре $T_1 = 593 \text{ К}$ равно $\rho_1 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Найти удельное сопротивление германия при температуре $T_2 = 1000^\circ \text{С}$. Энергию Ферми принять равной $E_F = 0,4 \text{ эВ}$.

4.65. Во сколько раз изменится электропроводность чистого полупроводника при нагревании его от 20°С до 300°С ? Ширина запрещенной зоны полупроводника $\Delta E_3 = 0,5 \text{ эВ}$.

4.66. Ширина запрещенной зоны чистого кремния $\Delta E_3 = 1,11 \text{ эВ}$. Образец был взят при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$, затем его нагрели до $T_2 = 316,5 \text{ К}$. Во сколько раз изменится число электронов проводимости при таком изменении температуры?

4.67. Для полупроводника, обладающего собственной проводимостью, измерены сопротивления R_1 и R_2 при температурах T_1 и T_2 соответственно, причем $T_1 > T_2$. Найти ширину запрещенной зоны ΔE_3 данного материала.

4.68. При нагревании чистого полупроводника от температуры 27°С до некоторой температуры T_2 его сопротивление уменьшилось в два раза. Найти эту температуру, если ширина запрещенной зоны данного полупроводника равна $1,4 \text{ эВ}$.

4.69. Температурный коэффициент сопротивления беспримесного кремния при комнатной температуре имеет величину $\alpha = -0,071 \text{ К}^{-1}$. Используя эту величину, найдите частоту кванта света,

соответствующего красной границе фотопроводимости. Температуру считать равной 294 К.

4.70. Образец германия *n*-типа имеет удельное сопротивление $1,5 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ и значение постоянной Холла $R_H = 5,4 \cdot 10^3 \text{ см}^3/\text{Кл}$. $B = 0,1 \text{ Тл}$. ЭДС Холла в образце $0,2 \text{ В}$. Определить концентрацию основных носителей и подвижность.

4.71. Определить подвижность электронов в германии *n*-типа, для которого при некоторых условиях удельное сопротивление $\rho = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ и постоянная Холла $R_H = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{Кл}$.

4.72. Вычислить удельную проводимость кристалла Si, если постоянная Холла для него $R_H = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$, а подвижность носителей (дырок) $\mu_p = 0,16 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

4.73. Полупроводник в виде тонкой пластины высотой $d = 1 \text{ см}$ и длиной $l = 10 \text{ см}$ помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,2 \text{ Тл}$. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины вдоль l приложено постоянное напряжение $U = 300 \text{ В}$. Определить холловскую разность потенциалов, если постоянная Холла $R_H = 0,1 \text{ м}^3/\text{Кл}$, а удельное сопротивление $\rho = 0,5 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.

4.74. К концам пластины из полупроводника *p*-типа (высота $d = 10 \text{ мм}$, длина $l = 100 \text{ мм}$) приложили напряжение $U = 10 \text{ В}$ и поместили ее в перпендикулярное однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$. При этом возникает холловская разность потенциалов $U_H = 100 \text{ мВ}$. Найти: 1) концентрацию дырок, 2) подвижность дырок, если удельное сопротивление полупроводника равно $\rho = 2 \text{ Ом}\cdot\text{мм}$.

4.75. При измерении эффекта Холла пластинку из металла высотой $d = 10 \text{ мм}$ и длиной $l = 50 \text{ мм}$ поместили в магнитное поле с индукцией $B = 5 \text{ Тл}$. К концам пластинки приложили разность потенциалов $U = 10 \text{ В}$. При этом холловская разность потенциалов $U_H = 50 \text{ мВ}$ и удельное сопротивление $\rho = 2,5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$. Найти: 1) концентрацию и 2) подвижность электронов.

4.76. Тонкая пластинка из кремния высотой $d = 2 \text{ см}$ помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. При плотности тока $j = 2 \cdot 10^{-6} \text{ А}/\text{мм}^2$, направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов U_H оказалась равной $2,8 \text{ В}$. Определить концентрацию носителей заряда. Индукция магнитного поля равна $0,5 \text{ Тл}$.

4.77. Найти удельную теплоемкость кристалла железа при температуре $T = 20 \text{ К}$.

4.78. Сравнить значения удельных теплоемкостей меди при температурах $T_1 = 20$ К и $T_2 = 600$ К.

4.79. Найти удельную теплоемкость бериллия при температуре $T = 2$ К. Считать, что на каждый атом бериллия приходится два свободных электрона. Плотность бериллия равна $1,84 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.80. Пользуясь законом Дюлонга и Пти найти, из какого материала сделан металлический шарик массы 0,025 кг, если известно, что для его нагревания от температуры $t_1 = 10^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 30^\circ\text{C}$ ему было сообщено тепло в количестве $Q = 117$ Дж.

4.81. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v = 400$ м/с, ударяется о стенку и входит в нее. На сколько градусов повысилась температура пули, если 10% ее кинетической энергии превратилось во внутреннюю энергию? Удельную теплоемкость свинца найти по закону Дюлонга и Пти. Молярная масса свинца $207 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.82. Можно ли считать температуры 20 и 30 К низкими для кристалла, теплоемкость которого при этих температурах равна соответственно 0,226 и 0,760 Дж/(моль·К)? Если заданные температуры ниже характеристической, то найдите ее значение.

4.83. Определить: 1) максимальные значения энергии фонона в железе, 2) максимальные значения импульса фонона в железе, 3) фотон какой длины волны обладает такой энергией? Плотность железа $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.84. Используя теорию Дебая, вычислить изменение внутренней энергии кристаллического никеля массой $m = 50$ г при его нагревании на $\Delta T = 2$ К от температуры $T_1 = \theta/2$, где θ - характеристическая температура, молярная теплоемкость никеля $C_v(T) = 242,84$ Дж/моль·К.

4.85. Найти отношение изменения внутренней энергии кристалла меди при нагревании его от $T_1 = 0$ до $T_2 = 30$ К к нулевой энергии меди. Энергия Ферми для меди $E_F = 7$ эВ, характеристическая температура $\theta \cong 330$ К.

4.86. Определить максимальную частоту собственных колебаний для меди при $T = 0,4 \cdot \theta = 125$ К, где θ - характеристическая температура Дебая.

4.87. Найти: 1) максимальную частоту собственных колебаний и 2) оценить скорость распространения этих колебаний в кристалле, если при температуре $T = 20$ К удельная теплоемкость $c = 2,7$ Дж/(кг·К), плотность кристалла $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса кристалла $M = 56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.88. При нагревании $m = 25$ г золота от $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К ему было сообщено количество тепла $Q = 2,08$ Дж. Найти дебаевскую температуру θ кристалла золота, если $\theta \gg T_1$ и T_2 . Молярная масса золота $M = 197 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.89. Найти изменение внутренней энергии кристалла свинца массой 100 г при нагревании на $\Delta T = 5$ К от температуры $T_1 = 0,5 \theta$. Молярная масса свинца $M = 207 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.90. При нагревании 0,4 моля медного кристалла от $T_1 = 10$ К до $T_2 = 20$ К ему было сообщено количество тепла $Q = 0,80$ Дж. Найти характеристическую температуру меди θ , если T_1 и $T_2 \ll \theta$.

4.91. Найти отношение тепла Q_1 , пошедшего для нагревания кристалла меди от $T_1 = 0$ К до $T_2 = 5$ К к теплу, которое необходимо подвести к тому же кристаллу, чтобы нагреть его от $T_3 = 10$ К до $T_4 = 15$ К. Энергия Ферми меди $E_F = 7$ эВ, температура Дебая меди $\theta = 340$ К.

4.92. Сравнить количество тепла Q_1 , которое необходимо подвести к кристаллу кремния, чтобы изменить его температуру на $\Delta T = 100$ К при нагревании его от первоначальной температуры $T_1 = 10$ К, с теплом Q_2 , необходимым для нагревания этого кристалла от $t_2 = 500^\circ \text{C}$ до $t_3 = 600^\circ \text{C}$. Характеристическая температура кремния $\theta = 658$ К.

4.93. Вычислить: 1) характеристическую температуру и 2) максимальную частоту собственных колебаний атомов железа, если скорость распространения продольных и поперечных упругих волн соответственно равны 5,85 и 3,23 км/с. Плотность железа равна $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

4.94. Найти: 1) максимальную энергию фонона в серебре, 2) характеристическую температуру серебра, 3) фотон какой длины волны обладает такой же энергией? Скорости распространения акустических волн в серебре соответственно равны $v_\perp = 1590$ м/с и $v_\parallel = 3600$ м/с. Плотность серебра $\rho = 10,5 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса серебра $M = 0,108$ кг/моль.

4.95. Оценить: 1) скорость распространения упругих волн в кристалле меди, 2) минимальную длину волны фонона, если характеристическая температура меди $\theta = 340$ К. Плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, молярная масса $M = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

5. Основы ядерной физики

5.1. Основные понятия и законы

Обозначения, состав атомного ядра

Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом: ${}^A_Z X$ или ${}_Z X^A$, где X – символ химического элемента, Z – зарядовое число, равное числу протонов (заряженных частиц) в ядре, оно равно порядковому номеру в таблице Менделеева. Заряд ядра равен Ze , где e – элементарный положительный заряд, численно равный заряду электрона, A – массовое число, численно равное числу протонов и нейтронов в ядре (числу нуклонов). Число нейтронов: $N = A - Z$. Свойства ядер зависят от как числа протонов, так и от числа нейтронов в них. Ядра атомов с одинаковым числом протонов, но разным числом нейтронов называются изотопами (например, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^7_3\text{Li}$) и обладают разными свойствами.

Ядра с одинаковым массовым числом A , но разным Z , называются изобарами. Они располагаются в разных клетках таблицы Менделеева.

В соответствии с гидродинамической (капельной) моделью ядра оно представляет собой сферическую каплю, состоящую из смеси протонной (1_1p) и нейтронной (1_0n) жидкости. Радиусы ядер определяются формулой

$$r = r_0 \sqrt[3]{A},$$

где A – число нуклонов в ядре; r_0 – коэффициент пропорциональности, его можно считать равным $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-15}$ м. r_0 по величине близка к комптоновской длине волны π -мезона $r_0 \approx \hbar/m_\pi c \approx 1,4 \cdot 10^{-15}$ м. Единица длины в ядерной физике: 1 Фм (ферми) = 10^{-15} м = 10^{-13} см. Эффективная площадь поперечного сечения ядра:

$$\sigma = \pi r^2, \quad \text{где } r - \text{ радиус ядра.}$$

Ядро-капля и капля жидкости имеют общие физические свойства. Ядерные силы притяжения между нуклонами, как и силы взаимодействия между молекулами являются короткодействующими (в

пределах ядра). Ядерные силы обладают свойством насыщения (каждый нуклон взаимодействует только с ближайшими частицами). Ядерные силы обладают свойствами зарядовой независимости (p-p, n-n и p-n).

Ядерные силы зависят от направления спинов взаимодействующих между собой нуклонов. Система из протона и нейтрона образует ядро (дейтрон, изотоп водорода ${}^2_1\text{H}$) лишь тогда, когда спины протона и нейтрона параллельны (суммарный спин тогда $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$). Если спины антипараллельны, ядро не образуется.

Некоторые свойства нуклонов представлены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

	Протон p	Нейтрон n	Электрон e
Масса покоя	$m_{0p} = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 938,28 \text{ МэВ}$	$m_{0n} = 1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 939,57 \text{ МэВ}$	$m_{0e} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 0,511 \text{ МэВ}$
Внутренний момент количества движения (в единицах \hbar)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Статистика	Ферми - Дирака		
Время жизни	$> 10^{25}$ лет	887 ± 2 с	$> 4,3 \cdot 10^{23}$ лет

Дефект массы и энергия связи

Точные измерения масс атомов (с помощью масс-спектрометров) показали, что сумма масс нуклонов, взятых отдельно, всегда на несколько десятых процента больше массы ядра, составленного из этих нуклонов:

$$\Delta M = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - M_{\text{я}}.$$

Здесь m_p , m_n и $M_{\text{я}}$ соответственно массы протона, нейтрона и ядра. В таблицах обычно приводятся не массы ядер, а массы нейтральных атомов $M_a = M_{\text{я}} + Z m_e$, где m_e - масса электрона.

Тогда дефект массы

$$\begin{aligned} \Delta M &= Z \cdot m_p + Z m_e + (A - Z) \cdot m_n - M_a = \\ &= Z \cdot m_H + (A - Z) \cdot m_n - M_a, \end{aligned}$$

где m_H - масса атома водорода.

При образовании ядра должно выделяться некоторое количество энергии и обратно, чтобы разделить ядро на составные части, т.е. удалить нуклоны друг от друга до расстояния отсутствия их взаимодействия, затрачивается энергия, называемая энергией связи:

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta M; \text{ где } c - \text{ скорость света в вакууме.}$$

Обычно энергию связи выражают в мегаэлектронвольтах (МэВ), если при этом размерность ΔM в а.е.м., то формула для энергии связи приобретает вид

$$E_{\text{св}} = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}} \cdot \Delta M (\text{а.е.м.})$$

Частное от деления энергии связи $E_{\text{св}}$ на число нуклонов (A) называется удельной энергией связи, т.е. энергией, необходимой для удаления из ядра данного нуклона.

$$\epsilon_{\text{св}} = E_{\text{св}}/A$$

Удельная энергия связи для большинства ядер имеет величину около $7 \div 8$ МэВ/нуклон. Кривая зависимости удельной энергии связи $\epsilon_{\text{св}}$ от массового числа A представлена на рис. 5.1.

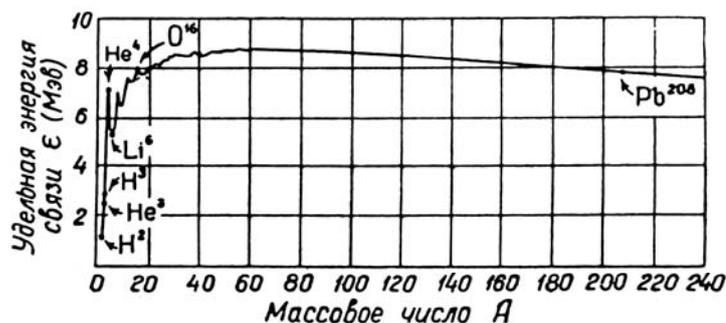


Рис. 5.1

Радиоактивность. Закон радиоактивного распада

Ядра некоторых изотопов, как естественных, так и искусственных, могут самопроизвольно превращаться в другие ядра. Эта способность к превращению называется радиоактивностью и

сопровождается испусканием некоторых частиц (альфа-распад, бета-распад, гамма-излучение).

Самопроизвольный распад атомных ядер подчиняется закону радиоактивного распада. Количество радиоактивных ядер изменяется по экспоненциальному закону:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

здесь N_0 – число атомных ядер радиоактивного вещества в начальный момент времени, N – число нераспавшихся ядер в момент времени t , λ – постоянная распада, имеющая смысл вероятности распада ядра за секунду и равная доле ядер, распадающихся в единицу времени.

Величина $\tau = 1/\lambda$, обратная постоянной распада, называется средним временем жизни данного изотопа. Если T – период полураспада, то

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}, \text{ то } e^{\lambda T} = 2, \text{ а } \ln(e^{\lambda T}) = \ln 2 = 0,693,$$

$$\text{т.е. } \lambda T = 0,693, \text{ а } \lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{0,693}{T}.$$

Тогда закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\frac{0,693t}{T}}.$$

Для медленно распадающихся веществ отношение числа ядер, распадающихся в единицу времени N_1 к N_0

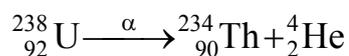
$$\frac{N_1}{N_0} = \lambda, \text{ откуда } N_1 = \lambda N_0 = A - \text{активность радиоактивного}$$

вещества, измеряется в беккерелях (Бк, с^{-1}). Кроме того, используется Кюри (Ки) ($1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10}$ актов распада в секунду).

Альфа-распад

Альфа-распадом называется самопроизвольное превращение ядра с испусканием альфа-частицы (ядра атома гелия ${}^4_2\text{He}$). Способность к альфа-распаду наблюдается в основном у изотопов

тяжелых элементов с порядковым номером $Z > 82$, например, у изотопа урана по схеме



Спектр энергий α -частиц линейчатый, т.к. исходное (материнское) ядро и α -продукт обладают дискретными спектрами энергетических состояний. Энергии α -частиц различных изотопов лежат в пределах от 4 до 10,5 МэВ, что соответствует скоростям порядка 10^9 см/с.

Суммарная потенциальная энергия электростатического отталкивания α -частиц от ядра и притяжение их к ядру под действием ядерных сил образует потенциальный барьер (рис.5.2).

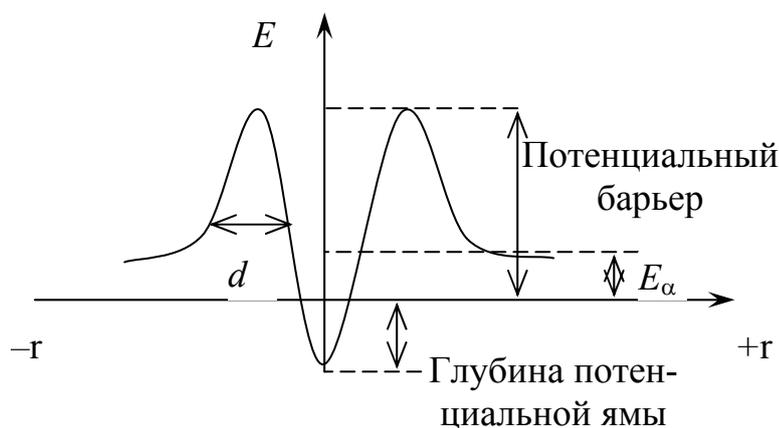
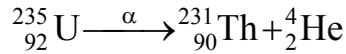


Рис. 5.2. График потенциальной энергии

Опыт показывает, что энергия α -частиц (E_α) меньше высоты потенциального барьера. Например, для ${}_{92}^{238}\text{U}$ $E_\alpha \sim 4,2$ МэВ, а E_{\max} (потенциальный барьер) $\sim 28,1$ МэВ.

Квантово-механическая теория трактует вылет α -частицы из ядра как просачивание через потенциальный барьер ядра. Это явление называется туннельным эффектом и объясняется корпускулярно-волновыми свойствами α -частицы.

Часто дочернее ядро при α -распаде имеет несколько возбужденных уровней и испускает γ -кванты. Например,



$\epsilon_{\gamma} \sim 0,18 \text{ МэВ} \div 0,38 \text{ МэВ}$, а энергия $E_{\alpha} \sim 4,58 \text{ МэВ} \div 4,2 \text{ МэВ}$ (рис.5.3).

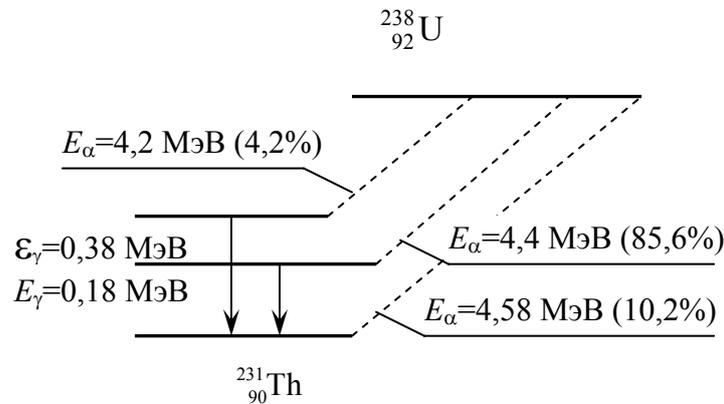


Рис. 5.3

При движении в веществе α -частица тормозится и теряет энергию, в основном, на возбуждение и ионизацию атомов и молекул вещества.

Альфа-частица обладает малой проникающей способностью, поглощаясь, например, несколькими листочками бумаги, слоем алюминия толщиной 0,05 мм и т.д..

Опасным является попадание радиоактивных загрязнений внутрь организма (вдыхание, заглатывание) При этом ионизационный эффект сказывается очень сильно, тогда как эффект внешнего облучения мал, α - частицы поглощаются одеждой или клетками кожного покрова.

Бета-распад

Бета-распадом называется самопроизвольное превращение ядра в другое ядро с тем же массовым числом A , но с зарядом, отличающимся от исходного (материнского) ядра на единицу. Различают три вида превращений:

- 1) электронный или бета-минус распад;
- 2) позитронный или бета-плюс распад;
- 3) электронный K -захват.

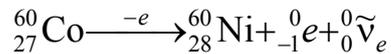
Соответственно:

$$1) {}_0^1n \rightarrow {}_1^1p + {}_{-1}^0e + {}_0^0\tilde{\nu}_e \text{ (}\beta_- \text{-распад);}$$

$$2) {}_1^1p \rightarrow {}_0^1n + {}_{+1}^0e + {}_0^0\nu_e \text{ (}\beta_+ \text{-распад);}$$

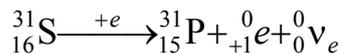
$$3) {}_1^1p + {}_{-1}^0e \rightarrow {}_0^1n + {}_0^0\nu_e \text{ (}K \text{-захват).}$$

1) превращение одного из нейтронов ядра в протон с вылетом электрона и электронного антинейтрино, например,



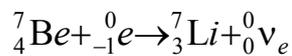
происходит в естественно- и искусственно-радиоактивных ядрах, это превращение энергетически возможно и вне ядра

2) превращение одного из протонов ядра в нейтрон с вылетом позитрона и электронного нейтрино, например,



характерно для явления искусственной радиоактивности;

3) В результате электронного захвата заряд убывает на единицу, например,



Электронный захват сопровождается характеристическим рентгеновским излучением. Захват электрона с L -оболочки происходит в 100 раз реже, чем K -захват.

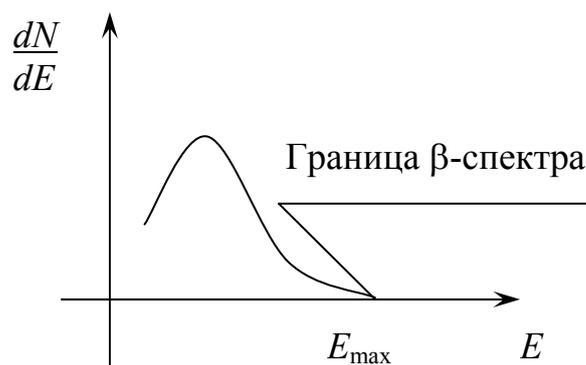


Рис. 5.4.

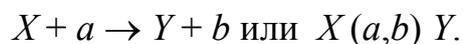
Спектр β -излучения является непрерывным (сплошным), энергия испускаемых частиц принимает все значения от нуля до E_{\max} (рис.5.4). Энергия, освобождаемая при электронном захвате, распределяется между ядром-продуктом и нейтрино. При прохождении через вещество β -частицы теряют свою энергию и тормозятся. Траектории β -частиц не прямолинейны. Интенсивность β -излучения уменьшается по экспоненциальному закону:

$$I = I_0 e^{-\mu l},$$

где l - толщина поглотителя, μ - коэффициент поглощения в веществе, $[\mu] = \text{м}^{-1}$. При движении β -частиц в среде возникает тормозное излучение. Энергия фотонов тормозного излучения зависит от энергии β -частиц.

Ядерные реакции

Ядерными реакциями называются искусственные превращения атомных ядер, вызванные их взаимодействием с элементарными частицами или друг с другом. Как правило, в ядерных реакциях участвуют два ядра и две частицы. Символическая запись ядерной реакции:



Ядерные реакции сопровождаются перестройкой атомных ядер, происходит более глубокое изменения вещества, чем при химических реакциях. Однако некоторые физические величины в реакции не меняются, имеют место законы сохранения:

1. Закон сохранения электрического заряда: $Z_X + Z_a = Z_Y + Z_b$.

2. Закон сохранения числа нуклонов: $A_X + A_a = A_Y + A_b$.

3. Сохраняются первые интегралы движения механики применительно к ядрам и частицам: полная энергия, импульс, момент количества движения (частицы и ядра образуют замкнутую механическую систему).

Закон сохранения энергии выполняется в релятивистском понимании $E_X + E_a = E_Y + E_b$, при этом

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = T + m_0 c^2,$$

здесь m_0 – масса покоя частиц, участвующих в реакции, p – модуль импульса.

Векторный закон сохранения импульса: $\vec{p}_X + \vec{p}_a = \vec{p}_Y + \vec{p}_b$.

Полный момент количества движения ядер (частиц) равен векторной сумме собственного момента (спина) и орбитального момента.

Часто наблюдается, что сумма масс частиц, вступающих в реакции ($M_X + M_a$) не равна сумм масс ($M_Y + M_b$) частиц-продуктов реакции. В этом случае величина

$$Q = (M_X + M_a - M_Y - M_b)c^2 \quad \text{или}$$

$$Q = \left(\sum_i M_{\text{исход}} - \sum_j M_{\text{конечн}} \right) \cdot 931,44 [\text{МэВ}]$$

выражает энергетический баланс ядерной реакции и называется тепловым эффектом реакции или энергией реакции. Если $Q > 0$, реакция идет с выделением тепла (она экзотермическая), если $Q < 0$, то она эндотермическая. Эта реакция пойдет только тогда, когда энергия относительного движения M_X и M_a будет не меньше теплового эффекта реакции Q . При бомбардировке неподвижных ядер-мишеней X частицами M_a , энергия последних должна превышать величину:

$$E_{\text{пор}} = \frac{M_a + M_x}{M_x} |Q| = -\frac{M_a + M_x}{M_x} Q$$

Энергия ядерной реакции может быть записана в виде:

$$Q = (T_a + T_x) - (T_b + T_y).$$

5.2. Примеры решения задач

Задача 5.1. Определить удельную энергию связи ядра ${}^7_3\text{Li}$.

Решение. Определим дефект массы ядра:

$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_{\text{я}}.$$

Так как в таблицах обычно приводятся массы нейтральных атомов, то $m_{\text{я}} = m_a - Z m_e$

$$\Delta m = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m_a + Z m_e = Z(m_p + m_e) + (A - Z) \cdot m_n;$$

$((m_p + m_e) = m_H$ - масса атома водорода).

Используя табличные данные

$$\Delta m = 3 \cdot 1,00783 + 4 \cdot 1,00867 - 7,01601 = 0,04216 \text{ а.е.м.}$$

$$1 \text{ а.е.м.} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Энергия связи

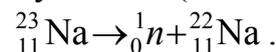
$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2 = \Delta m (\text{а.е.м.}) \cdot 931,5 \text{ МэВ/а.е.м.} = 0,04216 \cdot 931,5 = 39,27 \text{ МэВ.}$$

Удельная энергия связи – энергия связи, приходящаяся на один нуклон $A = 7$

$$\varepsilon = \frac{E_{\text{связи}}}{A} = \frac{39,27}{7} = 5,61 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$$

Задача 5.2. Определить энергию, которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра ${}^{23}_{11}\text{Na}$.

Решение. Отрыв нейтрона от ядра приводит к уменьшению числа нуклонов (массового числа) на единицу:



Можно рассматривать энергию отрыва нейтрона от ${}^{23}_{11}\text{Na}$ (E) как энергию связи ($E_{\text{св}}$) нейтрона с ядром ${}^{22}_{11}\text{Na}$.

Тогда используем

$$E = E_{\text{св}} = \Delta m c^2$$

$$\Delta m = m_n + m_{\text{Na}}^{22} - m_{\text{Na}}^{23} = 1,00867 + 21,99444 - 22,9897 =$$

$$= 0,01334 \text{ а.е.м.}$$

$$E = E_{\text{св}} = \Delta m \cdot 931,5 \text{ МэВ/а.е.м.} = 0,01334 \cdot 931,5 = 12,43 \text{ МэВ.}$$

Задача 5.3. Определить число нуклонов (A) в единице объема ядра ${}^A_Z X$.

Решение. Концентрация нуклонов в ядре:

$$n = \frac{A}{V} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{я}}^3}; r_{\text{я}} - \text{радиус ядра.}$$

$$r_{\text{я}} = 1,3 \cdot 10^{-15} A^{\frac{1}{3}} \text{ м}$$

$$n = \frac{3}{4\pi \cdot 1,3^3 \cdot 10^{-45}} = \frac{3 \cdot 10^{45}}{4 \cdot 3,14 \cdot 1,3^3} \cong 10^{44} \frac{\text{нуклонов}}{\text{м}^3}.$$

Концентрация нуклонов одинакова для различных ядер.

Задача 5.4. Период полураспада радиоактивного аргона ${}^{41}_{18}\text{Ar}$ равен $T_{1/2} = 110$ мин. Определить время, в течение которого распадается 75% начального количества ядер.

Решение. Число распавшихся радиоактивных ядер в течение времени t равно:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

По условию задачи $\Delta N = 0,75 N_0$

$$0,75 N_0 = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

$$0,75 = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$e^{-\lambda t} = 0,25$$

Логарифмируя, получим:

$$e^{\lambda t} = 4; \lambda t = \ln 4 \quad t = \frac{\ln 4}{\lambda}$$

$$\text{Период полураспада } T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}; \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$\text{Окончательно } t = \frac{\ln 4}{\ln 2} T_{1/2} = \frac{1,386}{0,693} \cdot 110 = 220 \text{ мин.}$$

Задача 5.5. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния $^{27}_{12}\text{Mg}$ массой $m = 0,2$ мкг, а также активность A по истечении 1 часа. Предполагается, что все атомы изотопа радиоактивны.

Решение. Начальная активность изотопа $A_0 = \lambda N_0$; λ - постоянная распада, N_0 - количество ядер (атомов) в начальный момент

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}; N_0 = \frac{m}{\mu} N_A, \quad \mu = 24,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \quad - \text{ молярная масса}$$

магния, $T_{1/2} = 10$ мин., N_A – число Авогадро.

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m N_A}{\mu} = \frac{6,93 \cdot 10^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-10} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{6 \cdot 10^2 \cdot 2,44 \cdot 10^{-2}} = 5,7 \cdot 10^{12} \text{ Бк} = 5,7 \text{ ТБк}$$

Активность изотопа изменяется со временем по закону:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

$$\text{Т.к. } \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \text{ то } A = A_0 e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}} = A_0 \left(e^{\ln 2} \right)^{-\frac{t}{T_{1/2}}}. \text{ Т.к. } e^{\ln 2} = 2, \text{ то}$$

$$A = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = \frac{A_0}{2^{\frac{t}{T_{1/2}}}} = \frac{5,7 \cdot 10^{12}}{2^{\frac{60}{10}}} = \frac{5,7 \cdot 10^{12}}{64} = 0,0891 \cdot 10^{12} = 8,91 \cdot 10^{10} \text{ Бк} = 89 \text{ ГБк}$$

Задача 5.6. Найти тепловой эффект реакции $^9_4\text{Be} + ^1_1\text{p} \rightarrow ^6_3\text{Li} + ^4_2\text{He}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$Q = \Delta mc^2$$

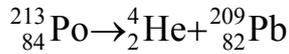
$$\begin{aligned} Q &= 931,5 (m_{^9_4\text{Be}} + m_{^1_1\text{p}} - m_{^6_3\text{Li}} - m_{^4_2\text{He}}) = \\ &= 931,5 (9,01219 + 1,00783 - 6,01513 - 4,0026) = 931,5 \cdot 0,00229 = \\ &= 2,13 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

Реакция идет с выделением тепла.

Задача 5.7. Покоившееся ядро $^{213}_{84}\text{Po}$ испустило α -частицу с кинетической энергией $T_\alpha = 8,34$ МэВ. При этом дочернее ядро

оказалось в основном состоянии. Найти полную энергию, освобождаемую в этом процессе. Какую долю этой энергии составляет кинетическая энергия дочернего ядра?

Решение. α -распад полония происходит согласно схеме:



Согласно закону сохранения импульса

$$|\vec{p}_{\text{Pb}}| = |\vec{p}_{\alpha}|, \text{ т.е. } \sqrt{2M_{\text{Pb}}T_{\text{Pb}}} = \sqrt{2m_{\alpha}T_{\alpha}} \text{ или } M_{\text{Pb}}T_{\text{Pb}} = m_{\alpha}T_{\alpha}.$$

Отсюда кинетическая энергия дочернего ядра (свинца)

$$T_{\text{Pb}} = T_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{Pb}}}$$

Полная энергия, освобождаемая в процессе:

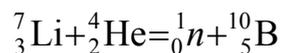
$$E = T_{\alpha} + T_{\text{Pb}} = T_{\alpha} \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{Pb}}} \right) = 8,34 \left(1 + \frac{4,0026}{205,974} \right) = 8,5 \text{ МэВ}.$$

Доля кинетической энергии дочернего ядра:

$$\eta = \frac{T_{\text{Pb}}}{E} = \frac{T_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{Pb}}}}{T_{\alpha} \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{Pb}}} \right)} = \frac{1}{\frac{M_{\text{Pb}}}{m_{\alpha}} + 1} \cong 0,019 = 1,9\%.$$

Задача 5.8. Вычислить порог реакции ${}^7_3\text{Li} (\alpha, n) {}^{10}_5\text{B}$.

Решение. Реакция, о которой идет речь может быть записана в виде



Подсчитаем энергию реакции:

$$\begin{aligned} Q &= 931,5 (m_{{}^6_3\text{Li}} + m_{\alpha} - m_n - m_{{}^{10}_5\text{Be}}) = \\ &= 931,5 \text{ МэВ/а.е.м.} (7,01601 \text{ а.е.м.} + 4,0026 \text{ а.е.м.} - 1,00867 \text{ а.е.м.} - \\ &- 10,01294 \text{ а.е.м.} = 931,5 (-0,003) = -2,8 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

Следовательно, реакция эндотермическая. Для вычисления порога реакции воспользуемся формулой:

$$E_{\text{пор}} = Q_{\text{энд}} \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{Li}}} \right) = |Q| \cdot \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{Li}}} \right) = 2,8 \cdot \left(1 + \frac{4}{7} \right) = 2,8 \cdot \frac{11}{7} = 4,4 \text{ МэВ} .$$

Задача 5.9. Какие ядра образуются из α -активного ядра радия ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ в результате пяти α - и четырех β -распадов?

Решение. Схема реакции:



В соответствии с законом сохранения электрического заряда:

$$88 = Z + 5 \cdot 2 + 4(-1) . \text{ Следовательно } Z = 82 .$$

В соответствии с законом сохранения для A :

$$226 = A + 5 \cdot 4 . \text{ Следовательно } A = 206 .$$

Тогда найденный неизвестный изотоп ${}^A_Z X = {}^{206}_{82}\text{Pb}$ – изотоп свинца.

Задача 5.10. Найти энергию реакции ${}^9_4\text{Be} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^6_3\text{Li} + {}^4_2\text{He}$, если известно, что кинетические энергии протона $T_{\text{H}} = 5,45 \text{ МэВ}$, ядра гелия $T_{\text{He}} = 4 \text{ МэВ}$ и что α -частица вылетела под углом 90° к направлению движения протона. Ядро ${}^9_4\text{Be}$ – неподвижно.

Решение. Энергия реакции Q – разность между суммой кинетических энергий продуктов реакции и кинетической энергией протона

$$Q = T_{\text{Li}} + T_{\alpha} - T_{\text{H}}$$

Кинетическая энергия ядра лития неизвестна, для её нахождения воспользуемся законом сохранения импульса (рис.5.5)

$$\vec{p}_{\text{H}} = \vec{p}_{\text{Li}} + \vec{p}_{\alpha}$$

$$\text{Отсюда } p_{\text{H}}^2 = p_{\text{Li}}^2 + p_{\alpha}^2$$

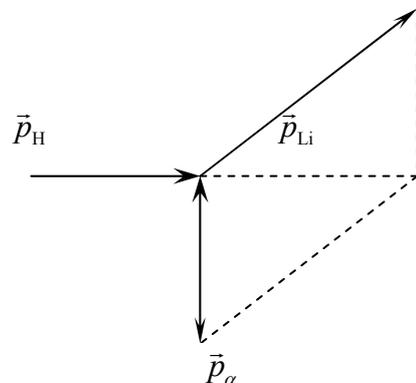


Рис. 5.5.

Кинетические энергии ядер:

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad (T \ll mc^2)$$

$$2m_{\text{Li}}T_{\text{Li}} = 2m_{\text{p}}T_{\text{p}} + 2m_{\alpha}T_{\alpha} .$$

Отсюда:

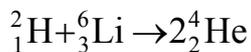
$$T_{\text{Li}} = \frac{m_{\text{H}}T_{\text{H}} + m_{\alpha}T_{\alpha}}{m_{\text{Li}}} = \frac{4,00260 \cdot 4 + 1,00728 \cdot 5,45}{6,01513} = 3,57 \text{ МэВ} .$$

Тепловой эффект реакции:

$$Q = 3,57 + 4 - 5,45 = 2,12 \text{ МэВ} .$$

Задача 5.11. Определить энергию, выделяющуюся при образовании двух α -частиц в результате слияния ядер ${}^2_1\text{H}$ и ${}^6_3\text{Li}$, если известно, что удельные энергии связи (\mathcal{E}) в ядрах ${}^2_1\text{H}$, ${}^4_2\text{He}$, и ${}^6_3\text{Li}$ равны соответственно 1,11; 7,08 и 5,33 МэВ.

Решение. Ядерная реакция (синтеза):



Из нее следует

$$E = 2E_{\text{св}}({}^4_2\text{He}) - E_{\text{св}}({}^2_1\text{H}) - E_{\text{св}}({}^6_3\text{Li}) = 2 \cdot 4\mathcal{E}({}^4_2\text{He}) - 2\mathcal{E}({}^2_1\text{H}) - 6\mathcal{E}({}^6_3\text{Li}) = 8 \cdot 7,08 - 2 \cdot 1,11 - 6 \cdot 5,33 = 22,44 \text{ МэВ} .$$

5.3. Задачи для самостоятельного решения

При решении задач можете использовать значения масс покоя нейтральных атомов, а также масс покоя элементарных частиц и значения периодов полураспада радиоактивных изотопов, приведенные в приложениях.

5.12. Определить массу ядра лития, если масса нейтрального атома лития равна 7,01601 а.е.м.

5.13. Какую часть массы нейтрального атома плутония составляет масса его электронной оболочки?

5.14. Определить атомные номера, массовые числа и химические символы ядер, которые получаются, если в ядрах ${}^3_2\text{He}$, ${}^7_4\text{Be}$, ${}^{15}_8\text{O}$ протоны заменить нейтронами, а нейтроны протонами. Привести символическую запись получившихся ядер.

5.15. Определить диаметры следующих ядер: 1) ${}^6_3\text{Li}$, 2) ${}^{27}_{13}\text{Al}$, 3) ${}^{64}_{29}\text{Cu}$, 4) ${}^{125}_{50}\text{Sn}$, 5) ${}^{216}_{84}\text{Po}$.

5.16. Определить диаметры ядер калия (${}^{39}_{19}\text{K}$) и цинка (${}^{67}_{30}\text{Zn}$). Найти соотношение сечений этих ядер.

5.17. Оценить, какую часть объема атома кобальта составляет объем его ядра. Плотность кобальта $\rho = 4500 \text{ кг/м}^3$.

5.18. Показать, что средняя плотность $\langle \rho \rangle$ ядерного вещества одинакова для всех ядер. Оценить (по порядку величины) ее значение.

5.19. Два ядра ${}^{10}_5\text{B}$ сблизилась до расстояния, равного диаметру ядра. Считая, что масса и заряд равномерно распределены по объему ядра, определить силу F_1 гравитационного притяжения, силу F_2 кулоновского отталкивания и отношение этих сил (F_1/F_2).

5.20. Определить дефект массы Δm и энергию связи ядра атома тяжелого водорода. ${}^3_1\text{H}$

5.21. Определить удельную энергию связи $E_{\text{уд}}$ ядра ${}^{12}_6\text{C}$.

5.22. Во сколько раз сечение ядра нептуния ${}^{234}_{93}\text{Np}$ больше сечения ядра стронция ${}^{88}_{38}\text{Sr}$?

5.23. Найти удельную энергию связи ядер ${}^3_1\text{H}$ или ${}^3_2\text{He}$. Какое из этих ядер более устойчиво?

5.24. Энергия связи ядра, состоящего из двух протонов и одного нейтрона, равна 7,72 МэВ. Определить массу M_a нейтрального атома, имеющего это ядро.

5.25. Определить массу M_a нейтрального атома, если ядро этого атома состоит из трех протонов и двух нейтронов и энергия связи $E_{\text{св}} = 26,3 \text{ МэВ}$.

5.26. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы разделить на отдельные нуклоны ядро ${}^7_3\text{Li}$?

5.27. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы оторвать от ядра азота ${}^{14}_7\text{N}$ один нейтрон?

5.28. Найти минимальную энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра углерода ${}^{12}_6\text{C}$.

5.29. Определить удельную энергию связи $E_{\text{уд}}$ ядра бериллия ${}^7_4\text{Be}$.

5.30. Какую наименьшую энергию нужно затратить, чтобы разделить ядро углерода ${}^{12}_6\text{C}$ на три одинаковые части?

5.31. Удельная энергия связи ядра гелия ${}^4_2\text{He}$ равна $E_{\text{уд}} = 7,1 \text{ МэВ/нуклон}$. Определить энергию связи и дефект массы ${}^4_2\text{He}$.

5.32. Найти удельную энергию связи нуклонов в ядре алюминия ${}_{13}\text{Al}^{27}$

5.33. Какая часть δ начального количества атомов актиния ${}_{89}\text{Ac}^{235}$ останется через 5 суток? Период полураспада $T_{1/2} = 10$ суток.

5.34. Некоторый радиоактивный препарат имеет постоянную распада $\lambda = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Через какое время t распадется 75% первоначального количества атомов?

5.35. Определить активность A фосфора P^{32} массой $m = 10^{-3}$ г. Молярная масса фосфора $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, период полураспада $T_{1/2} = 14,3$ суток.

5.36. За какое время Δt распадется 1/4 начального количества ядер радиоактивного изотопа, период полураспада которого равен $T_{1/2} = 24$ часа?

5.37. Какая часть начального количества атомов распадется за один год в радиоактивном изотопе тория Th^{229} ? Период полураспада $T_{1/2} = 7 \cdot 10^3$ лет.

5.38. Определить число ΔN атомов, распадающихся в радиоактивном изотопе за время $t = 10$ с, если его активность $A = 0,1$ МБк. Считать активность постоянной в течение указанного времени.

5.39. В урановой руде отношение числа ядер ${}^{238}\text{U}$ к числу ядер ${}^{206}\text{Pb}$ составляет 2,8. Оценить возраст руды, считая, что весь свинец является конечным продуктом распада уранового ряда. Период полураспада урана $4,5 \cdot 10^9$ лет.

5.40. Чему равна удельная активность изотопа урана ${}_{92}\text{U}^{238}$, если период его полураспада $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ лет.

5.41. Найти массу m_1 урана U^{238} , имеющего такую же активность, как стронций Sr^{90} массой $m_{\text{Sr}} = 10^{-3}$ мг.

5.42. За время $\Delta t = 1$ сутки активность изотопа уменьшилась от $A_1 = 118$ ГБк до $A_2 = 7,4$ ГБк. Определить период полураспада этого изотопа.

5.43. Сколько α - и β -распадов испытает уран ${}_{92}\text{U}^{238}$, превращаясь в конечном счете в стабильный изотоп ${}_{82}\text{Pb}^{206}$?

5.44. Радиоизотоп X_1 с постоянной распада λ_1 превращается в радиоизотоп X_2 с постоянной распада λ_2 . Считая, что в начальный момент препарат содержал только X_1 , найти промежуток времени, через который активность радиоизотопа X_2 достигла максимума.

5.45. Определить возраст древних деревянных изделий, если удельная активность изотопа ${}^{14}\text{C}$ у них составляет 3/5 удельной активности этого же изотопа в только что срубленных деревьях. Период полураспада ${}^{14}\text{C}$ равен 5570 лет.

5.46. Радиоизотоп испытывает превращения по схеме $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$ (стабилен) с соответствующими постоянными распада λ_1 и λ_2 . Считая, что в начальный момент препарат содержал только ядра изотопа X_1 в количестве N_{10} , найти закон накопления стабильного изотопа X_3 .

5.47. Активность некоторого препарата уменьшается в 2,5 раза за 7,0 дней. Определить период его полураспада.

5.48. Период полураспада изотопа полония ${}_{84}\text{Po}^{210}$ равен $T = 140$ суток. Определите массу свинца ${}_{82}\text{Pb}^{207}$, который образуется из $m = 1$ мг полония за $t = 70$ суток.

5.49. Первоначально покоившееся ядро полония ${}_{84}\text{Po}^{210}$ испустило α -частицу с кинетической энергией $T_\alpha = 5,3$ МэВ. Найти скорость отдачи дочернего ядра.

5.50. Определить количество тепла, которое выделяет $m = 1$ мг препарата ${}_{84}\text{Po}^{210}$ за период, равный среднему времени жизни этих ядер, если известно, что испускаемые α -частицы имеют энергию $E = 6,3$ МэВ и практически все дочерние ядра образуются непосредственно в основном состоянии.

5.51. α -распад ядер ${}_{84}\text{Po}^{210}$ (основное состояние) сопровождается испусканием двух групп α -частиц с кинетическими энергиями 5,30 и 4,50 МэВ. В результате испускания этих α -частиц дочерние ядра оказываются соответственно в основном и в возбужденном состояниях. Найти энергию γ -квантов, испускаемых возбужденными ядрами.

5.52. Вычислить с помощью табличных значений масс атомов энергии позитрона и нейтрона, испускаемых ядром ${}_{6}\text{C}^{11}$ в случае, если дочернее ядро не испытывает отдачи.

5.53. Период полураспада радиоактивного нуклида $T_{1/2} = 1$ ч. Определить среднюю продолжительность жизни τ этого нуклида.

5.54. За один год начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в три раза. Во сколько раз оно уменьшится за два года?

5.55. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния Mg^{27} массой $m = 0,2$ мг, а также его активность по истечении времени один час. Период полураспада $T_{1/2} = 9,5$ мин., молярная масса $M = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$.

5.56. Атомное ядро, поглотившее γ -фотон ($\lambda = 0,47$ пм), пришло в возбужденное состояние и распалось на отдельные нуклоны, разлетевшиеся в разные стороны. Суммарная кинетическая энергия нуклонов $T = 0,4$ МэВ. Определить энергию связи ядра.

5.57. Ядро бериллия ${}_{4}\text{Be}^7$ захватило электрон из K -оболочки атома. Какое ядро образовалось в результате K -захвата?

5.58. Ядро плутония ${}_{94}\text{Pu}^{238}$ испытало шесть последовательных α -распадов. Написать цепочку ядерных превращений с указанием химических символов, массовых, зарядовых чисел, промежуточных ядер и конечного ядра.

5.59. Покоившееся ядро радона ${}_{86}\text{Rn}^{220}$ выбросило α -частицу со скоростью $v = 1,6 \cdot 10^7$ м/с. В какое ядро превратилось ядро радона? Какую скорость v_1 получило оно в результате отдачи?

5.60. Какая доля начального количества радиоактивного вещества останется не распавшейся через 1,5 периода полураспада?

5.61. При нормальных условиях один грамм радия образует $\Delta V = 0,043$ см³ гелия в год. Определить период полураспада радия.

5.62. 1 г урана ${}_{92}\text{U}^{238}$ в равновесии с продуктами его распада выделяет мощность $1,07 \cdot 10^{-7}$ Вт. Найти полное количество тепла, выделяемое одним грамм-атомом урана за среднюю продолжительность жизни атома урана.

5.63. Освобождается или поглощается энергия при ядерной реакции ${}_{4}\text{Be}^9 + {}_1\text{p}^1 \rightarrow {}_5\text{B}^9 + {}_0\text{n}^1$?

5.64. При бомбардировке ядра ${}_{13}\text{Al}^{27}$ α -частицами получается радиоактивный изотоп фосфора ${}_{15}\text{P}^{30}$, который распадается с выделением позитрона. Написать уравнения обеих реакций.

5.65. При делении одного ядра урана U^{235} выделяется энергия 200 МэВ. Какую долю энергии покоя составляет выделившаяся энергия?

5.66. Освобождается или поглощается энергия при ядерной реакции ${}_{3}\text{Li}^7 + {}_1\text{H}^1 \rightarrow 2{}_2\text{He}^4$? Найти величину этой энергии.

5.67. Электрон и позитрон, имевшие одинаковые кинетические энергии, равные 0,24 МэВ, при соударении превратились в два одинаковых фотона. Определить энергию фотона и соответствующую ему длину волны λ .

5.68. α -частица с кинетической энергией T возбуждает реакцию ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$. Найти кинетическую энергию нейтрона, вылетевшего под прямым углом к направлению движения α -частицы. Массы покоя частиц считать известными.

5.69. Радиоактивное ядро магния Mg^{23} выбросило позитрон и нейтрино. Записать реакцию распада ядра Mg^{23} и определить энергию распада.

5.70. Какую энергию необходимо сообщить, чтобы при реакции ${}_{13}\text{Al}^{27}(\alpha, p){}_{14}\text{Si}^{30}$ подверглись превращению все ядра, находящиеся в 1 г алюминия?

5.71. При бомбардировке изотопа ${}_{3}\text{Li}^6$ дейтронами образуются две α -частицы. При этом выделяется энергия, равная 22,3 МэВ. Зная массы дейтрона и α -частицы, найти массу изотопа ${}_{3}\text{Li}^6$.

5.72. При бомбардировке изотопа ${}^6_3\text{Li}$ дейтронами образуются две α -частицы, разлетающиеся симметрично под углом φ к направлению скорости бомбардирующих дейтронов. Найти: 1) угол разлета φ ; 2) энергию образующихся α -частиц, если известно, что энергия бомбардирующих дейтронов равна 0,2 МэВ.

5.73. Изотоп ${}^3_2\text{He}$ получается бомбардировкой ядер трития ${}^3_1\text{H}$ протонами. Написать уравнение реакции, найти энергию этой реакции.

5.74. Найти наименьшее значение энергии γ -кванта, достаточное для осуществления реакции ${}^{24}_{12}\text{Mg}(\gamma, n)\text{Y}$.

5.75. Какое количество воды можно нагреть от 0°C до кипения, если использовать все тепло, выделяющееся при реакции ${}^7_3\text{Li}(p, \alpha)$ при полном разложении одного грамма лития?

5.76. Какое количество энергии в кВт-часах можно получить от деления 1 г урана ${}^{235}_{92}\text{U}$, если при каждом делении выделяется энергия, равная приблизительно 200 МэВ?

5.77. Определить энергию Q ядерной реакции $\text{Be}^9(n, \gamma)\text{Be}^{10}$, если известно, что энергия связи ядра Be^9 равна $E_{св} = 58,16$ МэВ, а ядра Be^{10} $E_{св} = 64,98$ МэВ.

5.78. При реакции $\text{Li}^6(p, \beta^+)\text{Li}^7$ освобождается энергия $Q = 5,028$ МэВ. Определить массу Li^6 . Массы остальных атомов взять из таблицы.

5.79. При ядерной реакции ${}^9\text{Be}(\alpha, n){}^{12}\text{C}$ освобождается энергия $Q = 5,70$ МэВ. Пренебрегая кинетическими энергиями ядер бериллия и гелия и принимая их суммарный импульс равным нулю, определить кинетические энергии T_C и T_n продуктов реакции.

5.80. Определить суммарную кинетическую энергию $T_{\text{ядер}}$, образовавшихся в результате реакции ${}^{13}\text{C}(D, \alpha){}^{11}\text{B}$, если кинетическая энергия T_D дейтрона равна 1,5 МэВ. Ядро-мишень ${}^{13}\text{C}$ считать неподвижным.

5.81. Определить энергию Q распада ядер углерода ${}^{10}_6\text{C}$, выбросившего позитрон и нейтрино.

5.82. Вычислить энергию, необходимую для разделения ядра Ne^{20} на две α -частицы и ядро C^{12} , если энергия связи на один нуклон в ядрах Ne^{20} , He^4 и C^{12} равны 8,03; 7,07 и 7,68 МэВ.

5.83. Вычислить в а.е.м. массу ядра C^{10} с энергией связи на один нуклон 6,04 МэВ.

5.84. Найти энергию реакции ${}^{14}\text{N}(\alpha, p){}^{17}\text{O}$, если кинетическая энергия налетающей α -частицы $T_\alpha = 4,0$ МэВ, а протон, вылетевший под углом $\varphi = 60^\circ$ к направлению движения α -частицы, имеет кинетическую энергию $T_p = 2,09$ МэВ.

5.85. Протоны, налетающие на неподвижную литиевую мишень, возбуждают реакцию ${}^7\text{Li}(p, n) {}^7\text{Be}$. При какой кинетической энергии протона возникший нейтрон может оказаться покоящимся?

5.86. Литиевую мишень бомбардируют протоны с кинетической энергией $T = 1,0$ МэВ. Происходит ядерная реакция $p + {}^7\text{Li} \rightarrow 2{}^4\text{He}$. Найти кинетическую энергию каждой α -частицы и угол между направлениями их разлета, если разлет произошел симметрично к направлению набегающих протонов.

5.87. Какую кинетическую энергию необходимо сообщить протону, чтобы он смог расщепить покоящееся ядро ${}^2\text{H}$, энергия связи которого $E_{\text{св}} = 2,2$ МэВ?

5.88. Определить массу атома, ядро которого, испуская α -частицу с энергией 5,46 МэВ, превращается в ${}_{84}\text{Po}^{218}$. Масса полония $M_{\text{Po}} = 218,07676$ а.е.м.

5.89. Определить энергию, освобождаемую при синтезе 1 кг гелия в термоядерной реакции ${}_1\text{H}^2 + {}_1\text{H}^3 \rightarrow {}_2\text{He}^4 + {}_0n^1$.

5.90. Определить энергию быстрых нейтронов, возникающих в результате реакции ${}_4\text{Be}^9 + {}_2\text{He}^4 \rightarrow {}_6\text{C}^{12} + {}_0n^1$.

5.91. Найти пороговую кинетическую энергию α -частицы для возбуждения реакции ${}^7\text{Li}(\alpha, n) {}^{10}\text{B}$.

5.92. Нейтроны с кинетической энергией $T = 10$ МэВ возбуждают реакцию ${}^{12}\text{C}(n, \alpha) {}^9\text{B}$, порог которой $E_{\text{пор}} = 6,17$ МэВ. Найти кинетическую энергию α -частиц, вылетающих под прямым углом к направлению падающих нейтронов.

5.93. Искусственный изотоп азота ${}^7\text{N}^{13}$ получается бомбардировкой ядер углерода ${}^6\text{C}^{12}$ дейтронами. Найти порог этой реакции. Найти суммарную кинетическую энергию продуктов этой реакции при пороговом значении кинетической энергии дейтронов. Ядра углерода считать неподвижными.

Ответы

Ответы к главе 1

- 1.25. $T = 648 \text{ К}$.
1.26. $T = 1 \text{ кК}$.
1.27. $W = 5,64 \text{ кДж}$.
1.28. $\Phi_e = 5,67 \cdot 10^{14} \text{ Вт}$.
1.29. $\Delta M_e / M_e = 0,04$.
1.30. в 1,19 раза.
1.31. $M_e = 64,2 \text{ МВт/м}^2$; $T = 5,8 \text{ кК}$.
1.32. $T = 396 \text{ К}$.
1.33. $M_e = a_T \cdot \sigma \cdot T^4 = 5,88 \text{ кВт/м}^2$; $W = M_e \cdot S \cdot t = 1,76 \text{ кДж}$.
1.34. $a_T = 0,953$.
1.35. $\eta = 1 - \sigma \cdot T^4 \cdot S / P = 0,71$.
1.36. $a_T = M_e / \sigma \cdot T^4 = 0,26$.
1.37. $T = \left(\frac{P}{4\pi \cdot a_T \cdot R^2 \cdot \sigma} \right)^{1/4} = 866 \text{ К}$.
1.38. $\lambda_{\max} = 10,6 \text{ мкм}$.
1.39. $\lambda_{\max} = 547 \text{ нм}$.
1.40. 3,8 кК; 7,6 кК.
1.41. 4,98 кК.
1.42. Увеличилась в 243 раза.
1.43. $T_1 = 3,62 \text{ кК}$; $T_2 = 7,24 \text{ кК}$.
1.44. $\lambda_{\max} = 1,45 \text{ мкм}$.
1.45. $(M_{\lambda T})_{\max} = 10,44 \cdot 10^{12} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{м}$.
1.46. Уменьшилась на $\Delta T = \Delta \lambda T_1^2 / (\Delta \lambda T_1 + b) = 300 \text{ К}$.
1.47. $C_V = \frac{16 \cdot \sigma \cdot T^3 \cdot V}{c} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ Дж/(К} \cdot \text{м}^3)$.
1.48. 4,1 млн. т/с. Около 10^{11} лет.
1.49. $T = \left(\frac{18\sigma\tau}{C_{\text{уд}}\rho d} - \frac{1}{T_0^3} \right)^{-\frac{1}{3}} = 103 \text{ К}$.
1.50. $N_1 = 6,2 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$; $N_2 = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$; $N_3 = 1,1 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$;
 $N_4 = 5,9 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$; $N_5 = 4,6 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$; $N_6 = 5,1 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$.
1.51. а) 2,07 эВ; $1,1 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$; $3,68 \cdot 10^{-36} \text{ кг}$; б) 12,4 кэВ;
 $6,62 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$; $2,21 \cdot 10^{-32} \text{ кг}$; в) 1,24 МэВ; $6,62 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$; $2,21 \cdot 10^{-30} \text{ кг}$.
1.52. а) 960 К; б) $1,6 \cdot 10^4 \text{ К}$; в) $1,6 \cdot 10^{10} \text{ К}$.
1.53. а) $5 \cdot 10^{19}$; б) 10^{13} .

- 1.54. $n = \frac{\lambda}{h} \sqrt{\frac{8m \cdot k \cdot T}{\pi}} = 7,6 \cdot 10^3$, m – масса атома гелия,
 k – постоянная Больцмана.
- 1.55. $T = \frac{\pi \cdot h^2}{8m \cdot k \cdot \lambda^2} = 745 \text{ K}$, m – масса нейтрона,
 k – постоянная Больцмана.
- 1.56. $\nu = 4,53 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$.
- 1.57. $E = \frac{h \cdot c}{b \cdot \sin \varphi} = 2,36 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$, $p = 1,26 \cdot 10^{-30} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$.
- 1.58. $E = \frac{h \cdot c}{d(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} = 2,07 \text{ эВ}$.
- 1.59. $F = 4 \text{ нН}$, $N_{\Phi} = 10^{19} \text{ фотонов}$.
- 1.60. $n_{\Phi} = \frac{p \cdot \lambda}{(1 + \rho) \cdot h \cdot c} = 2,52 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}$, $n_{1\Phi} = n \cdot c = 7,56 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$.
- 1.61. $P = 4,67 \text{ мкПа}$.
- 1.62. $I = 1,5 \text{ кВт} / \text{м}^2$.
- 1.63. $F = 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ Н}$.
- 1.64. $p = 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$.
- 1.65. $F = 2N/c = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$.
- 1.66. $N = 9 \cdot 10^{15}$.
- 1.67. $N_1 = 3,77 \cdot 10^{18}$.
- 1.68. $n = 10^{11} \text{ м}^{-3}$.
- 1.69. $p = 11 \text{ мкПа}$.
- 1.70. $p_1 = 0,7 \text{ мкПа}$; $p_2 = 0,35 \text{ мкПа}$.
- 1.71. $\lambda = 197 \text{ нм}$; $\lambda_0 = 175 \text{ нм}$.
- 1.72. $p_{\max} = 3,45 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$.
- 1.73. $\lambda_{0\text{Li}} = 893 \text{ нм}$; $\lambda_{0\text{Cs}} = 657 \text{ нм}$.
- 1.74. $\varepsilon_{\min} = 4,5 \text{ эВ}$.
- 1.75. $A_B = 4,5 \text{ эВ}$; $\nu_{\max} = 9,1 \cdot 10^5 \text{ м/с}$; $T_{\max} = 3,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.
- 1.76. а) для Cs: $\nu_{\max} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$; для Pt: $\nu_{\max} = 7,05 \cdot 10^5 \text{ м/с}$. б) для Cs:
 $\nu_{\max} = 6,05 \cdot 10^5 \text{ м/с}$; из Pt фотоэлектроны не вырываются.
- 1.77. $\varepsilon_{\min} = 2,15 \text{ эВ}$.
- 1.78. $U = 1,73 \text{ В}$.
- 1.79. $x = 1,37 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.
- 1.80. $\lambda = 24,2 \text{ пм}$.
- 1.81. $\varepsilon'_{\Phi} = 0,26 \text{ МэВ}$; $p'_{\Phi} = 9,3 \cdot 10^{-12} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$.
- 1.82. $\varepsilon'_e = 0,1 \text{ МэВ}$.
- 1.83. $\lambda' = 57 \text{ пм}$.
- 1.84. $\theta = 120^\circ$ или 240° .

- 1.85. $\varepsilon'_\Phi = 0,224 \text{ МэВ}; T = 0,176 \text{ МэВ}$.
- 1.86. $p'_e = 2,8 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$.
- 1.87. 0,5.
- 1.88. $\theta = 60^\circ 40'$.
- 1.89. $\varepsilon_\Phi = 0,37 \text{ МэВ}$.
- 1.90. 70%.
- 1.91. $\Delta\lambda_e = 0,048 \text{ \AA}$ и $\Delta\lambda_p = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}$.
- 1.92. $\theta = 90^\circ, T'_e = 24,0 \text{ кэВ}$.
- 1.93. $\varepsilon'_e = \frac{h \cdot c}{\lambda} \frac{2 \cdot \lambda_c \cdot \sin^2 \theta / 2}{\lambda + 2\lambda_c \cdot \sin^2 \theta / 2}, \lambda_c = \frac{h}{m_e \cdot c}, \varepsilon'_e = 118,184 \text{ кэВ}; 255 \text{ кэВ}$
и 0 кэВ.
- 1.94. $\theta = 50^\circ$.
- 1.95. $p'_e = 1,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$.
- 1.96. $\Delta\lambda = 0,0135 \text{ \AA}, \theta = 63^\circ 40'$.
- 1.97. $\text{tg} \varphi = \frac{\text{ctg} \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{h}{m_e c \lambda}}$.
- 1.98. $\theta + \varphi = 109^\circ 30'$.
- 1.99. $\lambda = \frac{h}{2m_e \cdot c} = 0,012 \text{ \AA}$.
- 1.100. $\varepsilon'_e = \frac{e \cdot V}{1 + \frac{2 \cdot e \cdot V}{m_{e0} \cdot c^2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}} - E = 31 \text{ кэВ}$.
- 1.101. $\lambda_f = 1,32 \text{ фм}; \varepsilon = 0,939 \text{ ГэВ}; p = 5,01 \cdot 10^{-19} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$.
- 1.102. а) $\lambda = 73,22 \text{ пм};$ б) $\lambda = 75,6 \text{ пм}$.
- 1.103. $\Delta\lambda = 2,42 \text{ пм}; T = 6,6 \text{ кэВ}; p'_E = 4,4 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$.
- 1.104. $\varepsilon_\Phi = \frac{\varepsilon'_\Phi}{1 - 2 \frac{\varepsilon'_\Phi}{\varepsilon_\nu} \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 1,85 \text{ МэВ}$.
- 1.105. 1) $\Delta\lambda_1 = 4,84 \text{ пм},$ 2) $\Delta\lambda_2 = 2,64 \text{ фм}$.

Ответы к главе 2

2.18. $\lambda = 2\pi\hbar/m_e v = 1,0 \text{ \AA}.$

2.19. $\frac{\lambda_e}{\lambda_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 43.$

2.20. $m = 2\pi^2\hbar^2/eU_0\lambda^2 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$

2.21. $\lambda_1 = 123 \text{ пм}, \lambda_2 = 2,86 \text{ пм}, \lambda_3 = 0,186 \text{ пм}.$

2.22. $\Delta E = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m_e} \left(\frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) = 0,45 \text{ кэВ}.$

2.23. $v = \frac{h}{m_e \lambda} = \frac{hk}{m_e 2d \sin \theta} = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$

2.24. $\lambda = \pi\hbar \sqrt{2(\eta^2 - 1)\Delta E m} = 0,15 \text{ нм}.$

2.25. $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2mkT} = 180 \text{ пм},$ где m - масса молекулы водорода.

2.26. $\lambda_1 = \lambda \sqrt{(n+1)/(n-1)} = 2,2 \text{ пм}.$

2.27. $v = 4\pi\hbar l/bm\Delta x = 10^6 \text{ м/с}.$

2.28. $T = \frac{2}{m} \left(\frac{\pi\hbar l}{d\Delta x} \right)^2 = 24 \text{ эВ}.$

2.29. $U_0 = \pi^2\hbar^2(\sqrt{\eta} - 1)^2 \sin^2 \theta / 2m_e d^2 = 150 \text{ В}.$

2.30. $d = \pi\hbar k / \sqrt{2mT} \cos \alpha / 2 = 0,21 \text{ нм}, (k = 4).$

2.31. $\lambda = h/eBR = 0,1 \text{ нм}.$

2.32. $\lambda = 6,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$

2.33. $T = (\sqrt{2} - 1)mc^2 = 0,21 \text{ МэВ}.$

2.34. $\lambda = 2\pi\hbar/\sqrt{2mT(1 + T/2mc^2)}.$

2.35. $\lambda = \lambda_k / \sqrt{1 + mc\lambda_k \pi\hbar} = 3,3 \text{ пм}.$

2.36. $T \leq 4m_e c^2 \Delta\lambda/\lambda = 20,4 \text{ кэВ}$ для электрона,

$T \leq 4m_p c^2 \Delta\lambda/\lambda = 37,5 \text{ МэВ}$ для протона,

2.37. $U_{Ag} = \frac{\pi^2\hbar^2 k^2}{2med^2} - U_0 \sin^2 \theta = 15 \text{ В}, k = 3.$

2.38. $E = 0,02 \text{ эВ}, T_1 = 2E/3k = 158 \text{ К}.$

2.39.1) $T = \hbar^2/2m\lambda^2 = 150 \text{ эВ};$ 2) $T = 1,2 \text{ ГэВ}.$

2.40. $d = \lambda/\sqrt{2} \sin \theta = 3,1 \text{ \AA}, \sin 2\theta = D/\sqrt{D^2 + l^2},$ θ - угол скольжения.

- 2.41. $R \approx n\lambda l/d$, где $\lambda = 2\pi\hbar/p = 2\pi\hbar/\sqrt{2mT}$.
 $R_1 = 2\pi\hbar l/a\sqrt{2mT} = 0,3 \text{ см}$ $R_2 = R_1\sqrt{2} = 0,42 \text{ см}$.
- 2.42. $\Delta v_x = \hbar/m\Delta x$ $\Delta v_1 = 10^4 \text{ см/с}$, $\Delta v_2 = 10 \text{ см/с}$, $\Delta v_3 = 10^{-20} \text{ см/с}$.
- 2.43. $\Delta v = 10^6 \text{ м/с}$, $v_1 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$.
- 2.44. $\Delta x = \hbar t/m\Delta x_0 \approx 10^4 \text{ м}$.
- 2.45. $\Delta x/\lambda = 100/2\pi = 16$.
- 2.46. $(\Delta p/p) \cdot 100\% = 16\%$.
- 2.47. $\Delta v/v = \hbar/m\Delta x v \approx 10^{-3}$. Траектория имеет смысл.
- 2.48. $T_{\min} \approx 2\hbar^2/ml^2 = 15 \text{ эВ}$, $\Delta x = l/2$, $p = \Delta p$.
- 2.49. $\Delta v/v = 2\hbar/\sqrt{2ml^2T} = 1,2 \cdot 10^{-4}$, $\Delta x = l/2$.
- 2.50. $T = \hbar^2/2mr^2 = 0,2 \text{ МэВ}$.
- 2.51. $T \approx 8 \cdot 10^4 \hbar^2/ml^2$, $\Delta x = l/2$.
- 2.52. $E_{\min} \approx 2\hbar^2/ml^2 = 15 \text{ эВ}$.
- 2.53. $l = 2\hbar/\sqrt{2mE} = 2,9 \cdot 10^{-15} \text{ м}$.
- 2.54. $\Delta x = c\tau = 3 \text{ м}$, $\Delta\lambda/\lambda \approx \lambda/2\pi c\tau \approx 3 \cdot 10^{-8}$.
- 2.55. $\Delta E \approx \hbar/\tau \approx 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ МэВ}$.
- 2.56. $\Delta x/\lambda \approx T/\pi\Delta T = 2 \cdot 10^{-3}$.
- 2.57. $\Delta\omega/\omega = 3 \cdot 10^{-8}$.
- 2.58. $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{bx^2}{2} \right) \psi = 0$.
- 2.59. $i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$.
- 2.60. $w(r) = \max$ при $r = r_1$.
- 2.61. $A = \sqrt[4]{\alpha/\pi}$.
- 2.62. $A = \sqrt{2/(b-a)}$.
- 2.63. $W = 0,238$.
- 2.64. $A = \sqrt{2/a}$.
- 2.65. $A = \sqrt{2/a^3}$.
- 2.66. $r = 2r_1$ и $r = 4r_1$.
- 2.67. $E = \hbar^2 k^2/2m$.
- 2.68. 1) $m = 5\pi^2\hbar^2/2l^2\Delta E$, 2) $n = (\eta+1)/2(\eta-1) = 3$.

$$2.69. W = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2(\pi x/l) dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,61.$$

$$2.70. l = 2/w_{\max}, E = (\pi\hbar w_{\max})^2/8m.$$

$$2.71. E_n = \pi^2\hbar^2 n^2/2ml^2.$$

$$2.72. \Delta E_{n+1,n}/E_n = (2n+1)/n^2, 1) 0,78, 2) 0,21, 3) 0. \text{ При малых дискретность проявляется отчетливо, при больших – нет.}$$

$$2.73. \Delta E_{\min} = 4,48 \text{ эВ.}$$

$$2.74. C = \sqrt{2/l}.$$

2.75.

$$1) C_1 = -C_2 = 1/\sqrt{2l}, 2) E_n = \pi^2\hbar^2 n^2/2ml^2, 3) \psi_n(x) = \sqrt{2/l} \sin(n\pi x/l).$$

$$2.76. W = 0,475.$$

$$2.77. W_1/W_2 = 5,22.$$

$$2.78. \langle x \rangle = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin^2(n\pi x/l) dx = \frac{1}{l} \int_0^l x \{1 - \cos(2n\pi x/l)\} dx = \frac{l}{2}.$$

$$2.79. B_1/A_1 = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2), A_2/A_1 = 2k_1/(k_1 + k_2).$$

$$2.80. R = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2, D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

$$2.81. \lambda_2 = \lambda_1 / \sqrt{1 - mU_0 \lambda_1^2 / 2\pi^2 \hbar^2} = 218 \text{ пм.}$$

$$2.82. W = 0,0625.$$

$$2.83. n = \sqrt{1 + U/E} = 1,25.$$

$$2.84. (U_0/T) \cdot 100\% = 2\%.$$

$$2.85. R = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2.$$

$$2.86. U_0 = 9,13 \text{ эВ.}$$

$$2.87. R = 0,0295, D = 0,97.$$

$$2.88. T/U_0 = 1,03.$$

$$2.89. D = \frac{4n}{(1+n)^2}.$$

$$2.90. n_{12} = 0,384, n_{21} = 2,61.$$

$$2.91. D = 0,2.$$

$$2.92. A_2/A_1 = 2k_1/(k_1 + k).$$

$$2.93. 1) D = 0,2, 2) D = 6,5 \cdot 10^{-3}.$$

$$2.94. W_1/W_2 = 79.$$

$$2.95. d = 0,143 \text{ нм.}$$

$$2.96. U_0 - E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar \ln(1/D)}{2d} \right)^2 = 0,45 \text{ эВ}.$$

$$2.97. W = 0,2.$$

$$2.98. U_0 - E = 10^{-4} \text{ эВ}.$$

Ответы к главе 3

$$3.18. R = 22/15\Delta\lambda = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}.$$

$$3.19. U_1 = 40,8 \text{ В}, U_2 = 91,8 \text{ В}.$$

$$3.20. n = 3.$$

$$3.21. \lambda_{\text{д}} = 4/3R_{\lambda} = 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \lambda_{\text{к}} = 1/R_{\lambda} = 0,91 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$3.22. \varphi_{\text{ион}} = 122 \text{ В}$$

$$3.23. \lambda_{32} = 36/5R_{\lambda} = 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \lambda_{21} = 4/3R_{\lambda} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м}. \text{ Замечание:}$$

правило отбора разрешает переходы, где $\Delta l = \pm 1$.

$$3.24. \text{ а) } \lambda = 30,4 \text{ нм; б) } \lambda = 13,5 \text{ нм}.$$

$$3.25. n = 3; \lambda_1 = 1026 \text{ \AA}; \lambda_2 = 1215 \text{ \AA} \text{ и } \lambda_3 = 6560 \text{ \AA}.$$

$$3.26. \lambda_1 = 656,3 \text{ нм}; \lambda_2 = 121,6 \text{ нм} \text{ и } \lambda_3 = 102,6 \text{ нм}.$$

$$3.27. \varphi_{\text{ион}} = 54,4 \text{ В}$$

3.28. Три линии, принадлежащие серии Лаймана.

$$3.29. n = 4.$$

$$3.30. E = -0,544 \text{ эВ}, n = 5.$$

$$3.31. 3970 \text{ \AA}; 7,55 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}.$$

$$3.32. E_{\text{ион}} = 3hc/4\lambda_1 = 13,6 \text{ эВ}.$$

3.33. Первые две - серии Бальмера ($7 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 2$),
последняя - серии Пашена ($10 \rightarrow 3$).

$$3.34. \hbar = \left(\frac{15 \cdot \Delta\lambda}{5632} \cdot \frac{m \cdot e^4}{\pi^3 \cdot \epsilon_0^2 \cdot c} \right)^{1/3} \approx 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

$$3.35. n = 2 \cdot \sqrt{\frac{R \cdot d \cdot \sin \varphi}{R \cdot d \cdot \sin \varphi - 4\kappa}} = 4.$$

$$3.36. v = 7 \cdot 10^5 \text{ м/с} \text{ относительно ядра}.$$

$$3.37. \text{ Скорость отдачи атома } v = 3h \cdot R / 4M = 3,26 \text{ м/с}. M - \text{ масса атома}.$$

$$3.38. T_e = E_{\text{возб He}} - E_{\text{ион H}} = 40,8 - 13,6 = 27,2 \text{ эВ}.$$

$$3.39. \lambda_{43} = 144/7R_{\lambda} = 1,87 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \lambda_{32} = 36/5R_{\lambda} = 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

$$\lambda_{21} = 4/3R_{\lambda} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м}. \text{ Замечание: правило отбора разрешает}$$

переходы, где $\Delta l = \pm 1$.

- 3.40. $v = 3,26 \text{ м/с}$
- 3.41. $v = 8,18 \cdot 10^5 \text{ м/с}$
- 3.42. $v = \frac{R_v}{4} + \frac{mv^2}{2h} = 1,07 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$
- 3.43. $\Delta L = \pm\sqrt{2}\hbar, \pm\hbar(\sqrt{2} - \sqrt{6}), \pm\hbar(\sqrt{6} - \sqrt{12})$.
- 3.44. $L = \hbar\sqrt{12}; L_{Z_{\max}} = 3\hbar$.
- 3.45. $E_{2p} = -3,38 \text{ эВ}; L = \hbar\sqrt{2} = 1,48 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$
 $L_z = \hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$
- 3.46. $0,91 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}; 2,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$
- 3.47. $\varphi = 28,12^\circ$.
- 3.48. $2p$.
- 3.49. $32; 2,04 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}; 0,91 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$
- 3.50. Во всех nS - состояниях $L = 0$.
- 3.51. Во всех $-nP$ состояниях $L = \hbar\sqrt{2} = 1,5 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$
- 3.52. $0; \pm 1,55 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}, \pm 2,11 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$
- 3.53. $\Delta L = 1,49 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$
- 3.54. $p_m = 1,61 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{Тл}.$
- 3.55. $E = -3,4 \text{ эВ}.$
- 3.56. $L = 1,5 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
- 3.57. $p_m = 1,31 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{Тл}$
- 3.58. $C = 1/\sqrt{\pi a^3}.$
- 3.59. $r = \pi \epsilon_0 \hbar^2 / m e^2.$
- 3.60. $W_1/W_2 = 0,825$
- 3.61. $W_1 = 0,324, W_2 = 0,676, W_2/W_1 = 2,09$
- 3.62. $\langle r \rangle = 3/2a.$
- 3.63. $\Delta p_m = -\mu_A \sqrt{2} = -1,31 \cdot 10^{-23} \text{ Äæ} / \text{Öë}$
- 3.64. $W = \int_0^{0,1a} \left| \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \right|^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 1,13 \cdot 10^{-3}$
- 3.65. а) 9, б) 2, в) 3, г) 5.
- 3.66. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3, N = 15.$
- 3.67. $N = 46.$
- 3.68. а) 7, б) 3
- 3.69. ${}^2S_{1/2}, {}^3P_{1/2,3/2}, {}^2D_{3/2,5/2}.$
- 3 70. $2 s$ –электрона; $2 s$ –электрона, $6 p$ –электронов;
 $2 s$ –электрона, $6 p$ –электронов, $10 d$ –электронов.
- 3.71. 1) $j = 1, 2, 3; L_j = \hbar\sqrt{2}, \hbar\sqrt{6}, \hbar\sqrt{12},$

- 2) $j = 2, 3, 4; L_j = \hbar\sqrt{6}, \hbar\sqrt{12}, \hbar\sqrt{20}$.
- 3.72. 1) 9; 2) 4; 3) 2; 4) 3; 5) 5.
- 3.73. 1) $1s^2 2s^2 2p^1$; 2) $1s^2 2s^2 2p^2$; 3) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$.
- 3.74. 1) $3/2, 5/2, 7/2, 9/2$; 2) 1,2,3,4,5; 3) $1/2, 3/2, \dots, 11/2$; 4) 1,2,...,7.
- 3.75. 1) $^2S_{1/2}$; 2) 1S_0 ; 3) $^2S_{1/2}$; 4) 1S_0 ; 5) $^2P_{1/2}$.
- 3.76. 1) $^2S_{1/2}$; 2) $^2P_{1/2}, ^2P_{3/2}$; 3) $^4P_{1/2}, ^4P_{3/2}, ^4P_{3/2}, ^4P_{5/2}$; 4) $^5D_0, ^5D_1, ^5D_2, ^5D_3, ^5D_3, ^5D_4$.
- 3.77. 1) 4; 2) 7; 3) 7.
- 3.78. 1) 2; 2) 1,3; 3) 2,4; 4) 1,3,6; 5) 2,4,6.
- 3.79. $^3P_3, ^5D_3, ^5F_3, ^5G_3, ^5H_3$.
- 3.80. $^3P_{1/2,3/2}; ^2D_{5/2,3/2}; ^2F_{7/2,5/2}$.
- 3.81. 10.
- 3.82. $\Delta E_{\text{св}} = 5,75$ кэВ.
- 3.83. Li, Na.
- 3.84. Al: $\lambda = 6,7 \text{ \AA}; \varepsilon_f = 3 \cdot 10^{-16}$ Дж; Co: $\lambda = 1,56 \text{ \AA}; \varepsilon_f = 12 \cdot 10^{-16}$ Дж;
- 3.85. $U = 54,4$ кВ.
- 3.86. $T_e = 2,45$ кэВ.

Ответы к главе 4

- 4.15 1) $\frac{\lambda_e}{d} = \frac{h}{m_e v d} = 8$. 2) нужно
- 4.16 $\lambda = \frac{2d \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \frac{\alpha}{2}}} = 1,74 \text{ \AA}$.
- 4.17 $\theta = 60,5^\circ$
- 4.18 $v = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \approx 10^5$ м/с
- 4.19 $E_{\text{max}} = 5,49$ эВ; $v_{\text{max}} = 1,39 \cdot 10^6$ м/с.
- 4.20 $E_F = 11,55$ эВ; $v_{\text{max}} = 2 \cdot 10^6$ м/с.
- 4.21 $n_1/n_2 = 1,8$.
- 4.22 Число свободных электронов, приходящихся на один атом натрия, 0,995.
- 4.23 $n = 1,66 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.
- 4.24 $E_{\text{max}} = 4,68$ эВ; $T_0 = 5,43 \cdot 10^4$ К.
- 4.25 $T = 2,51 \cdot 10^4$ К.

- 4.26 $f(E, T) = 0,6$.
- 4.27 Уменьшится в $\sim 1,08$ раза.
- 4.28 $T = 1491$ К.
- 4.29 При $T_1=300$ К; $f_1(E, T_1) = 0,128$; $f_2(E, T_1) = 0,87$; при $T_2=60$ К;
 $f_1(E, T_2) = 6,8 \cdot 10^{-5}$; $f_2(E, T_2) = 1$.
- 4.30 $\Delta E_1 = 2,2 kT$; $\Delta E_2 = -2,2 kT$.
- 4.31 1) $T = 572$ К, 2) При любой температуре.
- 4.32 $\langle E \rangle = 4,8$ эВ.
- 4.33 $E_{max} = 2,029$ эВ; $\langle E \rangle = 1,217$ эВ.
- 4.34 $E_{max} = 7$ эВ.
- 4.35 $T = 394$ К.
- 4.36 Не зависит. $\langle E \rangle = 3$ эВ.
- 4.37 $T = 3,3 \cdot 10^4$ К.
- 4.38 $N = 3 \cdot 10^{23}$ электронов.
- 4.39 $\eta = \frac{\Delta N}{N_{max}} = (1 - 0,5^{3/2}) = 0,65$.
- 4.40 $\langle \Delta E_1 \rangle = 2 \cdot 10^{-23}$ эВ, $\langle \Delta E_2 \rangle$ уменьшается в η раз.
- 4.41 $\eta = \frac{\Delta N_i}{\Delta N_{max}} = (1 - 0,6^{3/2}) = 0,54$.
- 4.42 $E = E_F(1 - 0,54)^{2/3} = 2,8$ эВ.
- 4.43 $E = E_F(1 - 0,5)^{2/3} = 3,44$ эВ.
- 4.44 $\Delta N_1 / \Delta N_2 = 0,65$.
- 4.45 $\frac{n_1}{n_2} = \frac{1 - (1 - 0,02)^{2/3}}{(0,5)^{3/2}} = 0,086$.
- 4.46 $\frac{n_1}{n_2} = \frac{[1 - (1 - 0,04)^{3/2}]}{(0,04)^{3/2}} = 7,424$.
- 4.47 $\frac{\Delta n}{n} = 1 - (1 - \eta)^{3/2} = 0,03$.
- 4.48 $T = \frac{2E_F}{5k} = 25434$ К.
- 4.49 $\langle v \rangle = 1,18 \cdot 10^6$ м/с.
- 4.50 $\langle v \rangle = 1,05 \cdot 10^6$ м/с.
- 4.51 $\langle v_{KB} \rangle = 1,14 \cdot 10^6$ м/с.
- 4.52 $\langle v_{KB} \rangle = 9,9 \cdot 10^5$ м/с, $v_{max} = 1,27 \cdot 10^6$ м/с.
- 4.53 $dn(v) = \frac{m^3}{\pi^2 h^3} v^2 dv$; $\frac{\Delta n_1}{n} = 0,03$.

- 4.54 $\frac{n_1}{n_2} = 7.$
- 4.55 $\frac{n}{V} = 1,423 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}.$
- 4.56 $\Delta N/N = 0,56.$
- 4.57 $\sigma = 2,26 \text{ СМ/М}.$
- 4.58 $\rho \cong 208 \text{ Ом}\cdot\text{М}.$
- 4.59 $n = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$
- 4.60 $\mu_p = 0,52 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ при $n = 4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$
- 4.61 1) $n_p = 1,47 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3};$ 2) $\frac{j_n}{j_{n+p}} = 0,74.$
- 4.62 $R_0 = \frac{R}{1 - q_e \Delta n (\mu_n + \mu_p) l R} = 360 \text{ Ом}.$
- 4.63 $R = 1330 \text{ Ом}.$
- 4.64 $\rho_2 = \rho_1 \exp\left[\frac{E_F}{k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\right] = 1,07 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}\cdot\text{М}.$
- 4.65 $\sigma_2/\sigma_1 = \exp(4,83) = 125,7.$
- 4.66 $\frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\Delta E_3 \Delta T}{2kT_1 T_2}\right) = 3,315.$
- 4.67 $\Delta E_3 = \frac{2kT_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{R_1}{R_2}.$
- 4.68 $T_2 = \frac{\Delta E_3 T_1}{\Delta E_3 - 2kT_1 \ln 2} = 308 \text{ К}.$
- 4.69 $v_{\text{кп}} = 2,6 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}.$
- 4.70 $n = 1,36 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}; \mu_n = 0,306 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с}).$
- 4.71 $\mu_n = 0,37 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с}).$
- 4.72 $\sigma = 6,98 \cdot 10^2 \text{ СМ/М}.$
- 4.73 $U_x = 1,2 \text{ В}.$
- 4.74 1) $n_p = 3,69 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3};$ 2) $\mu_p = 0,85 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с}).$
- 4.75 1) $n_e = \frac{BUa}{q_e l \rho \Delta \phi_x} = 5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$
- 2) $\mu_e = \frac{q_e \Delta \phi_x}{BUa} = 0,05 \text{ м}^2 / (\text{В}\cdot\text{с}).$
- 4.76 $n = \frac{3\pi Bja}{8q_e \Delta \phi_x} = 4,2 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}.$

- 4.77 $c_{\text{уд.железа}} = 2,7 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$.
- 4.78 $c_{\text{уд}2}/c_{\text{уд}1} = 62,6$.
- 4.79 $c_{\text{уд}} = 1,08 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$.
- 4.80 $M = 0,107 \text{ кг/моль}$, материал – серебро.
- 4.81 $\Delta T = 66,43 \text{ К}$.
- 4.82 Да. Так как при этих температурах $c \sim T^3$. $\theta = 409,46 \text{ К}$.
- 4.83 1) $E_{\text{max}} = 6,45 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; 2) $p_{\text{max}} = 3,57 \cdot 10^{-24} \text{ (кг}\cdot\text{м)}/\text{с}$.
3) $\lambda \text{ фотона} = 3,08 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.
- 4.84 $\Delta U = \frac{m}{M} C_v(T) \cdot \Delta T = 411,6 \text{ Дж}$.
- 4.85 $\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{8\pi^2}{9\theta} \left[\frac{k}{4E_F} T_0^2 + \frac{3\pi^2}{5\theta^3} (30^4 - T_0^4) \right] = 0,0124$, $T_0 = 3 \text{ К}$.
- 4.86 $v_{\text{max}} = 4,1 \cdot 10^{13} \text{ Гц}$.
- 4.87 1) $\omega_{\text{max}} = 1,05 \cdot 10^{14} \text{ рад/с}$; 2) $v = 3,6 \cdot 10^3 \text{ м/с}$.
- 4.88 $\theta = 164 \text{ К}$.
- 4.89 $\Delta U = \frac{m}{M} C_v(T_1) \cdot \Delta T = 586,57 \text{ Дж}$.
- 4.90 $\theta = \sqrt[3]{\frac{3m\pi^4 R(T_2^4 - T_1^4)}{5MQ}} = 331,27 \text{ К}$.
- 4.91 $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{5kT_2^2\theta^3}{12E_F\pi^2(T_4^4 - T_3^4)} = 1,26 \cdot 10^{-2}$.
- 4.92 $\frac{Q_1}{Q_2} = 9,99 \cdot 10^{-2}$; $\frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = \frac{\pi^4(T_2^4 - T_1^4)}{5\Delta T \cdot \theta^3}$.
- 4.93 1) $\omega_{\text{max}} = \sqrt[3]{\frac{18\pi^2 n}{v_{\parallel}^{-3} + v_{\perp}^{-3}}} = 6,13 \cdot 10^{13} \text{ рад/с}$. 2) $\theta =$
 $466,41 \text{ К}$.
- 4.94 1) $E_{\text{max}} = 2,86 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$; 2) $\theta = 207 \text{ К}$; 3) $\lambda = 6,95 \cdot 10^{-5} \text{ м}$.
- 4.95 1) $v = \frac{k\theta}{\hbar} \sqrt[3]{\frac{M}{6\pi^2 \rho N_A}} = 2622 \text{ м/с}$.
- 2) $\lambda_{\text{min}} = 2d = 2\sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}} = 0,46 \text{ нм}$.

Ответы к главе 5

- 5.12. $m = 7,014 \text{ а.е.м.} = 6533,88 \text{ МэВ.}$
- 5.13. $m_e / m_a = 2 \cdot 10^{-20} \%$.
- 5.14. ${}_1\text{H}^3; {}_3\text{Li}^7; {}_7\text{N}^{15}.$
- 5.15. 5,2 ФМ; 7,8 ФМ; 10,4 ФМ; 13 ФМ; 15,6 ФМ.
- 5.16. $d_K = 8,7 \cdot 10^{-15} \text{ м, } d_{Zn} = 1,03 \cdot 10^{-14} \text{ м, } \sigma_1 / \sigma_2 \cong 0,71.$
- 5.17. $V_{Я} / V_a = 2,49 \cdot 10^{-14}.$
- 5.18. $\langle \rho_{Я} \rangle \cong 0,18 \cdot 10^{18} \text{ кг/м}^3.$
- 5.19. $F_1 = 0,59 \cdot 10^{-33} \text{ Н, } F_2 = 0,18 \cdot 10^3 \text{ Н, } F_2 / F_1 = 0,312 \cdot 10^{36}.$
- 5.20. $\Delta m = 4 \cdot 10^{-30} \text{ кг; } E_{CB} = 2,24 \text{ МэВ.}$
- 5.21. $E_{уд} = 7,42 \text{ МэВ/нуклон.}$
- 5.22. $\sigma_1 / \sigma_2 = 3,36.$
- 5.23. $\Delta E_{уд,1} = 2,839 \text{ МэВ/нуклон, } \Delta E_{уд,2} = 2,584 \text{ МэВ/нуклон;}$
 ${}_1\text{H}^3$ более устойчиво.
- 5.24. $M_a = 3,0141 \text{ а.е.м.}$
- 5.25. $M_a = 5,0113 \text{ а.е.м.}$
- 5.26. $E_{min} = 39,27 \text{ МэВ.}$
- 5.27. $E_{min} = 10,55 \text{ МэВ.}$
- 5.28. $E_{min} = 15,45 \text{ МэВ.}$
- 5.29. $E_{уд} = 5,376 \text{ МэВ/нуклон.}$
- 5.30. $E_{min} = 7,3 \text{ МэВ.}$
- 5.31. $E_{cb} = 28,4 \text{ МэВ, } \Delta m = 0,03 \text{ а.е.м.}$
- 5.32. $E_{уд} = 8,2 \text{ МэВ/нуклон.}$
- 5.33. $\delta = 0,71.$
- 5.34. $t = 963 \text{ с.}$
- 5.35. $A(0) = 1,1 \cdot 10^{13} \text{ Бк.}$
- 5.36. $\Delta t \cong 9,96 \text{ час.}$
- 5.37. $\Delta N / N = 10^{-4}.$
- 5.38. 10^6 атомов.
- 5.39. Возраст руды $\sim 2 \cdot 10^9$ лет.
- 5.40. $A_{уд} = \frac{N_A \ln 2}{MT_{1/2}} = 3,38 \frac{\text{мк} \cdot \text{Ки}}{\text{кг}}.$
- 5.41. $m_U = \frac{m_{Sr} M_U T_U}{M_{Sr} T_{Sr}} = 425 \text{ кг.}$
- 5.42. $T_{1/2} = 6 \text{ час.}$
- 5.43. $N_\alpha = 8, N_\beta = 6.$
- 5.44. $\Delta t = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln(\lambda_1 / \lambda_2).$

- 5.45. $t = 4104,9$ года.
- 5.46.
$$N_3(t) = N_{10} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right)$$
- 5.47. $T_{1/2} = 5,3$ дней.
- 5.48. $m = 2,9 \cdot 10^{-7}$ кг.
- 5.49. $v_\alpha = 3 \cdot 10^5$ м/с.
- 5.50. $Q = 1,862$ МДж.
- 5.51. $E_\gamma = 0,0155$ МэВ.
- 5.52. $E_n = 930,9$ МэВ; $E_{e^+} = -7,6$ МэВ.
- 5.53. $\tau = 86,5$ мин.
- 5.54. $\eta = 9$.
- 5.55. $A(0) = 3 \cdot 10^{14}$ Бк/мин, $A(\Delta t) = 0,4 \cdot 10^{13}$ Бк/мин.
- 5.56. $E_{\text{св.}} = 2,24$ МэВ.
- 5.57. ${}^7_3\text{Li}$.
- 5.58. Самостоятельно.
- 5.59. ${}^{216}_{84}\text{Po}$; $v_{\text{Po}} = 2,96 \cdot 10^5$ м/с.
- 5.60. $\Delta N/N = 0,35$.
- 5.61. $T_{1/2} = 1579,36$ лет.
- 5.62. $Q = 3,296 \cdot 10^{12}$ Дж.
- 5.63. Поглощается. $Q = 933,49$ МэВ.
- 5.64. Самостоятельно.
- 5.65. $E/E_0 = 10^{-3}$.
- 5.66. Выделяется. $Q = 17,35$ МэВ.
- 5.67. $E_\gamma = 0,75$ МэВ, $\lambda = 1,65$ пм.
- 5.68.
$$T_n = \frac{T(1 - m_\alpha / m_C) + (m_{\text{Be}} + m_\alpha - m_C - m_n)c^2}{1 + m_n / m_C}$$
- 5.69. $E = 3,55$ МэВ.
- 5.70. $E = Q \frac{m}{\mu} N_A = 1,35 \cdot 10^{23}$ МэВ.
- 5.71. $m_{\text{Li}}^6 = 6,0134$ а.е.м.
- 5.72. $\cos \varphi = \sqrt{\frac{m_d T_d}{4m_\alpha T_\alpha}} = 0,045$; $\varphi = 87,4^\circ$. $T_\alpha = \frac{T_d + Q}{2} = 11,29$ МэВ.
- 5.73. С поглощением. $Q = -1,28$ МэВ.
- 5.74. $E_\gamma = 9,45$ МэВ.
- 5.75. $m_{\text{H}_2\text{O}} = 5,53 \cdot 10^5$ кг.
- 5.76. $Q = 2,3 \cdot 10^4$ кВт·час.
- 5.77. $Q = 6,82$ МэВ.
- 5.78. $m = 6,01514$ а.е.м.
- 5.79. $T_C = 5,26$ МэВ; $T_n = 0,44$ МэВ.

- 5.80. $T_{\text{Я}} = 6,7 \text{ МэВ}$.
- 5.81. $Q = -11 \text{ МэВ}$.
- 5.82. $E = 11,9 \text{ МэВ}$.
- 5.83. $m_C = 10,0135 \text{ а.е.м.}$
- 5.84. $Q = \left(1 + \frac{m_p}{m_0}\right) T_p - \left(1 - \frac{m_\alpha}{m_0}\right) T_\alpha - 2\sqrt{\frac{m_p m_\alpha}{m_0^2}} T_p T_\alpha \cdot \cos\theta = -1,2 \text{ МэВ}$.
- 5.85. $T_p = -2,15 \text{ МэВ}$.
- 5.86. $T_\alpha = 9,1 \text{ МэВ}$; $\varphi = 170,5^\circ$.
- 5.87. $T_p \geq \frac{E_{CB}(m_p + m_{H^2})}{m_{H^2}} = 3,3 \text{ МэВ}$.
- 5.88. $m_a = (m_{p_0} + m_\alpha) \left(1 + \frac{T}{931,5 \cdot m_{p_0}}\right) = 222,0842 \text{ а.е.м.}$
- 5.89. $Q = \frac{m_{\text{He}}}{\mu_{\text{He}}} N_A Q_1 = 4,23 \cdot 10^{14} \text{ Дж}$.
- 5.90. $T_n = \frac{m_C(m_\alpha + m_{\text{Be}} - m_n - m_C)}{m_\alpha + m_C} \cdot 931,5 \text{ МэВ} = 5,28 \text{ МэВ}$.
- 5.91. $T_{\text{ИОП},\alpha} = \frac{m_\alpha + m_{\text{Li}}}{m_{\text{Li}}} \cdot |Q| = 4,39 \text{ МэВ}$.
- 5.92. $T_\alpha = \frac{1}{m_\alpha + m_{\text{Be}}} \left[T(m_{\text{Be}} - m_n) - \frac{m_C m_{\text{Be}}}{m_n + m_C} E_{\text{ИОП}} \right] = 2,2 \text{ МэВ}$.
- 5.93. $E_{\text{ИОП}} = 0,93 \text{ МэВ}$, $E_{\text{сум}} = Q + E_{\text{ИОП}} = 0,13 \text{ МэВ}$.

Приложения

Приложение 1

Масса нейтральных атомов

Элемент	Порядковый номер	Изотоп	Масса, а.е.м.
(Нейтрон)	0	n	1,00867
Водород	1	^1H	1,00783
		^2H	2,01410
		^3H	3,01605
Гелий	2	^3He	3,01603
		^4He	4,00260
Литий	3	^6Li	6,01513
		^7Li	7,01601
Бериллий	4	^7Be	7,01693
		^9Be	9,01219
		^{10}Be	10,01354
Бор	5	^9B	9,01333
		^{10}B	10,01294
		^{11}B	11,00931
Углерод	6	^{10}C	10,00168
		^{11}C	11,00114
		^{12}C	12,00000
		^{13}C	13,00335
		^{14}C	14,00324
Азот	7	^{13}N	13,00574
		^{14}N	14,00307
		^{15}N	15,00011
Кислород	8	^{16}O	15,99491
		^{17}O	16,99913
		^{18}O	17,99916
Фтор	9	^{19}F	18,99840
Натрий	11	^{22}Na	21,99444
		^{23}Na	22,98977
Магний	12	^{23}Mg	22,99414
		^{24}Mg	23,99267
Алюминий	13	^{27}Al	26,9815
		^{30}Al	29,99817
Кремний	14	^{30}Si	29,9833
		^{31}Si	29,97535
Фосфор	15	^{31}P	30,97376
Калий	19	^{41}K	40,96184
Кальций	20	^{44}Ca	43,95549
Свинец	82	^{206}Pb	205,97446
Полоний	84	^{210}Po	209,98297

Приложение 2
Масса и энергия покоя элементарных частиц и легких ядер

Частица	Масса		Энергия	
	m_0 , кг	m_0 , а.е.м.	E_0 , Дж	E_0 , МэВ
Электрон	$9,11 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Нейтральный мезон	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14526	-	135
Протон	$1,67 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,68 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1876
α -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3733

Приложение 3
Период полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ изотопа	Тип распада	Период полураспада
Актиний	${}_{89}^{235}\text{Ac}$	α	10 суток
Йод	${}_{53}^{131}\text{J}$	β^- , γ	8 суток
Иридий	${}_{77}^{192}\text{Ir}$	β^- , γ	75 суток
Кобальт	${}_{27}^{60}\text{Co}$	β^- , γ	5,3 года
Магний	${}_{12}^{27}\text{Mg}$	β^-	10 мин.
Радий	${}_{88}^{219}\text{Ra}$	α	10^{-3} с
	${}_{88}^{226}\text{Ra}$	α , γ	$1,62 \cdot 10^3$ лет
Радон	${}_{86}^{222}\text{Rn}$	α	3,8 суток
Стронций	${}_{38}^{90}\text{Sr}$	β^-	28 лет
Торий	${}_{90}^{229}\text{Th}$	α , γ	$7 \cdot 10^3$ лет
Уран	${}_{92}^{238}\text{U}$	α , γ	$4,5 \cdot 10^9$ лет
Фосфор	${}_{15}^{32}\text{P}$	β^-	14,3 суток
Натрий	${}_{11}^{22}\text{Na}$	γ	2,6 года

Приложение 4

Таблица интегралов

$$\int_0^{\infty} \frac{x \cdot dx}{e^x - 1} = \frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \cdot dx}{e^x - 1} = 0,225$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cdot dx}{e^x - 1} = 2,405$$

$$\int_0^2 \frac{x^3 \cdot dx}{e^x - 1} = 1,18$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \cdot dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} = 6,494$$

Приложение 5

Формулы для приближенных вычислений

Если $x \ll 1$, то в первом приближении можно принять

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x,$$

$$(1 \pm x)^2 = 1 \pm 2x,$$

$$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x,$$

$$e^x = 1 + x,$$

$$\ln(1 + x) = x.$$

Варианты расчетных работ

Вар. №	1.Основы квантовой оптики	2.Основы квантовой механики	3.Основы квантовой физики атомов и молекул
1	1.26. 1.42. 1.72	2.71. 2.41. 2.51	3.31. 3.41. 3.71
2	1.27. 1.53. 1.73	2.72. 2.42. 2.52	3.32. 3.42. 3.72
3	1.28. 1.44. 1.74	2.73. 2.43. 2.53	3.33. 3.43. 3.73
4	1.29. 1.55. 1.75	2.74. 2.44. 2.54	3.34. 3.44. 3.74
5	1.30. 1.46. 1.76	2.75. 2.45. 2.55	3.35. 3.45. 3.75
6	1.31. 1.106. 1.77	2.76. 2.46. 2.56	3.36. 3.46. 3.76
7	1.32. 1.48. 1.78	2.77. 2.47. 2.57	3.37. 3.47. 3.77
8	1.33. 1.105. 1.79	2.18. 2.48. 2.58	3.18. 3.48. 3.78
9	1.34. 1.50. 1.80	2.19. 2.49. 2.59	3.19. 3.49. 3.79
10	1.35. 1.104. 1.81	2.20. 2.50. 2.30	3.20. 3.50. 3.80
11	1.36. 1.52. 1.82	2.21. 2.91. 2.41	3.21. 3.51. 3.81
12	1.37. 1.103. 1.83	2.22. 2.52. 2.72	3.22. 3.52. 3.82
13	1.38. 1.54. 1.84	2.23. 2.93. 2.73	3.23. 3.53. 3.83
14	1.39. 1.102. 1.85	2.24. 2.54. 2.74	3.24. 3.54. 3.84
15	1.40. 1.56. 1.86	2.25. 2.95. 2.75	3.25. 3.55. 3.85
16	1.41. 1.57. 1.87	2.26. 2.96. 2.76	3.26. 3.56. 3.86
17	1.42. 1.58. 1.88	2.27. 2.57. 2.77	3.27. 3.57. 3.77
18	1.43. 1.59. 1.89	2.28. 2.58. 2.78	3.28. 3.58. 3.78
19	1.44. 1.60. 1.90	2.29. 2.59. 2.79	3.29. 3.59. 3.79
20	1.45. 1.61. 1.91	2.30. 2.60. 2.80	3.30. 3.60. 3.80
21	1.46. 1.62. 1.92	2.31. 2.61. 2.81	3.31. 3.61. 3.41
22	1.47. 1.63. 1.93	2.32. 2.62. 2.82	3.32. 3.62. 3.42
23	1.48. 1.64. 1.94	2.33. 2.63. 2.83	3.33. 3.63. 3.43
24	1.49. 1.65. 1.95	2.34. 2.64. 2.84	3.34. 3.64. 3.44

25	1.50. 1.66. 1.96	2.35. 2.55. 2.85	3.35. 3.65. 3.25
26	1.51. 1.67. 1.97	2.36. 2.66. 2.86	3.36. 3.66. 3.26
27	1.52. 1.68. 1.98	2.37. 2.67. 2.87	3.37. 3.67. 3.27
28	1.53. 1.69. 1.99	2.38. 2.68. 2.88	3.38. 3.68. 3.18
29	1.54. 1.70. 1.100	2.39. 2.69. 2.89	3.39. 3.69. 3.19
30	1.55. 1.71 1.101	2.40. 2.70. 2.90	3.40. 3.70. 3.20
Вар. №	4.Основы физики твёрдого тела	5.Основы ядерной физики	
1	4.15. 4.39. 4.69	5.82. 5.42. 5.72	
2	4.16. 4.40. 4.70	5.83. 5.43. 5.73	
3	4.91. 4.41. 4.71	5.84. 5.44 5.74	
4	4.92. 4.42. 4.72	5.85. 5.45. 5.75	
5	4.93. 4.43. 4.73	5.86. 5.46. 5.76	
6	4.64. 4.44 4.74	5.87. 5.47. 5.77	
7	4.65. 4.45. 4.75	5.88. 5.48. 5.78	
8	4.66. 4.46. 4.76	5.89. 5.49. 5.79	
9	4.67. 4.47. 4.77	5.92. 5.50. 5.80	
10	4.68. 4.48. 4.78	5.93. 5.51. 5.81	
11	4.69. 4.49. 4.79	5.12. 5.52. 5.82	
12	4.20. 4.50. 4.80	5.13. 5.53. 5.83	
13	4.21. 4.51. 4.81	5.14. 5.54. 5.84	
14	4.22. 4.52. 4.82	5.15. 5.55. 5.85	
15	4.23. 4.53. 4.83	5.16. 5.56. 5.86	
16	4.24. 4.54. 4.84	5.17. 5.57. 5.87	
17	4.25. 4.55. 4.85	5.18. 5.58. 5.88	
18	4.26. 4.56. 4.86	5.19. 5.59. 5.89	
19	4.27. 4.57. 4.87	5.30. 5.60. 5.90	
20	4.28. 4.58. 4.88	5.31. 5.61. 5.91	
21	4.29. 4.59. 4.89	5.32. 5.62. 5.92	

22	4.30. 4.60. 4.90	5.33. 5.63. 5.93	
23	4.31. 4.61. 4.91	5.34. 5.64. 5.24	
24	4.32. 4.62. 4.92	5.35. 5.65. 5.25	
25	4.33. 4.63. 4.93	5.36. 5.66. 5.26	
26	4.34. 4.64. 4.74	5.37. 5.67. 5.27	
27	4.35. 4.65. 4.75	5.38. 5.68. 5.28	
28	4.36. 4.66. 4.76	5.39. 5.69. 5.29	
29	4.37. 4.67. 4.77	5.40. 5.70. 5.30	
30	4.38. 4.68. 4.78	5.41. 5.71 5.31	

Задачи, рекомендуемые для дополнительных занятий

1. Основы квантовой оптики	1.26, 1.39, 1.46, 1.52, 1.62, 1.77, 1.80, 1.102
2. Основы квантовой механики	2.18, 2.21, 2.31, 2.44, 2.67, 2.77, 2.88
3. Основы квантовой физики атомов	3.19, 3.32, 3.48, 3.58, 3.66, 3.80, 3.84
4. Основы физики твердого тела	4.15, 4.16, 4.20, 4.29, 4.31, 4.44, 4.50, 4.60, 4.71, 4.80, 4.89, 4.93
5. Основы ядерной физики	5.12, 5.16, 5.21, 5.31, 5.36, 5.43, 5.48, 5.53, 5.64, 5.79

Литература

1. *Анисимов В.М., Лаушкина Л.А., Третьякова О.Н* Физика в задачах/под ред. *О.Н.Третьяковой* - М.: Вузовская книга, 2002.
2. *Белашова Г.И., Ваничева Н.А., Мартыненко Т.П., Нарбекова Е.Н., Одинцова Г.А./*под ред *Г.А. Одинцовой* .Решение задач по физике «Твердое тело». Пособие для самостоятельной работы студентов. - М.: Изд-во МАИ, 1995.
3. *Белашова Г.И., Ваничева Н.А., Мартыненко Т.П., Нарбекова Е.Н., Одинцова Г.А./*под ред *Т.П. Мартыненко* Твердое тело. Ядерная физика. Пособие для самостоятельной работы студентов. ч.1,2 - М.: Изд-во МАИ, 1998.
4. *Ваничева Н.А., Гусякова Н.Ф., Мартыненко Т.П., Нарбекова Е.Н., Одинцова Г.А, Якуш Л.В./*под ред *Ф.А.Николаева* Методические указания к практическим занятиям по курсу физики. Ядерная физика. 2 - М.: Изд-во МАИ, 1987.
5. *Бондарев Б.В., Калашников Н.П., Спириг Г.Г.* Курс общей физики. Кн. 2. Электромагнетизм. Волновая оптика. Квантовая физика. - М.: Высшая школа, 2003.
6. *Бондарев Б.В., Калашников Н.П., Спириг Г.Г.* Курс общей физики. Кн. 3. Термодинамика. Статистическая физика. Строение вещества. - М.: Высшая школа, 2003.
7. *Ваулин Е.П., Коновалова З.И., Соколова Е.Ю., Третьякова О.Н., Юценко Т.А.* Практический курс физики. Квантовая физика. Пособие для самостоятельной работы студентов ч.1,2 /под ред.*Е.П. Ваулина* - М.: , 1996.
8. *Ваулин Е.П., Гордеев О.А., Коновалова З.И., Мартыненко Т.П., Одинцова Г.А., Тарасов В.Е., Третьякова О.Н.* Практический курс физики. Квантовая физика. Пособие для самостоятельной работы студентов /под ред. *Г.Г. Спирина* - М.: Авииздат , 2002.
9. *Взоров Н.Н., Замша О.И., Иродов И.Е., Савельев И.В* .Сборник задач по общей физике - М.: Наука, 1968.
10. *Гурьев Л.Г. и др.* Сборник задач по общему курсу физики - М.: Высшая школа, 1972.
11. *Демков В.П., Третьякова О.Н.* Физика. Теория. Методика. Задачи. - М.: Высшая школа, 2001.
12. *Демков В.П., Третьякова О.Н.* Физика. Геометрическая и волновая оптика. Элементы теории относительности. Квантовая физика. Физика атома. Физика атомного ядра. - М.: Изд-во МАИ, 2000.

13. *Детлаф А.А., Яворский Б.М., Милковская Л.Б.* Курс физики т.3.- М.: Высшая школа, 1973.
14. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике - М.: Наука, 1988.
15. *Иродов И.Е.* Сборник задач по атомной и ядерной физике. - М.: Атомиздат, 1966.
16. *Иродов И.Е.* Задачи по квантовой физике. -М.: Высшая школа, 1991.
17. *Кременцова Ю.Н, Третьякова О.Н.* Спектры атомов и молекул: Учебное пособие. - М.: Изд-во МАИ , 1993.
18. *Кристи Р., Питти А.* Строение вещества: введение в современную физику - М.: Наука, 1969.
19. *Козел С.М. и др.* Сборник задач по физике -М.: Высшая школа, 1978.
20. *Колпаков П.Е.* Основы ядерной физики. - М.: Высшая школа, 1969.
21. *Линч П., Николайдес А.* Задачи по физической электронике - М.: Мир, 1975.
22. *Савельев И.В.* Курс общей физики т.3.. - М.: Наука. 1987.
23. *Савельев И.В.* Сборник вопросов и задач по общей физике - М.: Наука. 1988.
24. *Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. -М: Высшая школа, 1981.
25. *Электромагнетизм. Оптика. Атомная и ядерная физика/под ред. Ю.В. Тарлакова* - М.: Изд-во МАИ, 1989.
26. *Ядерная физика/под ред. Ю.Р. Мусина* - М.: Изд-во МАИ, 1993.
27. *Яргин В.С., Юркевич К.Б.* Квантовая теория тепловых свойств твердых тел - М.: Изд-во МАИ, 1978.

Оглавление

Предисловие.....	3
1. Основы квантовой оптики.....	4
1.1. Основные понятия и законы.....	4
1.2. Примеры решения задач.....	12
1.3. Задачи для самостоятельного решения.....	28
2. Основы квантовой механики.....	36
2.1. Основные понятия и законы.....	36
2.2. Примеры решения задач.....	40
2.3. Задачи для самостоятельного решения.....	54
3. Основы квантовой физики атомов.....	63
3.1. Основные понятия и законы.....	63
3.2. Примеры решения задач.....	75
3.3. Задачи для самостоятельного решения.....	87
4. Основы физики твердого тела.....	93
4.1. Основные понятия и законы.....	93
4.2. Примеры решения задач.....	101
4.3. Задачи для самостоятельного решения.....	109
5. Основы ядерной физики.....	118
5.1. Основные понятия и законы.....	118
5.2. Примеры решения задач.....	127
5.3. Задачи для самостоятельного решения.....	132
Ответы.....	139
Приложения.....	156
Варианты расчетных работ.....	159
Литература.....	160
Оглавление.....	162

Учебное пособие

**Анисимов Владимир Михайлович
Третьякова Ольга Николаевна**

Практический курс физики. Основы квантовой физики

Редактор *М.С. Винниченко*
Компьютерная верстка *О.Н.Третьякова*

Подписано в печать 08.01.07 г.
Бум.офсетная. Формат 60 84/16 Печать офсетная.
Усл. печ. л.. 9,53 . Уч. изд. 10,25 . Тираж 100 экз.
Зак. 3739/2274. С 631.

Отпечатано с готового оригинал - макета.
Издательство МАИ

«МАИ», Волоколамское шоссе, д.4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография издательства МАИ
«МАИ», Волоколамское шоссе, д.4, г. Москва, А-80, ГСП-3 125993