"УТВЕРЖДАЮ"
Ректор МГТУ им. Н.Э. Баумана
________________ А.А. Александров

Структура и содержание типового задания вступительных экзаменов по математике, проводимых МГТУ им. Н.Э. Баумана самостоятельно

Типовой вариант задания

1. На расстоянии 100 *км* первый автомобиль расходует бензина на 2 *л* больше, чем второй. Расходуя 1 *л* бензина, он проходит по такой же дороге на 2,5 *км* меньше, чем второй. Каков расход бензина каждого автомобиля на расстоянии 100 *км* ? (8 баллов)

2. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{24} = 2,\ a_{27} = 11$? (8 баллов)

3. Решите уравнение $2 \cdot 4^{\log_3 x} = 3 + 2^{1-2\log_3 x}$. (8 баллов)

4. Решите неравенство $\dfrac{6-x}{\sqrt{x-1}-1} \le 1$. (8 баллов)

5. Решите уравнение $3\cos^2 x + 7\sin^2 x + 8\cos\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$. Укажите его корни, лежащие в промежутке $\left[-3\pi/2; 3\pi/2\right]$. (10 баллов)

6. Решите неравенство $3 + \log_{\sqrt{3}} x \le \log_3(6x+1)$. (10 баллов)

7. Из точки C проведена касательная к окружности радиуса 6 с центром в точке O, точка A является точкой касания. Отрезок CO пересекает окружность в точке B. Из точки B восстановлен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $BF = 3$. (12 баллов)

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике функции $y = 4x(6-x)^2, \quad 0 < x < 6$? (12 баллов)

9. Определите все значения параметра a, при которых уравнение $(x-1)^2 = a(|x| - x - 1)$ имеет два различных решения. (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $3\sqrt{3}$, а высота пирамиды, равная 1, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через центр описанной около пирамиды сферы, параллельна медиане AD основания и образует с плоскостью основания угол $30°$. (12 баллов)

1. На расстоянии 100 *км* первый автомобиль расходует бензина на 2 *л* больше, чем второй. Расходуя 1 *л* бензина, он проходит по такой же дороге на 2,5 *км* меньше, чем второй. Каков расход бензина каждого автомобиля на расстоянии 100 *км* ? (8 баллов)

Решение. Пусть x – расход бензина первого автомобиля на 100 км.

$\frac{100}{x-2}-\frac{100}{x}=2,5;\;\; x^2-2x-80=0,\;\; x=10$. **Ответ:** 10 и 8 л.

2. Какое наименьшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{24}=2,\; a_{27}=11$? (8 баллов)

Решение. Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$\begin{cases} a+23d=2, \\ a+26d=11 \end{cases} \Leftrightarrow d=3,\; a=-67$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наименьшее значение, если $a_n<0$, а $a_{n+1}\ge 0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $-67+3(n-1)<0$ найдем $n=[70/3]=23$.

Тогда $\min S_n=S_{23}=0,5\cdot(-67-67+3\cdot 22)\cdot 23=-782$. **Ответ:** –782.

3. Решите уравнение $2\cdot 4^{\log_3 x}=3+2^{1-2\log_3 x}$. (8 баллов)

Решение.

$$2^{2\log_3 x}=t>0,\quad 2t^{-1}-2t+3=0,\quad 2t^2-3t-2=0,\quad t=2,\quad 2^{2x}=2,$$
$$\log_3 x=0,5,\quad \text{Ответ}: x=\sqrt{3}.$$

4. Решите неравенство $\frac{6-x}{\sqrt{x-1}-1}\le 1.$ (8 баллов)

Решение. Замена: $\sqrt{x-1}=t\ge 0,\; x=t^2+1.$

$$\frac{6-t^2-1}{t-1}\le 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{5-t^2-t+1}{t-1}\le 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(t-2)(t+3)}{t-1}\ge 0 \quad\overset{t\ge 0}{\Leftrightarrow}\quad t\in[0;1)\cup[2;\infty).$$

$x-1\in[0;1)\cup[4;\infty)\Leftrightarrow x\in[1;2)\cup[5;\infty)$. **Ответ:** $x\in[1;2)\cup[5;\infty)$.

5. Решите уравнение $3\cos^2 x + 7\sin^2 x + 8\cos\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$. Укажите его корни, лежащие в промежутке $\left[-3\pi/2; 3\pi/2\right]$. (10 баллов)

Решение. $3(1-\sin^2 x) + 7\sin^2 x - 8\sin x = 0$

$t = \sin x, \quad 4t^2 - 8t + 3 = 0, \;\; t_1 = \dfrac{3}{2}, \quad t_2 = \dfrac{1}{2}, \;\; |\,t\,| \le 1,$

$\sin x = \dfrac{1}{2}, \quad x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\, n \in Z.$ При $n = -1; 0; 1$ корни принадлежат отрезку $\left[-3\pi/2; 3\pi/2\right]$. Имеем $x_1 = -7\pi/6;\, x_2 = \pi/6;\, x_3 = 5\pi/6.$

Ответ : $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\, n \in Z$; $x_1 = -7\pi/6;\, x_2 = \pi/6;\, x_3 = 5\pi/6.$

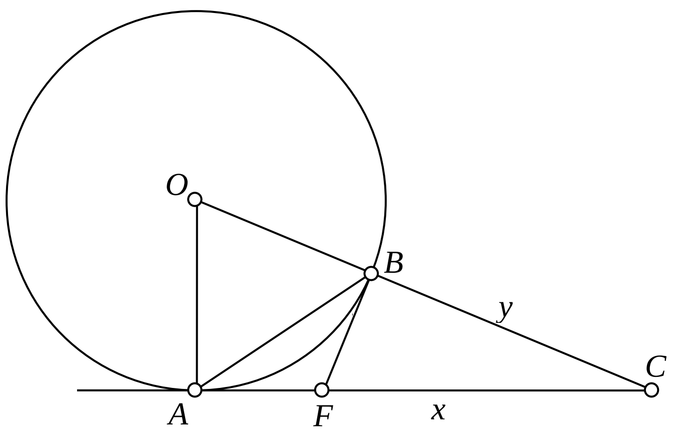
6. Решите неравенство $3 + \log_{\sqrt{3}} x \le \log_3(6x+1)$. (10 баллов)

Решение. $x > 0, \quad 27x^2 - 6x - 1 \le 0 \qquad x \in (0; 1/3) \qquad$ *Ответ* : $(0; 1/3)$.

7. Из точки C проведена касательная к окружности радиуса 6 с центром в точке O, точка A является точкой касания. Отрезок CO пересекает окружность в точке B. Из точки B восстановлен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $BF = 3$. (12 баллов)

Решение. Так как BF и AF отрезки касательных, $BF = AF = 3$.

Прямоугольные треугольники AOC и BFC подобны, $\dfrac{OC}{FC} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{OA}{BF}$.



Пусть $x = CF, \quad y = BC$.

Тогда $\dfrac{y+6}{x} = \dfrac{3+x}{y} = 2 \;\Leftrightarrow$

$\begin{cases} y + 6 = 2x, \\ 3 + x = 2y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 12 = 4x, \\ 3 + x = 2y, \end{cases} \Leftrightarrow \;\; \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 5, \\ y = 4. \end{cases}$

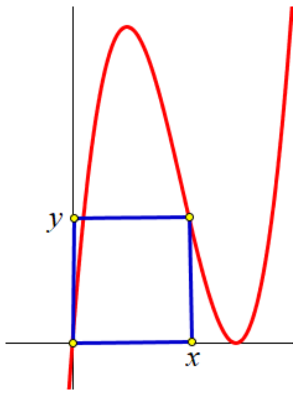
В треугольнике ABC имеем $AC = 8$, $BC = 4$, $\sin\angle OCA = \frac{AO}{OC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$,

$\cos\angle OCA = \frac{4}{5}$. Отсюда по теореме косинусов получаем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC\cdot BC\cos\angle OCA = 64 + 16 - 16\cdot 4\cdot\frac{4}{5} = \frac{144}{5},\quad AB = \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

Тогда $R_{\text{оп}} = \frac{AB}{2\sin\angle OCA} = \frac{12\cdot 5}{2\sqrt{5}\cdot 3} = 2\sqrt{5}$. **Ответ:** $2\sqrt{5}$.

8. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две стороны которого лежат на координатных осях, а одна из вершин – на графике функции $y = 4x(6-x)^2$, $0 < x < 6$? (12 баллов)



Решение:

$$S = xy = 4x^2(6-x)^2,$$
$$S' = 8(x(6-x)^2 - x^2(6-x)) = 8x(6-x)(6-2x) = 0,$$
$$x_{\max} = 3,$$

$S_{\max} = 20\cdot 4 = 324$. **Ответ**: $S_{\max} = 324$.

9. Определите все значения параметра a, при которых уравнение $(x-1)^2 = a(|x| - x - 1)$ имеет два различных решения. (12 баллов)

Решение.

I. $x \ge 0$, $(x-1)^2 = -a$, $a \le 0$, $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{-a}$.

Решение $x_1 = 1 + \sqrt{-a} > 0$ при любых $a \le 0$. Выясним, когда $x_2 = 1 - \sqrt{-a} \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{-a} \le 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \ge a \ge -1$.

При $a \in [-1;\, 0)$ имеем решения: $x_{1/2} = 1 \pm 3\sqrt{-a}$.

При $a \in (-\infty;\, -1) \cup \{0\}$ имеем решение: $x = 1 + \sqrt{-a}$.

II. $x < 0$, $(x-1)^2 = -2ax - a$, $x^2 - 2x + 1 + 2ax + a = 0$, $x^2 - 2(1-a)x + a + 1 = 0$.

$$\frac{D}{4} = 1 - 2a + a^2 - a - 1 = (a^2 - 3a) = a(a-3).$$

Два различных решения:

$$\begin{cases} a(a-3) > 0, \\ 1-a < 0, \\ a+1 > 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a \in (3;+\infty).$$

При $a \in (3;+\infty)$ имеем решения: $x_{1/2} = (1-a) \pm \sqrt{a(a-3)}$.

Одно решение: 1) $D = 0, \quad x = (1-a) < 0, \quad \Rightarrow \quad a = 3.$

2) $a+1 < 0 \quad \Rightarrow \quad a < -1.$

3) $a = -1, \quad 1-a < 0$ нет решений.

При $a \in (-\infty; -1) \cup \{3\}$ имеем решение: $x = (1-a) - \sqrt{a(a-3)}$.

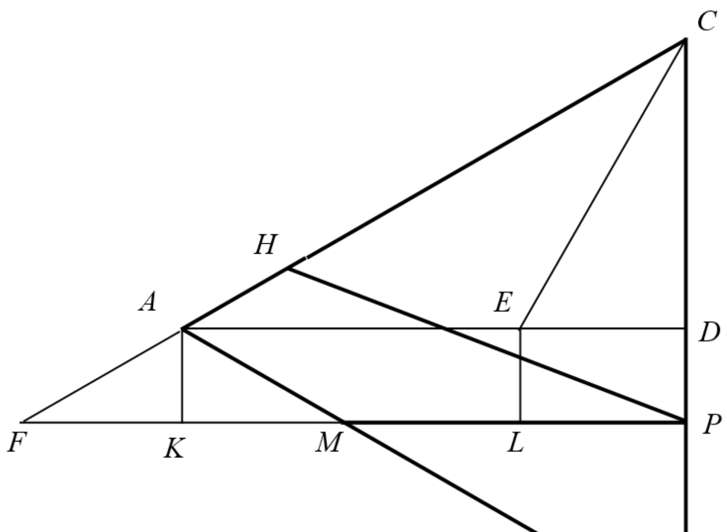
Ответ: при $a \in (-\infty; -1)$ имеем 2 решения: $x_1 = 1 + \sqrt{-a}$, $x_2 = (1-a) - \sqrt{a(a-3)}$,

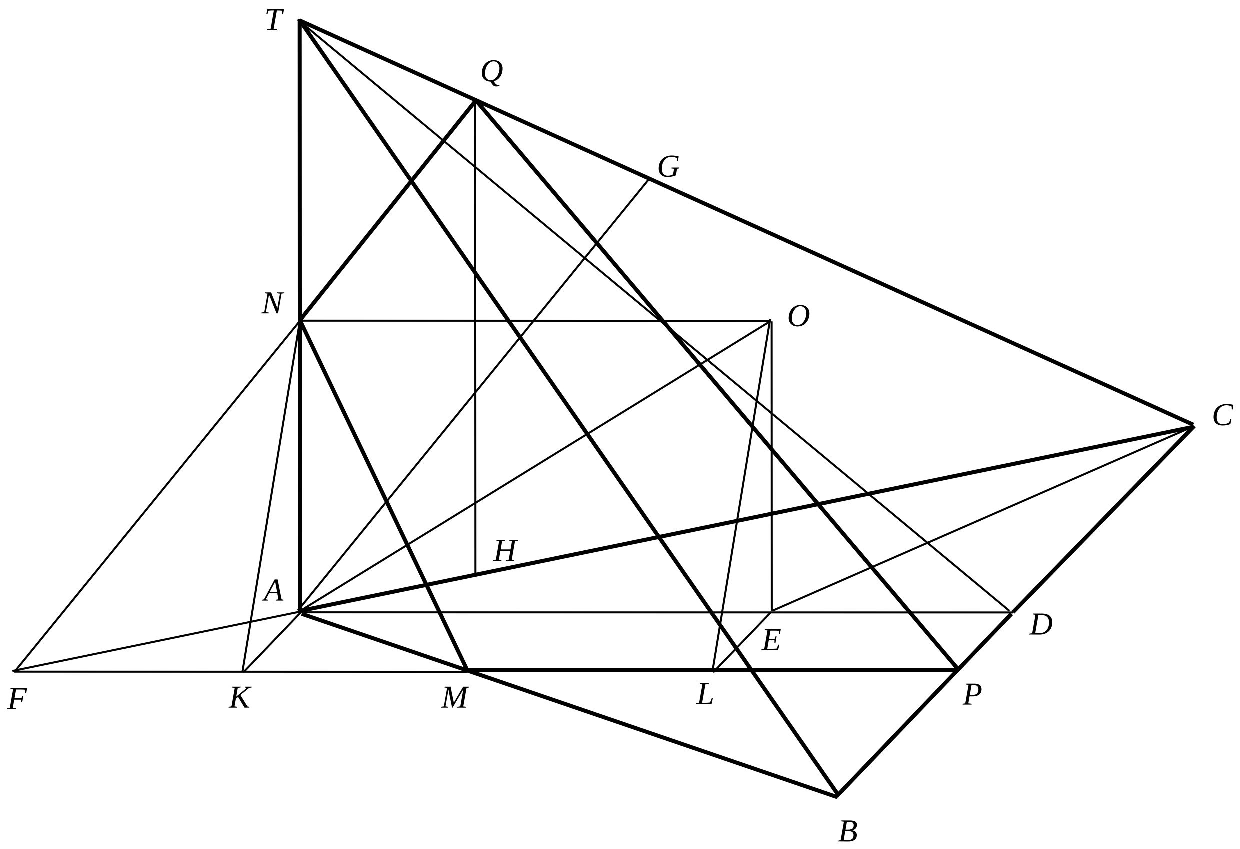
при $a \in [-1; 0)$ имеем 2 решения: $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{-a}$,

при $a \in (3; +\infty)$ имеем 2 решения: $x_{1/2} = (1-a) \pm \sqrt{a(a-3)}$.

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC, все стороны которого равны $3\sqrt{3}$, а высота пирамиды, равная 1, совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через центр описанной около пирамиды сферы, параллельна медиане AD основания и образует с плоскостью основания угол $30°$.

(12 баллов)





Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания E; $OE = AT/2$. Расстояние от точки E до линии пересечения секущей плоскости с плоскостью основания $EL = OE \cdot \mathrm{ctg}\angle OLE = AB/6$. Так как линия пересечения секущей плоскости с плоскостью основания $MP \| AD$, длина EL равна расстоянию от точки E до прямой MP. Проведем $ON \| AD,\ N \in TA,\ TN = AN$. Так как $ON \| MP$, ON лежит в секущей плоскости. Продолжим MP до пересечения с прямой AC в точке F, затем FN – до пересечения с ребром TC в точке Q. Четырехугольник $MNQP$ – искомое сечение. Для определения положения точки Q проведем $AG \| NQ,\ G \in TC$; из $TN = AN$ следует $TQ = QG$. Так как $AF = AM = 1/3\,AC$, $QG = 1/3\,CG$. Следовательно, $TQ = 1/5\,TC$ и $AH = 1/5\,AC$, где H – проекция Q на плоскость основания. Обозначим $AB = a,\ TA = h$. Из подобия $FN : FQ = AN : HQ$ получим $FN : FQ = (1/2h) : (4/5h) = 5:8$. Пусть $AK \perp FM$, тогда $NK \perp FM$. Из $FK = KM = 1/2\,MP$ следует $FM = 1/2\,FP$. Площадь треугольника FNM $S_{\Delta FNM}$ составляет $(5/8)\cdot(1/2) = 5/16$ площади треугольника FQP $S_{\Delta FQP}$, следовательно, площадь сечения $S_{MNQP} = 11/5\ S_{\Delta FNM}$. Так как $AK = PD = 1/6\,a$, $FM = 2\sqrt{3}\,AK = a\sqrt{3}/3$ и

$NK = \sqrt{AK^2 + AN^2} = \sqrt{\left(a/6\right)^2 + \left(h/2\right)^2} = \sqrt{a^2 + 9h^2}\Big/6$, $S_{\Delta FNM} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+9h^2}}{6} = \dfrac{a\sqrt{a^2+9h^2}}{12\sqrt{3}}$ и

$S_{MNQP} = \dfrac{11a\sqrt{a^2+9h^2}}{60\sqrt{3}}$.

Решение с помощью проектирования сечения на основание пирамиды. Площадь проекции сечения $S_{MAHP} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BMP} - S_{\Delta CHP} = \left(1 - \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\right)S_{\Delta ABC} = \dfrac{11}{45}S_{\Delta ABC} = \dfrac{11\sqrt{3}\,a^2}{180}$,

$\cos\angle NKA = \dfrac{AK}{NK} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+9h^2}}$, $S_{MNQP} = S_{MAHP}\big/\cos\angle NKA$.

Ответ.

a	h	$\cos\angle NKA$	S_{MAHP}	S_{MNQP}
$3\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}\big/2$	$33\sqrt{3}\big/20$	$33/10$